UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO INTEGRAL Y EL EMPLEO ADECUADO DE TIC´S

Susana Beatriz Ruiz,
María Inés Ciancio, Sebastián Correa Otto

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales
Universidad Nacional de San Juan, Argentina

sbruizr@yahoo.com.ar , miciancio@hotmail.com , s.correaotto@gmail.com

FECHA DE RECEPCIÓN: 4/02/17, FECHA DE ACEPTACIÓN: 6/11/17

RESUMEN

En este trabajo se presenta una guía de actividades, con apoyo de diferentes herramientas TICs, en cuya resolución se realizan cálculos, representaciones gráficas, comparan y analizan resultados cuando las salidas del ordenador difieren de los cálculos obtenidos de manera manual empleando la teoría matemática. En particular, la guía se centra en el cálculo de integrales indefinidas. Este tipo de propuestas pueden resultar provechosas para la enseñanza sobre el "empleo adecuado" de TICs y la profundización de los contenidos involucrados.

ABSTRACT

This contribution presents an activity guide supported by different ICT tools. Solving the guide comprises performing calculations, graphical representations, comparing and analyzing results when the output of the computer software differs from the calculations obtained manually through the use of mathematical theory. In particular, the activity guide is centered on solving indefinite integrals. This type of proposals may result helpful for teaching on the "adequate usage" of ITC tools and for granting a deeper understanding of the involved content.

PALABRAS CLAVE:

Cálculo integral – tecnología - enseñanza

KEYWORDS:

Calculus - technology - teaching

INTRODUCCIÓN

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs), en particular el uso de ordenadores, en estas últimas décadas, están atravesando nuestra vida, cambiando nuestras visiones del mundo y modificando los patrones de acceso al conocimiento y de interacción interpersonal. Progresivamente, se han ido incorporando en los diseños curriculares de todos los niveles de la enseñanza formal y no formal (Zangara, 2009), tanto en el nivel inicial, medio y superior. El uso de ordenadores se vislumbra actualmente como un medio de enseñanza donde se pueden crear entornos de aprendizaje útiles para la enseñanza de distintas ciencias, en particular la Matemática.

Entre las tareas claves del docente de hoy, resulta fundamental enseñar a sus estudiantes a convertirse en lectores críticos del material que disponen, seleccionan y trabajan; a chequear la fuente de la cual proviene la información; a validar o no la calidad de esos contenidos y/ o resultados. En el caso de las TIC´s, "no es lo mismo ser usuario de PC que lograr transmitir efectivamente a los alumnos el "buen uso" de determinadas herramientas tecnológicas como recursos para trabajar la información y elaborarla a través de un proceso de aprendizaje." (Hernaiz, 2010). Para ello es fundamental que el docente realice actividades tendientes a analizar críticamente las herramientas TICs que se disponen, pudiendo destacar ventajas y desventajas en su uso, estableciendo diferencias y similitudes, cuestionando los resultados en base a los obtenidos aplicando las teorías científicas correspondientes, a los fines de aprovechar estos recursos educativos en forma óptima para la enseñanza.

El presente trabajo se enmarca en este contexto. Presenta un material didáctico, denominado "Guía de Actividades con Software", para ser desarrollada por alumnos que cursan las asignaturas "Análisis Matemático II" de las carreras de Licenciatura en Astronomía y Licenciatura en Geofísica de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan. Dichos alumnos poseen conocimientos previos sobre el cálculo diferencial e integral de una variable. La temática abordada se centra en profundizar aspectos relacionados al cálculo de integrales indefinidas, mediante la comparación de resultados, aplicando la teoría del Cálculo Diferencial e Integral y Sistemas Algebraicos de Cómputo (CAS).

Los CAS son herramientas TICs que permiten ejecutar operaciones entre expresiones matemáticas en una forma similar a las operaciones manuales tradicionales de matemáticos o científicos, manipular expresiones algebraicas y representar gráficamente funciones. En el modelo de guía propuesto se emplean sistemas algebraicos que tienen como característica común: ser de acceso libre, de utilidad y aplicabilidad para el cálculo diferencial e integral, tanto a nivel medio como superior.

