LAS CONCEPCIONES SOBRE LA MATEMÁTICA Y SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE QUE SUBYACEN EN UN CAPÍTULO SOBRE SECCIONES CÓNICAS

Vicente Messina, Marina Revelli, Isabel Pustilnik, Carlos Pano

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires, Argentina.

vrmessina@arnet.com.ar, mrevelli@gmail.com, Isabel.pustilnik@gmail.com, cpano@doc.frba.utn.edu.ar

FECHA DE RECEPCIÓN: 17/03/17, FECHA DE ACEPTACIÓN: 3/11/17

RESUMEN

En este trabajo es analizado un capítulo sobre secciones cónicas. Se discuten algunas concepciones sobre la matemática y sus efectos en la enseñanza y el aprendizaje y se analizan las concepciones subyacentes en el texto. Es utilizada la estructura de diagrama de árbol para representar la organización de los contenidos. Se analizan los objetivos que los autores plantean en las secciones, así como el tratamiento de los contenidos temáticos y el lenguaje que utilizan. Se identifican los temas importantes mediante un criterio externo. Los ejercicios propuestos son clasificados según el relato de sus enunciados y según las demandas cognitivas que exigen. Se ubica al capítulo entre los textos tecnológicos.

ABSTRACT

In this paper a chapter about conics sections is analized. We discuss some conceptions about mathematics and their effect on teaching and learning. We infer about underlying conceptions in the text. We use a tree diagram structure to represent its contents organization. We study the chapter sections thoroughly to comment the objectives that the authors consider, the treatment about thematic contents and the language that they use. We identify which are the most important topics using an external criterion. We classify proposed exercises according to their statement and the cognitive demand required to solve them. This chapter is categorized as a technological text.

PALABRAS CLAVE:

clasificación de ejercicios - cónicas

KEYWORDS:

text structure - exercise classification - conics

INTRODUCCIÓN

Motivados por el análisis y conclusiones sobre un trabajo experimental realizado con nuestros alumnos, basado en un capítulo del libro de Kozak, Pastorelli, Vardanega (2007), nos propusimos analizar las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje subyacentes en el texto. El libro fue escrito por tres profesores de distintas Facultades Regionales de la Universidad Tecnológica Nacional, con destacadas trayectorias en la docencia universitaria. Si bien fueron tres los autores, para analizar el texto, construimos un nuevo autor, lo imaginamos como un maestro conocedor de la disciplina que enseña, como un ser humano cuyas ideas y pensamientos están marcado por la vida vivida, sus experiencias y su labor docente. Un autor que interpreta los contenidos que escribe desde su marco cognoscitivo que es propio y único. A ese marco Alba Gonzales Thompson lo denomina concepciones. Para ella, las concepciones constituyen “una estructura mental general que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y gustos” (Thompson, 1992, p. 130).

A partir de las observaciones, análisis de documentos, de las opiniones, de las respuestas a preguntas sobre su práctica, Contreras (1998) define como la concepción de un profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática al conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica en relación con las cuestiones que puedan surgir respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Las concepciones son existencias personales de cada sujeto. Al haber tres autores del libro, cada uno con sus propias ideas y, al plantearnos inferir las concepciones a partir del capítulo leído, tuvimos que apelar a la figura del autor construido y pensarlas con forma de constructos hipotéticos. Las explicaciones y conclusiones de este trabajo se refieren a ese autor y no a los reales.

El capítulo de nuestro interés versa sobre secciones cónicas. Distintos autores pueden escribir sobre un mismo asunto matemático de diversas maneras. El tratamiento elegido depende de la visión sobre la matemática que el autor tenga, del ordenamiento dado a los subtemas, del fin que persiga, de los recursos que utilice para presentar los contenidos a la audiencia a la que decidió dirigirse, de sus predilecciones personales, es decir, de sus concepciones.

En la investigación de Moreno y Azcárate (2003), se muestra que, entre otros factores, las concepciones de los profesores universitarios de matemática tienen respecto a la matemática influyen en su práctica docente.

Los textos, en particular el de nuestro interés, tienen por un lado, una marca subjetiva; Dubois (2005) afirma que, según el enfoque psicolingüístico, "el sentido del texto no está en las palabras u oraciones que componen el mensaje escrito, sino en la mente del autor y en la del lector cuando reconstruye el texto en forma significativa para él" (Dubois, 2005, p. 11).

Por otro lado, la organización materializada del contenido le otorga un carácter eminentemente objetivo. Ambos lados interesan porque dan cuenta de las concepciones del autor. En tanto el capítulo se use en un curso para el tratamiento del tema Secciones Cónicas determinará, en forma explícita o implícita y en gran parte, la forma en que el profesor encare la enseñanza y las actividades de aprendizaje que realizarán los alumnos. De acuerdo Litwin (2008) en la praxis docente se entrecruzan el estilo de enseñanza del profesor y el proceso de aprendizaje de los alumnos.

