La Geometría Escolar en Crisis: Una Confrontación con la Olvidada "Óptica De Euclides"

Lianggi Espinoza R., Andrea Vergara G. y David Valenzuela Z.
Universidad de Valparaíso, Instituto de Matemáticas, Chile
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemáticas, Chile
leanggi@gmail.com - andrea.vergara.g@gmail.com – david.valenzuela.z@gmail.com

Resumen

Esta investigación discute las limitaciones que tiene la geometría escolar para propiciar vínculos entre lo que se aprende en la escuela y lo que se vive en la cotidianeidad. Se analizó un texto poco conocido de Euclides que estudia el fenómeno de la percepción visual a través de la geometría. Se caracterizó la racionalidad subyacente a esta obra para contrastar dicha racionalidad con la presente en la geometría escolar. Se evidenció que el carácter dinámico y comparativo de la primera se distingue de la naturaleza estática de la segunda. Finalizamos replanteando aquello que suele entenderse por contextualización en matemáticas.

Palabras Clave: contextualización, epistemología, historia, física-matemática, interdisciplinariedad

Introducción

Las reformas educativas contemporáneas han enfatizado la necesidad de que los aprendices puedan vincular las matemáticas que aprenden en la escuela con su vida cotidiana. A partir de estas reformas, se espera que los aprendices puedan formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usarla para describir, explicar y predecir fenómenos y reconocer el papel que desempeñan en el mundo (PISA, 2015). Este deber ser de las matemáticas se confronta con su ser en la escuela, pues la matemática se ha considerado como una disciplina rígida de razonamientos únicos y respuestas absolutas, cuyo valor radica en su coherencia interna, la cual es independiente de los fenómenos del mundo (Soto y Cantoral, 2014). Por tanto, lograr que las matemáticas se vinculen con el mundo es un gran desafío para la didáctica contemporánea.

Sabemos que la geometría surge y se desarrolla ligada al desarrollo de actividades como el comercio, la economía, la guerra, la construcción, la astronomía, entre otras. Esa relación se mantuvo en el tiempo contribuyendo a su desarrollo (Scriba y Schreiber, 2015). También, Euclides, en su obra *Los Elementos*, desarrolló el estilo o método axiomático en el que, comenzando por ideas no derivables de otras ideas del mismo sistema, se deducen las proposiciones siguientes con gran sistematicidad, coherencia y rigor lógico (Levi, 2006). El reto es la generación de vínculos entre esta matemática y su uso para explicar fenómenos del mundo. La *Óptica* de Euclides es un libro datado en el siglo III a.C. y contiene 58 proposiciones que estudian el fenómeno de la percepción visual. En este libro se matematiza dicho fenómeno geometrizando al ojo como un punto, a las magnitudes como segmentos y al ángulo de visión, determinado por el punto y los extremos del segmento, como la magnitud del objeto visto. De esta manera, si se tiene un ángulo mayor, igual o menor que el otro, significa que el objeto visto parecerá más grande, igual o menor que otro (Euclides, 2000). En esta obra, la geometría se usa para generar un sistema de explicación de un fenómeno que surge en la interacción entre el ser humano y el mundo.

De acuerdo a lo señalado, en esta investigación realizamos un estudio epistemológico que tiene por objetivo caracterizar la racionalidad subyacente en la geometría de la *Óptica* de Euclides y contrastar esta racionalidad con la subyacente a la geometría escolar. Este objetivo, sostenemos, nos permite proyectar nuevas vías de intervención en el sistema educativo con el fin de propiciar mayores vínculos entre la escuela y la cotidianeidad.

MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

Esta investigación se enmarca en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa. El conocimiento matemático, incluso aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociada a un conjunto de prácticas humanas (Cantoral, 2001; Cordero, 2001). Sin embargo, su difusión al sistema educativo genera una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y funcionamiento, formando discursos matemáticos escolares. En este proceso, el conocimiento pierde parte de su sentido y significado, quedando reducido a temas aislados y secuenciados en la currícula escolar (Cantoral, 2013).

El discurso matemático escolar no es la función declarativa o discursiva en el aula, ni se reduce a la organización o estructuración de la matemática escolar (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006). Más bien, es un paradigma que provee una *manera de ver* a la matemática escolar. Soto y Cantoral (2014) sostienen que el discurso matemático escolar atomiza los conceptos, tiene un carácter hegemónico, concibe a la matemática como un conocimiento acabado, establece un sentido utilitario del conocimiento y delinea ciertas formas de actuar, razonar, dar significados y/o argumentar, dejando fuera otras que son constitutivas del saber en juego.