Respecto al empleo de CAS, en el cálculo de antiderivadas, en general resultan ser herramientas muy eficaces, en especial cuando se presentan cálculos engorrosos.

Resulta pertinente destacar, a nuestro parecer, el uso del software proporciona un importante instrumento para que los estudiantes puedan liberarse de memorizar fórmulas o procedimientos de cálculo, aunque es fundamental tener en cuenta que los estudiantes necesitan un cierto tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual segura de los conceptos. Necesitan prestar atención al proceso de transformación y relación que pueden establecerse entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas (Camacho, 2005, p. 108).

"Sin embargo, existen casos donde los resultados del CAS difieren a los obtenidos con lápiz y papel usando la teoría, lo cual puede influir de diversas maneras. Lo idóneo es analizar el porqué de esta diferencia" (Ponce y Rivera, 2011, p. 87).

En la selección de las actividades, en el material didáctico, se tiene en cuenta que se presenten bajo planteos simples y sencillos, que puedan resolver los alumnos con la guía y el apoyo del docente, en donde le sea útil aplicar los conocimientos previos correspondientes al cálculo diferencial e integral, como así también CAS apropiados; y tiendan a contribuir en la formación disciplinar del alumno.

MATERIAL DIDACTICO ELABORADO

Del material elaborado como propuesta de actividades, se pueden distinguir:

- a) Un planteo general introductorio donde se enuncian los objetivos generales que se persiguen al resolver la guía; la temática general a abordar, la metodología de trabajo y el material de apoyo que disponen para realizar las actividades.
- b) Actividades de cálculo, análisis y comparación de resultados (estas actividades invitan al alumnos a pensar, establecer relaciones, reflexionar entorno a los resultados obtenidos empleando TICs y el uso adecuado de las mismas en el cálculo de integrales indefinidas);
- c) Un espacio para el análisis, debate y reflexión de las tareas desarrolladas.

MODELO DE ACTIVIDADES PROPUESTA

"Guía de Actividades con Software"

Introducción: A continuación, se presentan distintos planteos para el cálculo de primitivas. El objetivo de la guía es que puedas profundizar sobre aspectos relacionados al cálculo de funciones primitivas en integración y contribuir en la capacitación sobre el uso adecuado de software y/o programas para el cálculo infinitesimal e integral.

Es recomendable que resuelvas las actividades, en primer instancia, utilizando lápiz y papel, empleando los conocimientos previos ya adquiridos oportunamente de análisis diferencial e integral para funciones reales de variable real (puedes consultar, si lo requieres, apuntes de clase y/o material bibliográfico de referencia de la cátedra); luego utilizando Sistemas Algebraico de Cálculo (CAS). En la guía está previsto que apliques sistemas que tienen como características comunes: ser libres, de fácil acceso (tanto para docentes como alumnos e investigadores) y simples de utilizar, por ejemplo:

- 1)Wolfram Alpha (buscador de respuestas desarrollado por la compañía Wolfram Research, basado en Mathematica) ;
- 2) Symbolab (Apps en Educación. Motor de búsqueda libre diseñado para los matemáticos, científicos, estudiantes).
- 3) GeoGebra (software matemático interactivo para la educación en colegios y universidades).
- 4) wxMaxima (sistema bastante completo basado en el programa DOE-MACSYMA).

> En general, los algoritmos utilizados en estos programas son eficientes métodos que en ocasiones entrañan relaciones matemáticas mejor conocidas por los expertos programadores que por los matemáticos.
>
> También suele ocurrir que los CAS empleen métodos que producen resultados más complejos a los obtenidos con lápiz y papel o incluso llegan a producir resultados erróneos aún en casos simples (Ponce y Rivera, 2011, p. 85).

Actividad 1:

i) Lea atentamente las siguientes definiciones de antiderivada proporcionada por autores de referencia.

