

# LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA DESDE UNA CONCEPCIÓN DE INVARIANTES Y DE PROBLEMAS MATEMÁTICO—PROFESIONALES

**Reinaldo García Blanco, Guillermo Pérez Tauriñán,  
Alberto González Rodríguez**

Universidad de la Isla de la Juventud  
“Jesús Montané Oropesa”. Cuba.

rgarciab@cuij.edu.cu, gperez@cuij.edu.cu, aglez@cuij.edu.cu

RESUMEN	ABSTRACT
<p>El trabajo forma parte del proyecto Metodología para fomentar un aprendizaje desarrollador de la Matemática. El mismo permite ilustrar cómo se puede estructurar una asignatura de Matemática sobre la base de invariantes, en aras de garantizar un proceso enseñanza-aprendizaje activo, significativo y diferenciado, a través del protagonismo estudiantil, el trabajo independiente e investigativo de los alumnos, con énfasis en la aplicación de esta ciencia a la solución de problemas profesionales y, en particular, como hilo conductor, los problemas matemático-profesionales para una carrera de perfil no matemático; todo lo cual ha de contribuir a un proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador.</p>	<p>The work is part of the Methodology project destined to promote learning developer in Mathematics. It allows to illustrate how Mathematics can be structured on the basis of invariants, in order to guarantee an active, significant and differentiated teaching-learning process, through the student protagonism, the independent and investigative work of the students, with emphasis in the application of this science to the solution of professional problems and, mathematical-professional problems for a non-mathematical profile career; in order to reach a teaching-learning developer process.</p>
PALABRAS CLAVE:	KEYWORDS:
<p>Invariantes - problemas profesionales - problemas matemático-profesionales.</p>	<p>Invariant - professional problems - mathematical-professional problems.</p>

## INTRODUCCIÓN

La humanidad actual demanda de profesionales con las cualidades requeridas, para enfrentar con éxito los problemas de su entorno de forma creadora. A lo largo de la historia, la educación ha desempeñado un papel decisivo en el desarrollo social y, en particular, en la formación del hombre, el creciente desarrollo al que nos enfrentamos en la actualidad ha generado nuevas políticas en correspondencia con los retos que impone el avance acelerado de la ciencia y la tecnología, lo cual impone, entre otras prioridades, la preparación de los profesionales que egresan de los centros universitarios. Por eso está justificado el empeño, siempre mayor, por su mejoramiento.

El desarrollo de un proceso enseñanza-aprendizaje tradicional, no responde a la formación actual de un profesional competente y de perfil amplio, esto exige de un proceso que tribute al desarrollo integral de la personalidad de los estudiantes.

Se necesita que la propia enseñanza en la educación superior y, en especial la de las matemáticas, motiven a los estudiantes a aprenderla. La Matemática, por sus características y posibilidades educativas, puede contribuir a satisfacer las demandas de preparación del profesional competente y de perfil amplio para su inserción en el mundo contemporáneo.

Existen diferentes investigaciones que reflejan que una enseñanza de las ciencias bien estructurada, motiva a los estudiantes a su estudio (Zilberstein Toruncha, 2000). Por otro lado un proceso de enseñanza-aprendizaje, donde el docente, juegue el papel protagónico no proporciona un desarrollo del estudiante para enfrentarse a su entorno social. El desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje no se puede admitir que el profesor continúe siendo el protagonista por función frente a un estudiante pasivo, el profesor informador y el estudiante oyente tendrán que ser substituidos por el profesor animador y por el alumno investigador. Citamos como enseñanza desarrolladora a, “...el proceso sistémico de transmisión de la cultura en la institución escolar en función del encargo social, que se organiza a partir de los niveles de desarrollo actual y potencial de los y las estudiantes, y conduce el tránsito continuo hacia niveles superiores de desarrollo, con la finalidad de formar una personalidad integral y autodeterminada, capaz de transformarse y de transformar su realidad en un contexto histórico concreto”(Castellanos Simons, Castellanos Simons, Llivina Lavign, & Silverio Gómez, 2001)

En el contexto anterior, a los docentes e investigadores en Educación Matemática, se les plantea como problemática universal la de encontrar vías que garanticen un adecuado aprendizaje de su ciencia que les permita a los profesionales enfrentar los retos de manera creadora y resolver los múltiples problemas a los que tendrán que buscar soluciones en su vida profesional.