CONCEPCIONES SOBRE LA MATEMÁTICA

Son muchos los pensadores, vinculados a la actividad matemática que, a través de los tiempos, han reflexionado acerca de esta disciplina. La reflexión sobre qué es el conocimiento matemático forma parte de la epistemología e interesa a la hora de analizar el capítulo sobre secciones cónicas. A manera de ejemplo comentamos algunas pocas de estas consideraciones. Ana Elena Narro Ramírez (1997) en su artículo nos cuenta:

> Para Galileo Galilei (Físico y astrónomo italiano, 1564-1642) la matemática es indispensable para lograr un conocimiento formal, concepción que resalta al afirmar que: "Con la Matemática el hombre alcanza el pináculo de todo conocimiento posible, un conocimiento no inferior al que posee la inteligencia divina"
>
> Isaac Newton (Físico inglés, 1642-1727) indica que la Matemática predice o descubre los fenómenos de la Naturaleza. Newton es autor de "Principia Mathematica", donde presentó un esquema innovador del universo, que cierra con broche de oro la revolución científica. (Narro Ramírez, 1997, p. 257)

Para Galileo la matemática transcurre entre reglas y objetos ideales conformando un conocimiento supremo, en cambio para Newton se conecta con el mundo a través de la naturaleza.

Jean Kuntzmann (Matemático francés, 1912-1992) es conocido por sus trabajos en matemáticas aplicadas y ciencias de la computación que, desde épocas muy tempranas, han producido desarrollos en ambos campos. En Kuntzmann (1969) escribió:

> Una definición de la matemática por su método es más estable y no ha cambiado desde la antigüedad griega hasta nuestros días. La matemática desarrolla, a partir de nociones fundamentales, teorías que se valen únicamente del razonamiento lógico. El grado de lucidez de esta manera de obrar tal vez haya variado en el transcurso del tiempo, o según los diversos individuos, pero su naturaleza no se ha alterado. El objeto sobre el cual versa el razonamiento matemático es por sí mismo arbitrario. Basta que un determinado objeto de estudio permita el tratamiento matemáti-

> co, que le interés a un matemático, o aquellos en beneficio de los cuales trabaja, para que nazca un nuevo capítulo de la matemática (Kuntzmann, 1969, p. 12).

Richard Courant (Matemático alemán con nacionalidad estadounidense, 1888–1972) fue asistente de David Hilbert, quien fue el director de su tesis doctoral. Fue profesor de la Universidad de Nueva York. Allí fundó el que hoy se conoce como Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, que es un respetable centro de investigación en matemáticas aplicadas. Herbert Robbins (Matemático estadounidense, 1915–2001) fue uno de los matemáticos más destacados del siglo XX. Muchos de los resultados que logró como investigador hoy llevan su nombre. Courant y Robbins fueron los autores de la obra ¿Qué es la Matemática? Allí podemos leer:

> La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque diversas tradiciones han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia matemática (Courant y Robbins, 1979, p. 3).

Kuntzmann, en el libro que citamos, reconoce que la matemática va cambiando e incorporando nuevos resultados y teorías a lo largo del tiempo. Esto hace imposible definirla por sus contenidos. Por eso opta por definirla por su método. Al hacerlo pone en primera línea el razonamiento lógico ocultando otras formas de pensamiento. En cambio, Courant y Robbins entienden que la matemática requiere también otros tipos de razonamientos. Necesita de la intuición, de lo plausible, del todo y las partes, de lo abstracto y lo concreto. Su valor está en la síntesis de las fuerzas opuestas que mencionan en el párrafo que transcribimos.

CONCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Para pensar cómo las concepciones de un profesor o autor, sobre la matemática, repercuten en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina destacamos su naturaleza dual. De acuerdo con Douady (1986) esta dualidad dialéctica objeto-herramienta es posible considerarla como un sistema abstracto y autocontenido o como un instrumento para la resolución de problemas prácticos en situaciones reales. Tenemos así dos caras de una misma moneda.