“Una función F se denomina antiderivada de la función f en un intervalo I, si para todo valor x perteneciente a I.” (Leithold, 1994).
“Una función F(x) es antiderivada de f(x) si F/(x)=f(x) para todo x del dominio de f.” (Larson, y Hostetler, 1989).

ii) Analiza la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de ser inválido, justifica la respuesta.

- *a)* $F(x)=x^2$ *tiene el mismo dominio de definición de* $f(x)=2x$.
- *b)* $F(x)=x^2$ *es antiderivada de* $f(x)=2x$.
- *c)* $F(x)=\frac{x^4+3x}{x}$ *tiene el mismo dominio de definición de* $f(x)=3x^2$.
- *d)* $F(x)=\frac{x^4+3x}{x}$ *es antiderivada de* $f(x)=3x^2$.
- *e)* $F(x)=x^3+C$ *con C=cte. es antiderivada de* $f(x)=3x^2$.

"Si F(x) es la antiderivada de f(x) en un intervalo I entonces cada antiderivada de f en I es F(x) +C, donde C es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de f en I pueden obtenerse en la forma F(x)+C asignando valores particulares a C."
(Leithold, 1994)

Actividad 2:
Tenga en cuenta el siguiente resultado:

Es claro que $F(x)=x^2$ es antiderivada de $f(x)=2x$. a) Es cierto que $F(x)=x^2+1$ es antiderivada de f(x)? ; b) ¿ y $F(x)=x^2+2$? ; c) Compare las gráficas de las antiderivadas de $f(x)=2x$ y caracterice las mismas desde el punto de vista geométrico.

Actividad 3:
Considere los Teoremas Fundamentales del Cálculo:

Primer teorema fundamental del cálculo:
Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y sea x cualquier número de [a,b]. Si F es la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(t).$

Segundo teorema fundamental del Cálculo:
Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y sea g una función tal que $g'(x) = f(x)$ *para todo x en [a,b]. Entonces*

$$\int_a^x f(t)\, dt = g(b) - g(a).$$

Resuelva las siguientes integrales indefinidas aplicando reglas y/o métodos de integración apropiados:

- 1) $\int (2x + \cos(3x))\,dx$
- 2) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$
- 3) $\int \cos^2(x)\,dx$
- a) Utilizando lápiz y papel.
- b) Empleando CAS.
- c) Compare los resultados obtenidos en a) y b).

Actividad 4:

a) Compruebe que $\int \frac{\cos(2x)}{sen\,(x).\cos(x)}\,dx = In\left|sen\,(2x)\right| + C$

b) La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos al calcular la antiderivada para la integral del apartado anterior,

a) $\int \frac{\cos(2x)}{sen\,(x).\cos(x)}\,dx$

utilizando distintos softwares libres para el cálculo diferencial e integral.

Softwares libres	$\int \frac{\cos(2x)}{sen\,(x).\cos(x)}\,dx$
MÁXIMA	log (sin(x)) + log (cos (x))
GeoGebra	$2\left(-\frac{1}{2} In\left(\frac{-\cos(x)+1}{\cos(x)+1} + \frac{\cos(x)+1}{-\cos(x)+1} + 2\right) + \frac{1}{4} In\left(\frac{-\cos(x)+1}{\cos(x)+1} + \frac{\cos(x)+1}{-\cos(x)+1} - 2\right)\right)$
Symbolab	-ln $\lvert$tan(x)$\rvert$ + 2ln $\lvert$sen(x)$\rvert$
WolframAlpha	log(sin(x))+log(cos(x))

Tabla 1: Antiderivadas para la integral planteada, utilizando distintos CAS libres

Compare los resultados de la Tabla 1, analice dominios de definición en cada caso y saque conclusiones.