El proceso de enseñanza-aprendizaje responde, en forma general, al encargo social, que como problema emana de la sociedad y, a cuya solución, se encamina dicho proceso. Uno de los problemas cruciales que se le encarga a nuestras universidades es la formación de un profesional de perfil amplio, competente que pueda trabajar y vivir en la sociedad que los forma, y que revierta sus frutos mediante un desempeño exitoso de sus funciones. Este compromiso requiere del desarrollo de un proceso estructurado de modo que tenga presente el perfil profesional del futuro graduado, donde se coloque al estudiante, siempre que sea posible, en contacto directo con el objeto de la profesión o con un modelo del mismo que se adecue a las condiciones del contenido de enseñanza que se trabaje en ese momento, en consonancia con los problemas docentes que emanan del diseño de la carrera.

Como parte del proyecto Metodología para fomentar un aprendizaje desarrollador de la Matemática en la Universidad de la Isla de la Juventud “Jesús Montané Oropesa”, los autores se propusieron estructurar el proceso enseñanza - aprendizaje de la Matemática sobre la base de invariantes, que permitan minimizar el tiempo de exposición teórica del docente y aumentar el papel

protagónico del estudiante en el tratamiento de las variantes: obtención del resto de los elementos teóricos que se infieren de ellos (derivación de la teoría); solución de los problemas matemático-profesionales. Lo anterior se ilustrará en la asignatura Matemática Superior I de la carrera Licenciatura en Contabilidad y Finanzas.

## DESARROLLO

Todo proceso de enseñanza - aprendizaje debe caracterizarse por la actividad y la comunicación, donde el aprendizaje sea logrado de manera que involucre a cada estudiante en el proceso de obtención de su conocimiento y en participación cooperada con el grupo bajo la guía del profesor, que es quien orienta este aprendizaje.

La estrategia de trabajo se centra en poner al sujeto de aprendizaje en condiciones de que, mediante un proceso socializado, sea capaz de aplicar los elementos teóricos tratados por el docente y asimilado por los estudiantes, en la obtención de nuevos elementos de la teoría, así como en la aplicación de la ciencia en cuestión, en aras de dar respuesta a problemas de su futuro entorno profesional, o que se vinculen a las asignaturas del ejercicio de la profesión, en un acercamiento gradual a su objeto, donde la solución al problema planteado haga necesario el uso de los requeridos conocimientos tratados (matemáticos en nuestro caso).

En naturaleza se exige recorrer el camino lógico del desarrollo de la teoría, que transita de hechos y fenómenos a los núcleos teóricos o invariantes y, de estos, a la derivación de la teoría (elementos teóricos que se infieren de los invariantes) y a sus aplicaciones (tanto de los núcleos teóricos como de la derivación de la teoría). (Álvarez Zayas, 2001). Estos dos últimos aspectos constituyen, las variantes de los invariantes.

Asumimos la categoría problema a partir de lo expresado por (Álvarez Zayas, 1999), quien en esencia reconoce la misma como una situación inherente al objeto, que crea en el sujeto la necesidad de darle solución. Teniendo en cuenta la naturaleza del objeto, pudieran inferirse como problemas matemáticos aquellos que planteen una necesidad dentro del objeto matemático, o problemas profesionales a aquellos que expresen una dificultad presente en el objeto de la profesión; se conjugan estas dos categorías, en lo que se ha dado en llamar problemas matemático-profesionales, donde el nuevo concepto representa la intersección de los problemas matemáticos y los problemas profesionales, comprendiendo dentro de esta categoría aquellos problemas profesionales que puedan ser resueltos mediante el empleo de los métodos y procedimientos que se estudian en las asignaturas de la disciplina Matemática. Aquí se integran dos ciencias, pues a través de su empleo se potencia la profesión, al tratar con su objeto y, a la vez, se están profundizando los conocimientos matemáticos a través de las necesidades que emanan de los problemas matemático-profesionales, los cuales entendemos como:

Problemas empleados en el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática y que son inherentes a la profesión, que requieren para su caracterización, interpretación, predicción y toma de decisiones, del modelaje mediante funciones con características específicas, determinadas por el objeto que se modela y que se precisan a través de un concepto matemático inherente al contenido de la disciplina, en los que su solución requiere de la aplicación de los métodos y procedimientos matemáticos correspondientes a los contenidos de ésta.