Quien se apoya fuertemente en la primera cara considera que los objetos matemáticos tienen una existencia propia. Para él, objetos tales como la parábola o la simetría existen de la misma manera que una pelota de fútbol, independientemente de cualquier contexto cultural. Para enseñarlos sólo hay que mostrarlos, definirlos e indicar sus propiedades tal como se haría con la pelota, mostrarla, reparar en su forma y material con que está hecha, hacerla picar. Se aprende lo que el profesor o el texto da. Es un aprendizaje receptivo, el alumno o el lector guarda los contenidos que recibe en su memoria, puede repetirlos pero no vincularlos con otros conocimientos o situaciones del mundo real. Quien se sostiene en la otra cara ve la otra dimensión de la matemática, menos abstracta y descontextualizada, más funcional y relacionada con la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada. La enseñanza y el aprendizaje no se pueden separar, en este sentido, de la acción concreta sobre los objetos, del razonamiento inductivo, de los procedimientos heurísticos ni tampoco de los instrumentos y recursos tecnológicos que ayudan a aprender. Los aprendices son activos e interactivos en la construcción de sus propios conocimientos, con las herramientas de las que disponen, con lo que ya conocen y con la mediación de la cultura en la que están inmersos. Las actividades de aprendizaje son tanto individuales como sociales.

LA ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

Entendemos la organización del capítulo como el conjunto de principios mediante los cuales el autor, conforme a sus propósitos, decide el peso de importancia de cada sección, las partes que las integran, las relaciones de subordinación entre los contenidos de cada sección y entre las secciones. La figura 1 muestra una representación simplificada de esos principios. Esa representación se denomina Diagrama de Árbol. Los contenidos aparecen con la numeración que les otorgó el autor.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

De acuerdo con Vilar, Gomez y Tejero (1997) el Diagrama de Árbol es una herramienta que permite una mejora de la calidad en el ciclo PDCA (Plain: planificar, Do: hacer, Check: comprobar, Act: actuar) que permite identificar los medios necesarios para alcanzar una meta o resolver un problema, en la etapa de planificación, a través de una visión global del objeto de estudio. Partiendo de una información general, como la meta a alcanzar, se incrementa gradualmente el grado de detalle sobre los medios necesarios para su consecución. Este mayor detalle se representa mediante una estructura en la que se comienza con una meta general (el “tronco”) y se continúa con la identificación de niveles de acción más precisos (las sucesivas “ramas”). Las ramas del primer nivel constituyen medios para alcanzar la meta pero, a su vez, estos medios también son metas, objetivos intermedios, que se alcanzarán gracias a los medios de las ramas del nivel siguiente. Así repetidamente hasta llegar a un grado de concreción suficiente sobre los medios a emplear.

La utilización del Diagrama de Árbol permite descomponer cualquier meta general, de modo gráfico, en fases u objetivos concretos, así como determinar acciones detalladas para alcanzar un objetivo.

En el caso que nos ocupa la meta general consiste en la exposición del tema Secciones Cónicas. De este tronco se desprenden una pluralidad de ramas de primer nivel; son las doce Secciones, la Autoevaluación y el Glosario.

Las Secciones indican los contenidos temáticos (medios) para alcanzar la meta, y también son las ramas iniciales de los ramales que parten del tronco. La Autoevaluación se puede considerar como una falsa rama ya que no apunta hacia la meta; propone once ejercicios para que el lector pueda verificar en qué medida comprendió lo leído. El Glosario precisa de manera compacta los términos considerados importantes y utilizados en el desarrollo del capítulo.

Las Secciones son a su vez metas intermedias que se alcanzan con los contenidos de las ramas del segundo nivel que llamaremos Sub-secciones. Las Sub-secciones también pueden pensarse como metas que se alcanzan con los contenidos de las ramas del tercer nivel. De esta manera van apareciendo contenidos que, más detalladamente, aportan al alcance de la meta. Si se nos permite la terminología, llamaremos a las ramas del tercer nivel Sub-sub-secciones. Las Sub-sub-secciones son a la Sub-sección lo que la Sub-sección es a la Sección. El mismo criterio se puede emplear para las Sub-sub-sub-secciones.

A modo de ilustración mostramos los contenidos de la Sección 3.2 señalados con la terminología usada.

3. Capítulo: Secciones cónicas
3.2. Sección: Lugar geométrico de R2
3.2.1. Sub-sección: Lugares geométricos simétricos
3.2.1.1. Sub- sub-sección: Simetría con respecto a una recta
3.2.1.1.1. Sub- sub-sub-sección: Simetría con respecto al eje y

3.2.1.1.2. Sub- sub- sub-sección: Simetría con respecto al eje x
3.2.1.2. Sub-sección: Simetría con respecto a un punto
3.2.1.2.1. Sub- sub- sub-sección: Simetría con respecto al origen de coordenadas

La figura 1 muestra el diagrama de árbol cuyo tronco y las sucesivas ramas se señalan con los identificadores que les otorga el índice.