De aquí el interés socioepistemológico de recuperar aquello que se ha perdido, aquello que antecede y acompaña al conocimiento, e incorporarlo a los procesos educativos contemporáneos. Por esto, diversas investigaciones retoman significaciones y construyen epistemologías de prácticas para propiciar en los aprendices la resignificación de la matemática escolar (Cantoral, 2013; Cordero, 2001; Montiel, 2011; Espinoza, 2014). En esta investigación analizamos la racionalidad subyacente a una geometría que se usó para generar sistemas de explicación del mundo, basándonos en el principio socioepistemológico de la racionalidad contextualizada

(Cantoral, 2013).

Espinoza (2009) sostiene que una dimensión de los procesos de significación de conocimiento es el de la racionalidad contextualizada, la cual provee una "manera de ver" al conocimiento situada en cierto contexto específico. Siguiendo a Huang (2008), se busca entender los principios normativos del razonamiento en los contextos específicos en que se realiza una inferencia. Estas maneras de ver "inciden en cómo los individuos, colectivos y culturas se aproximan, producen, adquieren y comparten los saberes producidos desde la práctica. Hace que las personas piensen al conocimiento de cierta manera y no de otra" (Espinoza, 2014, p.204). Por lo tanto, la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático es situada y relativa a estas maneras de ver al conocimiento (Espinoza, 2009).

En relación a lo metodológico, nos hemos posicionado en un enfoque cualitativo, siguiendo el método *análisis de contenido* (Krippendorff, 2004), el cual permite la interpretación crítica y hermenéutica de los textos, y la realización de inferencias considerando aspectos contextuales, culturales e históricos. En el caso de la *Óptica* de Euclides, analizamos una traducción al español (Euclides, 2000) complementada con la traducción al francés realizada por Freart de Chantelou en 1663. Primero, estudiamos todas las proposiciones del texto analizando las nociones, procedimientos, construcciones y teoremas utilizados. Segundo, caracterizamos los aspectos más predominantes en el texto ligados a la racionalidad tras la *Óptica*. Y, para finalizar, seleccionamos tres proposiciones, de modo que fueran representativas del texto, para profundizar en sus características.

Dado que estas características son las más predominantes en la *Óptica,* decidimos utilizarlas como categorías de análisis para ver cómo estas se hacen presente en la racionalidad subyacente a la geometría escolar. Para esto, se analizaron tres textos escolares, de uso oficial en Chile, en los que se concentran la geometría relativa a la proporcionalidad de segmentos (Carreño, 2008; Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2012; Díaz, Gutiérrez y Jiménez, 2015), además de los planes y programas de estudios en Chile vigentes al año 2016 (MINEDUC, 2014). En este análisis, estudiamos las unidades relativas a geometría, analizando cómo son enunciados los teoremas, cómo son demostrados, cuáles son las actividades sugeridas y los ejemplos de uso propuestos en contextos cotidianos. Posterior a este análisis, en un ejercicio de contraste a las características de la geometría de la *Óptica* de Euclides, levantamos categorías que caracterizan a la geometría escolar.

EJEMPLOS DE PROPOSICIONES DE LA ÓPTICA DE EUCLIDES

A continuación, presentamos tres proposiciones representativas de la *Óptica* de Euclides, sobre las cuales asentamos nuestro análisis. Para ello, rediseñamos las construcciones geométricas remplazando el alfabeto griego por el alfabeto latino, conservamos el estilo argumentativo y las notaciones matemáticas del escrito original. La diferencia más significativa está en la noción de recta, la que Euclides entiende como segmentos que son susceptibles a ser prolongados.

Comenzamos con la proposición 4 que dice *"De los objetos que están a distancias iguales y sobre la misma recta los que se ven a mayor distancia parecen menores"* (Euclides, 2000, p.138). En la Figura 1, Euclides geometriza al ojo como el punto E, los objetos de igual medida como las rectas AB, BR y RD y traza los rayos visuales EA, EB, ER, ED. Para demostrar que AB se ve mayor a BR traza la recta BZ por el punto B y paralela a la recta RE. Se tendrá que AZ es igual a ZE, y que BZ es mayor a ZA, por tanto, BZ será mayor a ZE. Así, el ángulo ZEB es mayor que el ángulo ZBE. Y dado que el ángulo ZBE es igual al ángulo BER, se tendrá que el ángulo ZEB es mayor que el ángulo BER, debido a lo cual se tendrá que AB se verá mayor que BR desde el ojo E. *"Y si de manera semejante de nuevo se trazara una paralela a DE por el punto R, se verá mayor BR que RD"* (p.139).