Este concepto constituye un hilo conductor que permite el trabajo de integración de la Matemática con el perfil profesional y, en particular, con el proceso de formación de habilidades, capacidades y valores profesionales a través del desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática.

Los problemas matemático-profesionales cumplen la función docente de permitir dar estructura a una asignatura del ciclo básico, de modo que contribuya a la formación de los modos de actuar y pensar del futuro profesional y permita un conocimiento gradual del objeto de la profesión. Los problemas matemático-profesionales deben utilizar el contenido del objeto de la profesión, o un acercamiento al mismo (simplificación, abstracción), en correspondencia al nivel del conocimiento que del objeto se tenga en esos momentos y los recursos matemáticos de que se disponga o también de aquellos cuyo estudio se desea motivar.

Lo anterior significa que estos problemas pueden servir para utilizar un contenido matemático ya estructurado y aplicarlo a la búsqueda de su solución, o para motivar el aprendizaje de un nuevo contenido matemático. Pero en ambos casos hay que tener presente el dominio del objeto profesional que posee el estudiante, limitarse a la cultura del sujeto, pues se supone que en la mayor parte de los casos el conocimiento sobre el contenido del objeto de la profesión a trabajar es incipiente y debemos buscar un acercamiento paulatino al mismo, que tendrá un nivel de profundidad acorde al año semestre que este se encuentre cursando. Aunque pueden ser tratados algunos elementos sencillos del contenido profesional que, aunque el estudiante todavía no los conozca por las asignaturas del ciclo del ejercicio de la profesión, él pueda recibir una primera información, al unísono del tratamiento del contenido matemático objeto de estudio.

El tratamiento de los problemas matemático-profesionales, en el proceso docente educativo, permite el vínculo de la escuela con la vida, se educa a la vez que se desarrolla el proceso de instrucción.

Los problemas matemático-profesionales toman como punto de partida algún problema profesional o de las asignaturas del ciclo del ejercicio de la profesión. Este problema se manifiesta en un objeto, que mediante abstracción puede ser modelado usando funciones matemáticas, a través del cual se puede dar solución al problema profesional mediante la aplicación de los métodos matemáticos resolutivos del modelo obtenido, siendo el aspecto anterior el objetivo de la

actividad. Aquí se establece una contradicción dialéctica entre el contenido profesional presente en el problema y el objeto matemático modelado, donde la intencionalidad de la obtención de la solución se precisa a través del objetivo.

Este problema profesional se deriva como problema docente, presente en el modelo matemático. Dada la dificultades que el estudiante presenta para dar respuesta a lo planteado en el objetivo, del objeto se abstraen los elementos matemáticos con que se opera y es lo que constituye el contenido, el que en interacción dialéctica con el objetivo determinan el método. La contradicción dialéctica entre la situación aspirada, recogida en el objetivo, y la situación actual, presente en el contenido, es la que determina que mediante el método se enriquezca la teoría y se pueda resolver el problema presente en el contenido. Esta es una relación entre el objetivo, contenido y método.

Los problemas matemático-profesionales se derivan desde la carrera, donde pueden ser tratados problemas más ricos en el nivel profesional y se van simplificando y abstrayendo a los diferentes subniveles de sistematicidad del proceso (disciplina, tema, clase, tarea docente) y también en un sentido horizontal en los años; pero en el propio desarrollo del proceso estos problemas se van integrando y el estudiante va adquiriendo los modos de actuar y pensar de la profesión.

Todo este proceso permite que a la vez que se instruya se eduque, pues el estudiante en la misma medida que construye sus conocimientos va formando valores, al conocer la importancia que para la profesión tienen los contenidos estudiados. Él modela objetos del ámbito profesional y esto le permite profundizar en la ciencia a través del empleo de las matemáticas, a la par que desarrolla valores como la creatividad, independencia, tenacidad, responsabilidad, solidaridad, laboriosidad, entre otros.