Actividad 5:
La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos al calcular la antiderivada de

$f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(x)}{\ln(\cos(x))}$ utilizando distintos programas libres.

a) Resuelva la integral planteada, $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\ln(\cos(x))}\,dx$ con lápiz y papel, y compare su respuesta con la que se muestra en la Tabla 2 bajo el título de "solución teórica".

b) Analice los dominios de definición de las funciones primitivas propuestas en la Tabla 2.

Compare respuestas y escriba conclusiones.

Softwares libres	$\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\ln(\cos(x))}\,dx = \ln\lvert In(\cos(x))\rvert + C$ *(solución teórica por el método de sustitución)*
MAXIMA	-log(log(cos(x)))
GeoGebra	$\ln(\ln((-\tan(x/2)^2+1)/(\tan(x/2)^2+1)))$
Symbolab	-log|log(cos(x))|
WolframAlpha	-log(log(cos(x)))

Tabla 2: Antiderivadas para la integral planteada, empleando distintos CAS libres.

Actividad 6:
Espacio para expresar sus vivencias respecto a las actividades desarrolladas.
Indique aspectos positivos y negativos de esta experiencia.

MUESTRA DE ALGUNAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS POR LOS ALUMNOS

Para realizar las distintas actividades de la Guía, los alumnos tratan de resolver grupalmente, utilizando lápiz y papel, las distintas actividades solicitadas, teniendo en cuenta los conocimientos previos impartidos por las asignaturas, como así también el material bibliográfico y de referencia propuesto para las actividades. Respecto a los cálculos y gráficos con ayuda de software fueron guiados, en general para su realización, con el apoyo de docentes en el gabinete de computación, ya que representaban un nuevo desafío para realizar sus actividades.

En cuanto a la Actividad 1, al analizar grupalmente las afirmaciones para responder sobre la validez de las mismas, los alumnos realizaron cálculos de derivadas, determinaron dominios de definición y valoraron la importancia de tener en cuenta dichos dominios a la hora de responder a los cuestionamientos planteados.

En la Actividad 2, realizaron las representaciones graficas y pudieron visualizar gráficamente el efecto de la constante de integración en la búsqueda de soluciones con la integral indefinida planteada.

En la Actividad 3 los alumnos resuelven con lápiz y papel las integrales, aplicando propiedades, integrales básicas elementales, sustituciones trigonométricas y el método de sustitución. Luego de calcular las primitivas, con ayuda de distintos software, observan que las expresiones que proporcionan son las mismas al dar sus respuestas. En algunos casos, no coinciden con las obtenidas inicialmente a mano empleando la teoría. En los casos en que los resultados no coinciden, comprueban que dichas soluciones son correctas trabajando algebraicamente y considerando igualdades trigonométricas.

En la Actividad 4, al tener en cuenta la identidad trigonométrica
$sen(2x)= 2\ sen(x).\ cos(x)$, y aplicar el método de sustitución comprueban:

$$\int \frac{cos(2x)}{sen\ (x).cos(x)}\ dx = \ln|sen\ (2x)|+C.$$

A partir de apreciar diferencias en los resultados dados en la Tabla 1, para abordar la problemática de si son respuestas correctas o no, los alumnos tienen en cuenta la definición de antiderivada. En primer lugar, para cada función primitiva F(x) propuesta, verifican la igualdad $F'(x)= \frac{cos(2x)}{sen\ (x).cos(x)}$, derivando directamente cada primitiva propuesta.

Posteriormente analizan si las igualdades anteriores se cumplen para todo x del dominio de $f(x)= \frac{cos(2x)}{sen\ (x).cos(x)}$, construyendo los graficos con la ayuda del software libre Gnuplot, con la guía y apoyo del personal de la cátedra.

La Figura 1 corresponde a la solución obtenida con lápiz y papel, mientras que la Figura 2 a las obtenidas utilizando los sistemas algebraicos citados en la Tabla I.

Los alumnos comparan los dominios de las primitivas en los casos b) y c) de la Figura 2, con la obtenida en forma manual representada en la Figura 1. Observan que estos dominios coinciden con dominio de la función a integrar representada en la Figura 3.