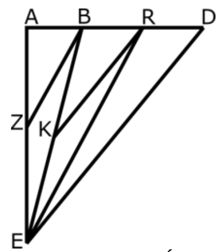

Figura 1: Imagen proposición 4, tomada de *Óptica* de Euclides (2000, p.138), adaptadas con alfabeto latino.

Así, usando procedimientos propios de la geometría euclidiana, se explica y justifica la proposición comparando los ángulos de visión involucrados. Teniendo en cuenta sobre la base de esta misma idea, en las proposiciones 15, 16 y 17 el autor analiza la situación en la que el ojo se acerca o aleja frontalmente a dos magnitudes desiguales. Para esto, considera las magnitudes desiguales AB y GD, en donde AB es mayor a GD y el ojo E está ubicado hacia el costado de la magnitud menor. En la proposición 15, las magnitudes están ubicadas por debajo del ojo; en la proposición 16, las magnitudes sobresalen por encima del ojo; y, en la proposición 17, el ojo se mueve en línea recta a la altura de la magnitud más pequeña. En los tres casos, el ojo se mueve de manera perpendicular a las magnitudes vistas.

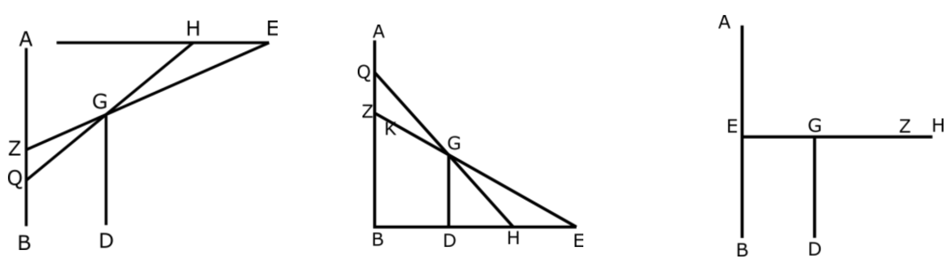

Figura 2: Imágenes de las proposición 15, 16 y 17 (de izquierda a derecha) de la *Óptica* de Euclides (2000, pp.148-150), adaptadas con alfabeto latino.

En la proposición 15, al estar el ojo en E, el segmento AB se ve mayor que GD en la magnitud AZ. Al cambiarse el ojo a una posición más cercana H, AB se verá mayor que GD en la magnitud AQ. Y AQ es mayor a AZ, por tanto, *"al acercarse el ojo, el objeto que aparece por encima parece mayor en una magnitud mayor, y al alejarse, en una menor"* (Euclides, 2000, p. 149). En la proposición 16, siguiendo el mismo razonamiento, si el ojo está en E lo que se verá de AB será ZA, y al acercar el ojo a una posición más cercana H, lo que se verá será AQ. Y AQ es menor a AZ, por tanto, *"al acercarse el ojo, el objeto que sobresale por encima parece menor en una magnitud menor y, al alejarse, en una mayor"* (p. 149). En la proposición 17 estando el ojo en Z lo que se verá de AB será EA. Y si el ojo se aleja a la posición H se seguirá viendo EA, por tanto, *"al acercarse y alejarse el ojo Z que está en línea recta parecerá que AB sobresale por encima de GD lo mismo"* (p. 150).

De esta manera, se explican y justifican las tres proposiciones analizando los cambios que se producen al mover el ojo de posición. Esto mismo se hace en la proposición 44, en la que se sostiene: *"Hay lugares en los cuales, al cambiar el ojo de posición, las magnitudes iguales y que ocupan ciertos lugares en posición contigua parecen unas veces iguales y otras desiguales"* (Euclides, 2000, p. 184). En esta proposición se considera a Q como el ojo y a AB y BG las magnitudes iguales y contiguas (Figura 3). El autor sostiene que es evidente que si el ojo Q se encuentra en ZD, perpendicular a AB y BG en B, las magnitudes AB y BR se verán iguales (esto se debe a que los ángulos AQB y BQG serán iguales si Q se mueve sobre DZ), pero si se cambia la posición del ojo fuera de esta recta las magnitudes se verán desiguales.

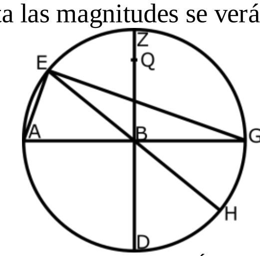

Figura 3: Imagen proposición 44, tomada de *Óptica* de Euclides (2000, p.184), adaptada con alfabeto latino.