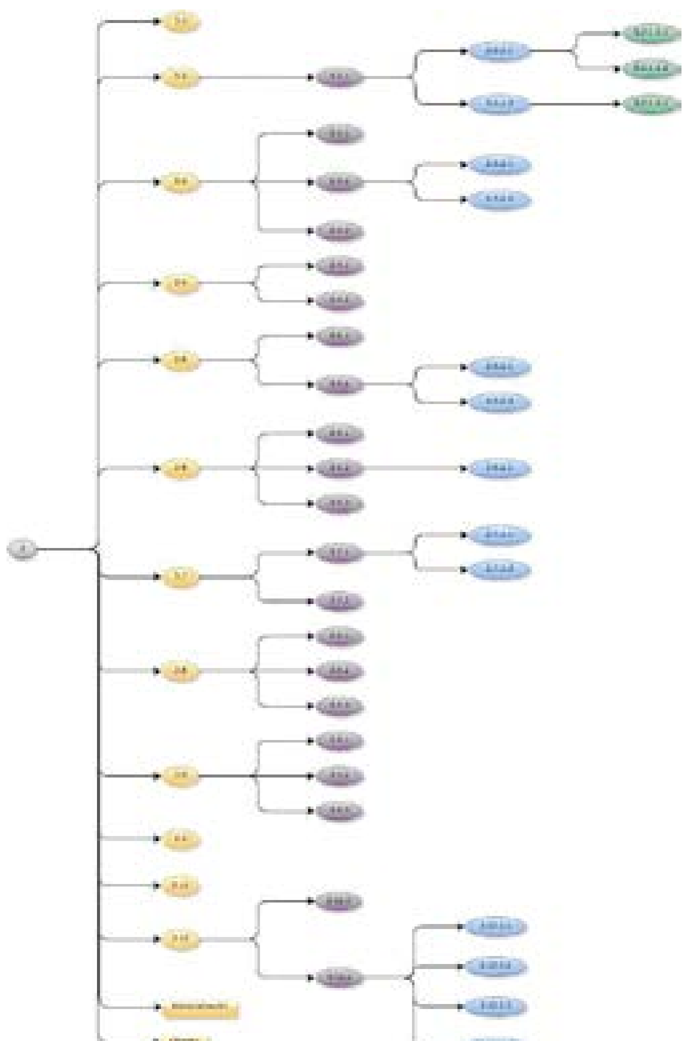

Figura 1. Diagrama de árbol de la organización de los contenidos

LAS SECCIONES

En el contexto de la experiencia, encaramos este trabajo para pensar las ayudas que el profesor debe brindar tanto como para que los estudiantes hagan una lectura reflexiva del capítulo como para que realicen las actividades pedidas. Desde esta preocupación nos interesa encontrar respuesta a preguntas, hechas al capítulo, tales como: ¿Qué objetivos plantea? ¿Cómo se presentan los contenidos? ¿Cómo aparecen las definiciones? ¿Cómo se diferencian las definiciones de las proposiciones demostrables? ¿Cómo se relacionan las secciones? ¿Qué muestran los ejemplos? ¿A qué apuntan los ejercicios? ¿Qué recursos y estrategias metodológicas se requieren para resolverlos?

La sección 3.1 es de presentación del tema tratado en el capítulo. Plantea un problema de aplicación a la ingeniería que es resoluble con los procedimientos que se desarrollan en las secciones posteriores. Comenta, con información pertinente, que las cónicas revisten un papel importante, tanto en la física en general, como en la ingeniería en particular. Formula los objetivos que transcribimos a continuación. En la sección 3.1 se puede leer:

Esperamos que al finalizar la lectura comprensiva y activa del presente capítulo, usted sea capaz de dar respuesta a problemas fundamentales de la geometría analítica como:

- Dada una ecuación de dos variables f(x;y) = 0, determinar el lugar geométrico (si existe) que representa en el plano cartesiano (x;y), lo cual significa estudiar la disposición relativa de los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación. A esto se le llama interpretar geométricamente una ecuación.
- Dadas las condiciones geométricas que debe reunir un conjunto de puntos que tenga coordenadas (x;y), determinar una ecuación donde todos los pares coordenados (x;y) la verifiquen. A esto se le llama interpretar algebraicamente una curva.
- Reconocer cada una de las cónicas, tanto por sus propiedades geométricas como por las analíticas. (Kozak et al., 2007, p. 164)

Al plantear los objetivos del capítulo el autor revela sus intenciones, lo que pretende que logren los usuarios del texto con su lectura y con las actividades que la acompañen. Los dos primeros son objetivos referidos a aprender un procedimiento. Un procedimiento que lleva a hacer una interpretación. El tercero es un objetivo referido a aprender conceptos y conocer propiedades. Falta un objetivo referido a desarrollar una actitud o valorar alguna cuestión. Los objetivos señalados expresan más las capacidades que el estudiante debe asumir que lo que puede aplicar, construir o crear.