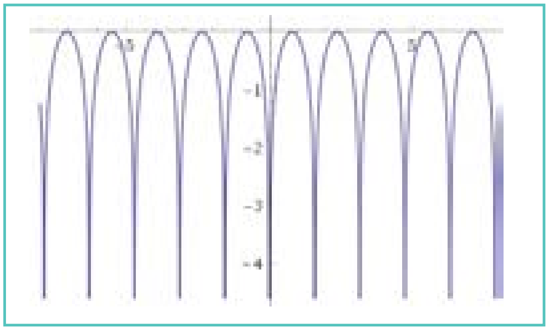
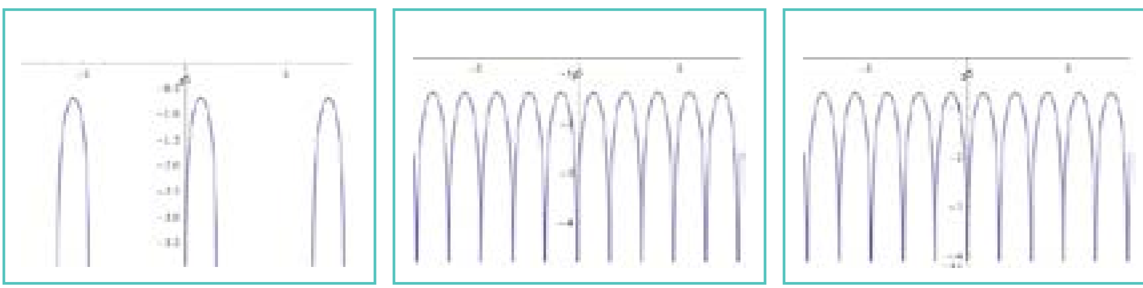


Figura 1: Grafica de la primitiva F(x)= ln|sen (2x) |



a) b) c)

Figura 2: Primitiva obtenida mediante a) Maxima y WolframAlpha; b) GeoGebra; y c) Symbolab

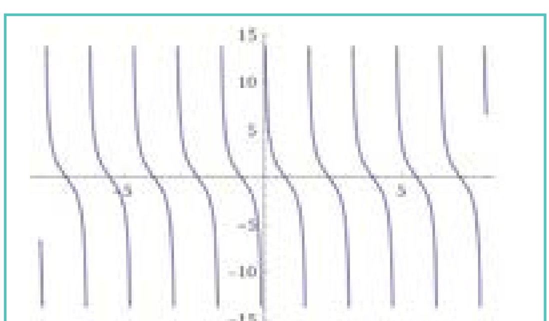


Figura 3: Gráfica de la función f(x)=cos(2x)/ sen(x). cos(x)

Teniendo en cuenta la definición de la antiderivada, concluyen además que la función representada en la Figura 2 a), correspondiente a soluciones propuestas utilizando wxMaxima y WolframAlpha no representan soluciones generales a la integral indefinida del Planteo 1.

En la Actividad 5, resuelven $\int \frac{\mathrm{tg}(x)}{\ln(\cos(x))}\,dx$ aplicando el método de sustitución, considerando t= ln(cos(x)). Luego teniendo en cuenta la Tabla 2, observan claramente que el programa Symbolab proporciona una primitiva que coincide con la hallada utilizando lápiz y papel. Por otro lado prestan atención en que la respuesta proporcionada por wxMaxima es la misma a la proporcionada al aplicar WolframAlpha. En cuyo caso, al análizar el dominio de definición de F(x)=-log(log(cos(x))) y comprobar que es vacío, concluyen que las soluciones proporcionadas por ambos softwares son inapropiadas.

Respecto a la primitiva propuesta por GeoGebra, pudieron ver que tang(x/2) está definida para los x tales que cos(x/2)≠0, o sea x≠ π+ 2kπ con k entero. Al considerar los valores x tales que cos(x/2)≠0, y trabajar algebraicamente teniendo en cuenta identidades trigonométricas comprobaron que $-\ln(\ln((-\tan(x/2)^2+1)/(\tan(x/2)^2+1))) = -\log(\log(\cos(x)))$. Por lo que concluyen que GeoGebra tampoco da una respuesta adecuada, en este caso.