En el empleo de los problemas matemático-profesionales hay tres elementos fundamentales, que en el orden didáctico deben ser atendidos, y que son:

- El concepto función, como objeto de trabajo de la Matemática.
- La habilidad modelar, como aquella que mejor tributa desde la disciplina Matemática, a la formación de los modos de actuar y pensar del futuro egresado en Contabilidad y Finanzas.
- Los métodos y procedimientos matemáticos que se estudian para dar solución al modelo.

Las funciones reales de una variable real, que se estudian en nuestro programa de la asignatura Matemática Superior I, pueden constituirse desde un inicio como el modelo matemático que expresa de manera esencial, las condiciones que se dan en un objeto específico, utilizándose en algunos momentos de forma hipotética y otras describiendo un proceso real traído al aula. Cobra especial importancia la representación gráfica de las mismas, por la utilización que de ella se

hace en el terreno profesional, debiendo destacarse ambas como formas de representar el mismo objeto. En otras asignaturas de la disciplina se emplean como modelo funciones de dos o más variables o sistemas de funciones según las características del contenido tratado.

Para llegar a este nivel de esencia se requiere gran dominio de los contenidos de la ciencia, pero también del contenido matemático que se utilice. Este proceso, de construir y expresar mediante lenguaje matemático las relaciones del objeto de la profesión, es el proceso de modelación.

La habilidad modelar se concibe aquí como aquella que permite, mediante la utilización de un modelo matemático, predecir resultados y/o tomar decisiones, sin utilizar para nada al objeto real en estudio. Constituye el modelo así obtenido el puente entre lo profesional y la Matemática, estableciéndose entre ellos una interacción dialéctica, de modo que se oponen, pero no es posible la existencia de uno sin el otro.

La habilidad modelar como rectora para las carreras de Ingeniería Militar, concibe tres niveles de utilización en la habilidad modelar. El primer nivel se refiere a la utilización de modelos ya conocidos, el segundo a la adaptación de modelos conocidos a nuevos contextos y el tercer nivel se refiere a la creación de modelos propios. (Rodríguez, 1991)

Estos tres niveles se dan en el tratamiento de los problemas matemático-profesionales en las asignaturas de la disciplina Matemática para la carrera de Licenciatura en Contabilidad y Finanzas. Los mismos comprenden los niveles de asimilación reproductivo, productivo o aplicativo y creador.

Los métodos y procedimientos matemáticos, que se estudian en estas asignaturas, constituyen pilares básicos en las aplicaciones de las Matemáticas Superiores en general y en particular para el tratamiento de los problemas matemático-profesionales en la asignatura Matemática Superior I. Estos se establecen como herramientas fundamentales para el trabajo profesional y para la profundización en otros contenidos, tanto de la ciencia matemática como de las otras áreas.

Los métodos y procedimientos señalados anteriormente, son obtenidos básicamente por el estudiante en el proceso de derivación de la teoría, lo que le confiere, según los actores, una mayor solidez al conocimiento adquirido, pues es basado en la actividad de búsqueda personal relacionado con sus necesidades profesionales. Con posterioridad estos métodos y procedimientos se han de consolidar y sistematizar a través de una amplia ejercitación en que se desarrollan habilidades en su empleo y se aplican a las soluciones de problemas profesionales.

Ello permite activar y aplicar el conocimiento matemático al perfil de la carrera, a la profesión, lo que constituye el verdadero sentido que debe tener la formación matemática en una carrera de perfil no matemático.

El sistema de conocimientos matemáticos así generado será profundo, duradero y que se puede transferir a nuevas situaciones, permitiendo generar nuevos conocimientos y relaciones, es decir, aporta un aprendizaje eficiente, caracterizado por las posibilidades que brinda al futuro profesional de tener en sus manos una herramienta con la cual pueda solucionar los problemas que se le planteen en la práctica con mayor profundidad.