Las restantes secciones están dedicadas al desarrollo de los contenidos. La numeración de las secciones determina la secuenciación de los contenidos y, en el árbol, se corresponde con la ubicación de las ramas del primer nivel de la primera hasta la última. Si bien necesariamente unas secciones deben preceder a otras, algún cambio en el orden es posible sin que ocasione dificultad para la lectura o estudio del tema. Esto otorga cierta facilidad para acomodar la lectura a diferentes propuestas. De todos modos, así como quien trepa a un árbol sabe que para alcanzar una rama debe apoyarse en otra anterior, el lector del capítulo debe tener en cuenta que para leer una sección se requiere conocer alguna anterior.

Los contenidos aparecen en definiciones, demostraciones, figuras, ejemplos y ejercicios. Las palabras teorema, lema, proposición, procedimiento no se encuentran en el texto, sí la palabra regla pero en sólo dos lugares. Esas palabras generalmente aparecen en los textos que enfatizan la estructura sistemática de la matemática y la deducción. En cambio es, la que consideramos, una presentación que no acumula enunciados y reglas para que los contenidos se distribuyan con continuidad. Está adaptada a la audiencia a la que se dirige, la lectura está facilitada por las figuras y requiere del lector manejo del lenguaje algebraico.

Una entre otras clasificaciones posibles, ha señalado tres tipos de contenidos diferentes: los contenidos verbales (lo que el alumno aprende a decir), los contenidos procedimentales (lo que el alumno aprende a hacer) y los contenidos actitudinales (las formas en que aprende a comportarse). (Pozo, 1999)

Las definiciones y otros contenidos conceptuales (verbales) están destacados en espacios rectangulares sombreados. Los contenidos procedimentales se muestran generalmente con los ejemplos y se da en los ejercicios la posibilidad de aplicarlos.

Los treinta ejemplos están ubicados en recuadros y se identifican como “Ejemplo n” con $1 \le n \le 30$. Los 32 ejercicios se nombran como “Ejercicio 3-n” con $1 \le n \le 32$. Las figuras, que ilustran los contenidos, se designan como “Figura 3-n” con $1 \le n \le 87$. Si bien cada sección cuenta con ejemplos, ejercicios y figuras propios, la nomenclatura indicada, que los numera del primero al último, no acuerda con esa circunstancia.

El lenguaje matemático echa mano a varios modos de expresar un contenido. Así ocurre en el aula, en los libros, en los archivos magnéticos y en otros soportes. Para Janvier (1987) los principales modos de representación son cuatro: descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. El capítulo utiliza de manera profusa tres de estos modos. No aparecen tablas pero si un cuadro que resume las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de segundo grado incompleta represente una cónica.

LOS TEMAS IMPORTANTES

Para determinar la importancia relativa que el autor le da a los temas que trata nos apoyamos en la siguiente cita:

> Autores como Gimeno (1995) o Apple (1989) indican que, en las investigaciones relacionadas con los libros de texto, es necesario analizar tanto la posición de las diferentes unidades como la cantidad de páginas dedicadas a cada una de las unidades. Según estos autores, esta información permite establecer la importancia que dan los autores o el grupo editorial a la unidad que se estudia. (Serradó Bayés y Azcaráte Goded, 2003, p. 70)

De acuerdo con esta indicación observamos en la tabla 1 que las secciones que ocupan un mayor número de páginas son: 3.6 Elipse, 3.7 Parábola, 3.8 Hipérbola y 3.12 Formas paramétricas de las cónicas. El autor, en su desarrollo, da mayor importancia a las cónicas propias, sus elementos y sus ecuaciones incluidas las paramétricas.

En sentido contrario, observamos que las secciones que ocupan menos páginas son: 3.1 Ingeniería y cónicas, 3.4 Superficie cónica y curvas cónicas, 3.10 Excentricidad y definición general de cónica y 3.11 Algunas propiedades de las cónicas y sus aplicaciones. El autor otorga menor importancia a las definiciones geométrica y general y a las aplicaciones.

La cantidad de páginas correlaciona positivamente con la cantidad de ejercicios y con la cantidad de ejemplos (corr(cantidad de páginas; cantidad de ejercicios) = 0,60 y corr(cantidad de páginas; cantidad de ejemplos) = 0,74), por lo que las cantidades de ejercicios y ejemplos también muestran la importancia que los autores asignan a cada sección.