En la actividad final, luego de analizar las soluciones propuestas por distintos CAS y contrastarla con las obtenidas a mano con apoyo de resultados teóricos, los alumnos pudieron reflexionar y valorar la importancia de este tipo de actividades comparativas y de análisis para adquirir conocimientos y experiencias sobre el cálculo de primitivas y el empleo de CAS.

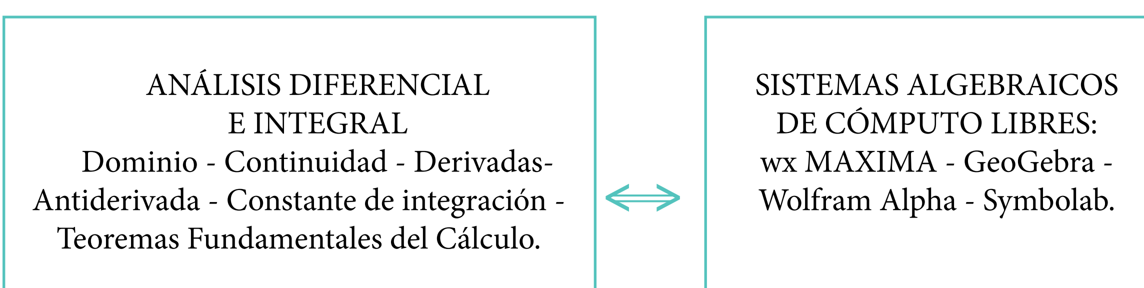


Figura 4: Contenidos y herramientas CAS utilizadas en el desarrollo de las actividades.

CONCLUSIONES

Se presenta una guía de actividades, con apoyo de diferentes herramientas CAS libres, en cuya resolución se realizan cálculos, representaciones gráficas, comparan y analizan resultados cuando las salidas del ordenador difieren de los cálculos obtenidos de manera manual empleando la teoría matemática. Se puede observar que este tipo de materiales didácticos, que se desarrollan en el aula, ofrecen a los alumnos la posibilidad de:

- Convertirse en lectores críticos y reflexivos de los resultados obtenidos, pudiendo chequear las fuentes de la cual provienen las informaciones, validando o no la calidad de esos resultados.
- Brindar experiencias para el desarrollo de la capacidad sobre el conocimiento de la existencia y propiedades de diversas herramientas y ayudas tecnológicas para la actividad matemática, su alcance y sus limitaciones; y
- Profundizar el aprendizaje de contenidos, tales como: cálculo de integrales indefinidas, constante de integración, dominio y continuidad de funciones, y el Teorema Fundamental del Cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación* Matemática SEIEM. 97-110. Recuperado de: https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/2728868.pdf

Hernaiz, I. (2010). *Las nuevas tecnologías y la calidad educativa. El desafío de la equidad Metas Educativas 2021-Propuestas Iberoamericanas y Análisis Naciona*l, 1a ed., 123-129. Buenos Aires: Santillana. Recuperado de: http://www.fundacionsantillana.com/upload/ficheros/noticias/201007/libro_v_foro.pdf el 11 de mayo de 2017.

Larson, R. E. y Hostetle, R. P. (1989). *Cálculo y Geometría Analítica* (Tercera edición). España. Madrid: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1994). El Cálculo (7 ed). México: Oxford University Press.

Ponce Campuzano, J.C. y Rivera Figueroa, A. (julio de 2011) Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas. *Números,* 77, 85-98. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros .

Zangara, A. (2009). Uso de las tecnologías en la educación: una oportunidad para fortalecer la práctica docente. *Puertas Abiertas*, n° 5, 2009. Recuperado de: http://www.puertasabiertas.fahce.unlp.edu.ar/numeros/n5/zangara el 12 de junio de 2017.