La estructuración del proceso de enseñanza - aprendizaje en torno al tratamiento de estos problemas matemático-profesionales permitirá desarrollar un aprendizaje que tenga un significado para el futuro profesional, esto es, lograr un aprendizaje significativo dado por la relación de los nuevos conocimientos con los conocimientos anteriores (significatividad conceptual); de lo nuevo con la experiencia cotidiana, del conocimiento con la vida, de la teoría con la práctica (significatividad experiencial) y entre los nuevos contenidos con el mundo afectivo-motivacional del sujeto (significatividad afectiva), por cuanto se trata de un estudiante que tiene determinados intereses por los contenidos de la profesión, ya que realizó una elección con cierto nivel de autodeterminación.

Todos estos elementos apuntan hacia la aplicación de una educación desarrolladora, donde el aprendizaje logrado tiene significación para el estudiante y le permite trascender, con el conocimiento adquirido, hacia nuevas situaciones, dando la posibilidad de que, mediante la creatividad lograda, se puedan innovar y tratar los problemas bajo otra óptica, con una mayor eficiencia.

En la carrera de Contabilidad y Finanzas se trabajó en desarrollar el pensamiento de los estudiantes, para ello se garantiza una adecuada planificación y estructuración sistémica del proceso de enseñanza-aprendizaje, partiendo de que el profesor juegue el papel protagónico en un tiempo lectivo inferior al 20 % de las horas del programa, dedicadas esencialmente a las conferencias, en las mismas se trabajará los invariantes (núcleos teóricos). La clasificación de las clases (formas organizativas de la actividad académica) se debe realizar en función del objetivo a alcanzar, y que la conferencia es la clase que persigue el objetivo de que los estudiantes comprendan el contenido de la ciencia (García Blanco, 1997).

El profesor debe desarrollar el resto del programa sobre la base de la derivación y aplicación de la teoría (variantes) a partir del planteamiento y la solución de problemas (matemáticos, profesionales o matemático-profesionales) en los que el estudiante desempeñe un papel protagónico. Se desarrollará el sistema de clases fundamentalmente en forma de talleres, seminarios y clases prácticas, con el empleo de los métodos problémicos y de las técnicas participativas, llevando a los estudiantes a trabajar, la mayor parte del tiempo posible, en la zona de desarrollo próxima, en aras de desarrollar sus potencialidades intelectuales a través de un aprendizaje significativo y desarrollador.

Para la solución de los diferentes problemas profesionales se asume el punto de vista de L. S. Vigotsky: la enseñanza conduce al desarrollo, lo cual significa plantear el problema de la identificación de las condiciones que garanticen un mayor efecto sobre el desarrollo (Talizina, 2001). En la carrera, se parte, como se había hecho referencia, del concepto de función como célula, por su prioritaria contribución a la modelación de los fenómenos y procesos de la realidad y, en particular, de los fenómenos y procesos económicos. La contradicción dialéctica que ella encierra es la que se da entre los conceptos de variable independiente y variable dependiente, la que deviene en fuente motriz del desarrollo de esta ciencia. Estos enfoques epistemológicos son válidos para toda la disciplina matemática; pero en particular, en un tema específico se han de revelar nuevas células y contradicciones dialécticas particulares, válidas solo para ese tema, lo que se ejemplificará a continuación.

En el cálculo diferencial unidimensional en particular, se precisa como célula el análisis del comportamiento de las funciones reales de variable real en una vecindad de un punto o en un conjunto dado de valores. La contradicción dialéctica que encierra esta célula, es la que se da entre los conceptos de límite y derivada. El límite aporta el valor cuantitativo aproximado de la función en una vecindad reducida del punto, mientras que la derivada revela el comportamiento cualitativo de ella en la referida vecindad (monotonía, extremos locales, concavidad). Por ello los invariantes de la asignatura se centrarían en los conceptos de límite y derivada, sus interpretaciones geométricas, así como las propiedades esenciales de estos conceptos.

El docente se apoyará, en gran medida, en los problemas profesionales o problemas matemático-profesionales, el mismo propiciará el desarrollo del programa de la asignatura sobre la base de actividad individual y grupal de los estudiantes en clases y fuera de ellas, a través de métodos y técnicas participativas que permitan lograr una posición activa del alumno y del grupo, de modo tal que su participación le imponga un esfuerzo intelectual individual y del colectivo.