La tabla 1 también contiene esas cantidades

Sección	Páginas	Ejercicios	Ejemplos
3.1	1,6	0	0
3.2	5,9	0	5
3.3	4,8	2	4
3.4	2,0	0	0
3.5	7,8	8	5
3.6	8,0	5	3
3.7	9,7	3	4
3.8	8,0	4	2
3.9	4,9	1	1
3.10	2,7	1	2
3.11	2,1	4	0
3.12	9,5	4	4
Autoevaluación	2,7	11	0
Glosario	1,6	0	0
Total	71,3	43	30

Tabla 1. Cantidad de páginas, ejercicios y ejemplos por sección

LOS EJERCICIOS

El enunciado

Varios autores, entre otros Pano, Fridman, Rodil Martínez, Torre y Zion (2011), distinguen entre ejercicios y problemas. En consonancia con el autor del capítulo no haremos aquí esa distinción y utilizaremos el término ejercicios para ambos conceptos.

Según el relato del enunciado los ejercicios pueden ser: (a) de relato de una realidad, (b) de relato de tono realista, (c) de relato meramente matemático y (d) de relato de investigación matemática. Esta clasificación no es exhaustiva pero contempla a los ejercicios que generalmente aparecen en los libros de texto de matemática. Definimos y ejemplificamos estos modos de relato como sigue:

a) Relato de una realidad

El enunciado invita al lector a actuar concretamente. Plantea la resolución de un problema real que requiere el manejo de conceptos y procedimientos matemáticos y la realización de actividades como medir, estimar, obtener información, diseñar, dibujar, modelar o decidir.

Ejemplo propio: En un sector de Facultad un pasillo separa, a un lado y al otro, las aulas. Se trata de construir en el piso de ese pasillo una cadena de elipses tangentes dos a dos y tangentes a las paredes. La parte del piso interior a las elipses llevará un embaldosado diferente al de la parte exterior. Hay que determinar la cantidad de elipses de la cadena, dibujarlas sobre el piso, calcular la mínima cantidad de baldosas de cada tipo a usar y el costo de realización del trabajo de embaldosado.

b) Relato de tono realista

El enunciado lleva al lector a aplicar los contenidos del texto a una situación concreta, descrita en lenguaje cotidiano. La resolución del ejercicio implica una traducción del enunciado al lenguaje formal de la matemática. Se trata de simular una cuestión con visos de realidad. En el enunciado se encuentran todos los datos necesarios para resolver el ejercicio.

Ejemplo: Ejercicio 3.26 de Kozak et al (2007)

> Para construir la base circular de un tanque de forma cilíndrica, se replantean en el terreno tres puntos cuyas coordenadas, expresadas en metros con respecto a un sistema de referencia local, son A(5;3), B(6;2) y C(3;-1). Se pide:
> a) Determinar una ecuación de la circunferencia de la base y expresarla en la forma general de la ecuación de segundo grado.
> b) Si la altura del tanque es de 2,60 metros, ¿cuál es su volumen?
> c) Si en ese tanque se quieren colocar 34,12 toneladas de un fluido cuyo peso específico es de 1,08 kg/dm3, ¿cuál debería ser la altura mínima del tanque para recibir la totalidad de dicha carga?
> (Kozak et al, 2007, pp. 219-220)

c) Relato meramente matemático

El enunciado hace referencia a objetos matemáticos como ejes coordenados, ecuación, parábola, tangente, lado recto u otros. La resolución del ejercicio requiere hacer cálculos y utilizar conceptos y procedimientos que el texto contiene como contenidos. La respuesta puede ser pedida en algún modo de representación pertinente.

Ejemplo: Ejercicio 3.20 de Kozak (2007) et al:

¿Para qué valores de t la recta $y = \frac{1}{3}x+t$ corta la hipérbola $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$? (Kozak et al, 2007, p. 210)

d) Relato de investigación matemática

El enunciado está relacionado con contenidos matemáticos de cierta complejidad y la resolución del ejercicio requiere desplegar estrategias que incluyen procesos como conjeturar, probar, demostrar, encontrar, representar, argumentar o mostrar un contraejemplo. Pretende del lector la realización de una actividad próxima a la propia de la matemática.

Ejemplo propio: Represente, en el sistema habitual de ejes coordenados, las cónicas pero utilizando en su definición, como lugar geométrico, la distancia de Minkowski en lugar de la euclídea.

La Tabla 2 muestra la cantidad de ejercicios por modos de relato que contiene el capítulo.

Modos	Ejercicios
A	0
B	4
C	28
D	0

Tabla 2. Distribución de los modos de relato.

Conocemos dos posiciones con respecto a cómo ubicar la matemática en el contexto de la formación del ingeniero. Una considera que el estudiante tiene primero que aprender esta ciencia para luego tenerla como herramienta para abordar los estudios propios de la especialidad elegida. La otra considera que los contenidos matemáticos deben presentarse subordinados al problema ingenieril y que las prácticas propuestas deben acercar al alumno a las formas del ejercicio profesional. Sabemos también que estas posiciones no aparecen en estado puro tanto en las aulas como en los textos.

Apreciamos sobre la base de la distribución de los modos de relato de los ejercicios, representada con la Tabla 2, que el capítulo está más cerca de la primera posición que de la segunda. Los siete octavos de los ejercicios son de relato meramente matemático, el octavo restante corresponde a ejercicios de relato de tono realista, no hay ejercicios de relato de una realidad ni tampoco de relato de investigación matemática.

Las demandas cognitivas

Fernando Acero, en su Tesis Doctoral, nos comenta sobre la investigación QUASAR:

> Una investigación que abarca un período de cinco años (1990-1995) en escuelas medias de Estados Unidos es (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning), conocida por la sigla QUASAR (Brändstrom 2005, Henningsen y Stein 1997, Stein y Smith Schwan 1998), establece una clasificación de las demandas cognitivas de los ejercicios según que su resolución exija: (a) memorización, (b) procedimientos desconectados de conceptos, (c) procedimientos conectados con conceptos, (d) el ejercicio efectivo de la matemática. Según QUASAR, los ejercicios que demandan memorización implican la reproducción de hechos, reglas o expresiones previamente aprendidas; los procedimientos inconexos son los que requieren de un algoritmo que se aplica sin ambigüedad y están orientados a producir una respuesta correcta; los procedimientos significativos requieren de alguna elección de procedimientos alternativos y reclaman su conexión con los conceptos o definiciones centrales; finalmente, el ejercicio efectivo de la matemática exige un pensamiento complejo no algorítmico para ser aplicado a una situación cuya resolución no está sugerida por el ejercicio o actividad propuesta, necesita de una regulación autónoma del estudiante en el control de los procedimientos y la satisfacción de las restricciones (Acero, 2014, p. 9).

Para clasificar los ejercicios del capítulo según el criterio QUASAR, uno de los autores de esta ponencia trabajó separadamente con otros dos siguiendo los criterios de Cruz Ampuero (2014). En cada trabajo se asignó la letra de una clase a cada ejercicio. En ambas oportunidades hubo coincidencia en la asignación. De estos trabajos resultó la tabla 3.

Clase	Ejercicios
A	0
B	16
C	15
D	1

Tabla 3. Distribución de las clases QUASA

La Tabla 3 muestra que hay igual número de ejercicios de baja demanda cognitiva (clases A y B) y de alta demanda cognitiva (clases C y D). No encontramos ejercicios que para su resolución exijan sólo memorización. Algunos ejercicios del capítulo se resuelven con la aplicación de un algoritmo o la utilización de un procedimiento mostrado en un ejemplo. Otros necesitan de la combinación de recursos como la apelación a un gráfico, la aplicación de fórmulas previamente conocidas o encarar un procedimiento general con conexiones cercanas a ideas conceptuales subyacentes.

EL CAPÍTULO Y LAS CONCEPCIONES SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA MATEMÁTICA QUE LO SOSTIENEN

En un intento de atribuir las concepciones sobre el aprendizaje y sobre la matemática que el capítulo sugiere, nos inspiramos en las ideas que González Astudillo y Sierra Vázquez (2004) utilizan en su metodología de análisis de libros de texto. Estos autores clasifican los manuales en tres perfiles según la dominante entre tres modalidades: expositiva, tecnológica y comprensiva. Adoptamos estas modalidades con las modificaciones a sus significados que siguen:

Expositivos. Son textos con una visión de la matemática como acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva, en la que, partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen algunos pocos ejemplos. Enfatizan el significado matemático de los conceptos y la lógica de los procedimientos matemáticos. Sus contenidos son eminentemente conceptuales. El carácter formal de los contenidos presenta a la matemática como un cuerpo estático, impidiendo su uso en otros contextos y el desarrollo de la creatividad. Llevan a un aprendizaje de tipo memorístico y a fomentar la repetición de conceptos sin la debida comprensión. Están emparentados con la primera cara de la moneda matemática descrita up supra.

Tecnológicos. Son textos que conciben la matemática como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas y destrezas para pensar los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones. Son concisos en las definiciones de los conceptos para luego exponer los procedimientos en variados ejemplos. Ponen el énfasis en las reglas y los procedimientos aunque los organizan, junto con los conceptos, en una forma lógica. Sus contenidos son principalmente procedimentales. Otorgan a la matemática un carácter práctico. Proponen una ejercitación abundante para afianzar los procedimientos expuestos. La aplicación repetitiva de las reglas y procedimientos favorece el aprendizaje memorístico y coloca al lector en un lugar de sujeto reproductor.