Es indispensable que los alumnos participen activa y protagónicamente en la solución de un sistemas de ejercicios y tareas contentivas de problemas profesionales y problemas matemático-profesionales que los lleve a la realización de la inferencia y la posterior aplicación de la teoría del Cálculo diferencial unidimensional (derivación de la teoría y aplicaciones), pues ello contribuiría directamente al desarrollo de sus capacidades mentales, de su creatividad y de la solidez de sus conocimientos; además de tributar a una comprensión más profunda de esta ciencia y hacer más sólida la concepción científica de ella. El enunciado de los principales conceptos y teoremas de la asignatura en los dos primeros temas, ha de inferirse, fundamentalmente, del planteamiento y la solución de problemas profesionales y problemas matemático-profesionales, apoyados para ello en la interpretación geométrica de los conceptos de límite, continuidad y derivada.

En esencia se propone desarrollar la asignatura mediante la lógica que se ilustra a continuación:



Las actividades docentes a partir de los problemas profesionales o problemas matemáticos profesionales propiciarán que los estudiantes formulen preguntas y que tengan tiempo para reflexionar. Los impulsos que se proporcionen deben garantizar la actividad reflexiva, la comprensión y el intercambio de los modos y estrategias generales de pensamiento; para ello, estos impulsos deben minimizarse para maximizar el protagonismo estudiantil. Es importante que los estudiantes jueguen un papel protagónico en la derivación de la teoría, apoyado en los invariantes. Para ello ha de desarrollarse actividades participativas, grupales, con el empleo de métodos problémicos y técnicas participativas, en las que se infiera, a partir de la resolución de problemas, definiciones de conceptos y enunciado de teoremas, así como determinen procedimientos y sucesión de indicaciones de carácter algorítmico.

El aprendizaje desarrollador genera, a partir de las propias contradicciones en que se funda-

menta su existencia, la necesidad inagotable de aprender y de crecer, y los recursos psicológicos (cognitivos, afectivos, motivacionales-volitivos) necesarios para lograrlo.

La calidad del aprendizaje se logrará en la medida en que este sea capaz de promover el desarrollo de los estudiantes, que puedan pasar de un nivel de desarrollo a otro superior. En tal sentido se concibe el aprendizaje como un proceso dialéctico, individualizado, vinculado estrechamente con su contexto, teniendo en cuenta las experiencias y las necesidades de los individuos, así como con su crecimiento humano y el desarrollo de su personalidad.

## CONCLUSIONES

El empleo de los problemas matemático-profesionales permite estructurar el proceso enseñanza aprendizaje de una disciplina del ciclo básico de manera que tribute a la formación profesional del futuro egresado, con un perfil amplio, utilizando este como hilo conductor de todo el proceso. Esto permite desarrollar un proceso enseñanza-aprendizaje activo, significativo y diferenciado, a través del protagonismo estudiantil, el trabajo independiente e investigativo de los alumnos y, con ello, motivar el contenido a través del vínculo de la asignatura con la profesión, donde el estudiante despliega un papel protagónico en la obtención de sus conocimientos y su aplicación al terreno profesional, pues el conocimiento nace de la propia necesidad del empleo profesional, lo que permite una educación en valores.

El concepto de problema matemático - profesional pudiera transferirse a otras disciplinas pero en términos de la ciencia de que se trate, definiéndose, por ejemplo, los términos de problemas físico-profesionales, problemas químico-profesionales, entre otros.

La concepción sistémico dialéctica de invariante defendida revela fuentes motrices internas en el contenido, con un enfoque desarrollador, no solo en la aplicación de la teoría, sino también en el desarrollo de las variantes o derivación de la teoría a partir de problemas matemático-profesionales.

Esta experiencia no es solo posible desde la Matemática sino que es generalizable a otras asignaturas que formen parte de las llamadas disciplinas del ciclo básico, las que pudieran trabajar bajo esta concepción, organizando un aprendizaje desarrollador en que los estudiantes se mantengan activos, copartícipe de su propio aprendizaje que devenga en altamente significativo y que les permita trascender como profesionales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez Zayas, C. M. (1999). *La escuela en la vida*. La Habana: Pueblo y Educación.

Álvarez Zayas, C. M. (2001). *Hacia una escuela de Excelencia*. Cuba: CEPES.