Comprensivos. Son textos que ven la matemática como un cuerpo de conocimientos apropiado para interpretar la realidad, entendida ésta en sentido amplio. La presentan como objetos de aprendizaje que, además de poseer significado, tienen la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes. Presentan actividades que, para realizarlas, requieren de la experimentación. El aprendizaje de la matemática se logra con la construcción de redes conceptuales que la conectan con otros conceptos partiendo de situaciones propias de la realidad. Subyace la concepción de un aprendizaje significativo relevante. Mantienen una relación de afinidad con la segunda cara de la moneda matemática.

Los contenidos del capítulo están organizados de una manera lógica razonablemente representada por un diagrama de árbol. Las ideas expuestas aparecen aplicadas en los ejemplos. Se nota un énfasis en el hacer procedimental dirigido al manejo algebraico, al cálculo numérico y a la representación gráfica. Formula una matemática práctica que utiliza en los desarrollos y ejemplos, y alcanza para resolver los numerosos ejercicios propuestos. Por ello ubicamos al capítulo entre los textos Tecnológicos.

CONCLUSIONES

En nuestra opinión, para las prácticas de enseñanza habituales hoy en las universidades argentinas, en particular la Universidad Tecnológica Nacional, donde nos desempeñamos, el capítulo analizado es un texto adecuado para ser leído por los alumnos que comienzan sus estudios de ingeniería y que deben encarar el tema Secciones Cónicas. Teniendo en cuenta la importancia que el autor le da a los temas y el relato del enunciado de los ejercicios concluimos que el profesor que lo adopte como material de estudio en su curso, deberá acentuar el carácter ingenieril de las seccione cónicas. Por lo anteriormente señalado categorizamos el texto como tecnológico. Observamos que el capítulo no hace mención de las tecnologías de información y de la comunicación y de las posibilidades que ofrecen para ayudar al aprendizaje de lo tratado. El autor no indica un software especializado que permita el manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulación de la matemática involucrada. El contenido preponderante en los ejemplos y ejercicios propone, tareas a los lectores, en sintonía con las prácticas tradicionales de enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acero, F. (2014). *Libros de texto de matemática en carreras de ingeniería:* Un análisis estructural. Tesis doctoral. Repositorio Digital San Andrés. Recuperado de http://repositorio.udesa.edu.ar/jspui/handle/10908/2493 el 7 de noviembre de 2017.

Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Recuperado el 22 de febrero de 2017 de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2953

Courant, R. y Robbins, H. (1979)- *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

Cruz Ampuero, G. (2014) *La Demanda Cognitiva como Oportunidad de Aprendizaje en el Área Matemática.* Slideshare disponible en https://docs.google.com/document/d/1zTvdClgBslqDwz9xPdGkR5eGt_ej0uX24x-Gj0WzLok0/edit.

Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathemátiques. Une réalisation ans tout le cursus primaire.* https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/document. Recuperado el 22 de febrero de 2017.

Dubois, M. E. (2005). *El proceso de lectura: de la teoría a la práctica.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Gonzalez Astudillo, M. T.; Sierra Vázquez, M. (2004) Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Críticos en la Enseñanza Secundaria en España durante el Siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, V. 22 N. 3, p. 389-408. Recuperado el 7 de noviembre de 2017 de https://ddd.uab.cat/record/1672
Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kozak, A. M.; Pastorelli S.; Vardanega, P. (2007) *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal.* McGraw-Hill Interamericana.

Kuntzmann, J. (1969) *¿A dónde va la matemática? Problemas de la enseñanza y la investigación futuras.* Buenos Aires: Siglo XXI.

Litwin, E. (2008). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la educación superior.* Buenos Aires: Paidós.

Moreno, M. y Azcárate. C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2), 265-280. Recuperado de http://repositori.udl.cat/bitstream/handle/10459.1/31328/21935-21859-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y el 16 de marzo de 2017.

Narro Ramirez, A. (1997). Investigación sobre la concepción de la Matemática en las ciencias sociales en la

UAM – Xochimilco. *Política y Cultura*, n° 9, pp. 249 – 280. Universidad Autónoma Metropolitana. México. Recuperado de: http://www.redalyc.org/html/267/26700914/ el 7 de noviembre de 2017.

Pano, C. O.; Fridman, C.; Rodil Martínez, A.; Torre, V.; Zion, V. (2011). Apuntes sobre innovación en educación universitaria. Buenos Aires: Ediciones Rosel.

Pozo, J. (1999). Aprendizaje de contenidos y desarrollo de capacidades en la educación secundaria. En: Coll, C. (Coord.) *Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria.* Barcelona: Editorial Horsiri.

Serradó Bayés A.; Azcaráte Goded M. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática,* V.15, N. 1, pp. 67-98.

Thompson, A. (1992). Teachers' belief and conceptions: A synthesis of research. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Vilar, J.; Gomez, F.; Tejero, M.; (1997). *Las siete nuevas herramientas para la mejora de la calidad.* Madrid: FCEditores.