Para argumentar esto último, construye los rayos visuales AE, EB, EG y la circunferencia circunscrita al triángulo AGE. Para ello, prolonga EB obteniendo BH y sostiene que dado que el arco AD es igual al arco DG, el arco de circunferencia ADH será mayor al arco HG. Por tanto, el ángulo AEH será mayor al ángulo HEG. Del mismo modo, AB se verá más grande que BG desde E. Después argumenta que si E cambia de posición sobre EH, AB y BG se seguirán viendo desiguales. Si E se mueve a otra parte del círculo estos segmentos se verán desiguales, excepto si este punto está sobre la recta perpendicular a AG en B. Y de la misma manera, si E se pone fuera del círculo, sin estar sobre esta recta perpendicular, AB y BG se verán desiguales. Es así como el autor explica y justifica la proposición.

Estos son tres ejemplos de las 58 proposiciones de la obra. En la *Óptica* se estudia el efecto que tiene la distancia y la posición de los objetos en la percepción de sus tamaños y formas (Proposiciones 1-17), se solucionan problemas ligados con la medición de alturas y longitudes (Proposición 18-23), se explica la percepción visual de superficies curvas (Proposición. 23-35) y se estudian fenómenos relativos a la percepción de objetos cuando estos, o el ojo, están en movimiento (Proposición. 36-56).

CARACTERIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LA ÓPTICA

Las dos características más predominantes que encontramos acerca de racionalidad subyacente en la *Óptica* de Euclides son el carácter dinámico y la heurística comparativa. Las cuales explicamos a continuación.

UNA GEOMETRÍA CON CARÁCTER DINÁMICO

El carácter dinámico de esta geometría está determinado por la naturaleza del fenómeno estudiado, la percepción visual, y se evidencia en la forma en que se usa la geometría en las proposiciones. En algunas construcciones geométricas se mueve la ubicación del observador, la ubicación del objeto o ambos (proposiciones 15, 16 17 y 44). En otros, no existe un movimiento explícito dentro de la figura, sin embargo, de manera implícita se mueve el rayo visual involucrado (proposición 4). Así, el sentido dinámico de esta geometría se expresa de maneras diferente a lo largo de la obra y está en función de la naturaleza y forma de la percepción visual involucrada.

En el caso de las proposiciones 15, 16 y 17 (Figura 2) el dinamismo se hace presente cuando el punto, que representa al ojo, se acerca o aleja de las magnitudes vistas. Estas proposiciones tratan la misma percepción visual. Juntas representan el caso del movimiento del ojo sobre cualquier recta perpendicular a las magnitudes vistas. Ocurre de manera similar en la proposición 44 (Figura 3), en donde el dinamismo está determinado por el movimiento del ojo que se mueve sobre la recta perpendicular, sobre la recta oblicua, sobre la circunferencia, dentro del círculo y fuera del círculo. En estos cambios se analiza la igualdad o diferencia de los ángulos involucrados, con los que se determina si los segmentos AB y BG se ven iguales o distintos entre sí.

En el caso de la proposición 4 (Figura 1), el dinamismo también está presente, pero de manera diferente a los casos expuestos anteriormente. Los objetos no se mueven, tampoco la posición del ojo, pero si se mueve el enfoque del ojo sobre los objetos, de manera que si el objeto está más lejos se verá más pequeño. También, la construcción geométrica tiene un alto grado de generalidad, dado que la construcción que explica y valida la proposición sigue siendo válida si el punto E está más cerca o lejos de A, lo mismo si las magnitudes son más grandes o pequeñas. En este sentido, este dinamismo es próximo al existente en los Elementos de Euclides y al que se usa en varios de los problemas planteados en softwares de geometría dinámica.

Este carácter dinámico está presente en toda la *Óptica* expresado de las dos maneras que acabamos de describir. Se hace ostensible en los enunciados, por ejemplo, de las siguientes proposiciones: las magnitudes iguales y paralelas situadas a distancias distintas del ojo no se ven proporcionalmente a las distancias (proposición 8); al acercarse el ojo a la esfera, lo que se ve será menor, pero parecerá que se ve mayor (proposición 24); de los objetos que se trasladan a la misma velocidad, los más lejanos parecen trasladarse más despacio (proposición 54); y, las magnitudes que crecen parecen acercarse al ojo (proposición 56). En estas proposiciones, el dinamismo está dado por la naturaleza del fenómeno y tiene un amplio grado de generalidad en el movimiento de los puntos, segmentos y figuras geométricas involucradas. Es un dinamismo más flexible que el que encontramos en los Elementos de Euclides y en varias de las actividades matemáticas desarrolladas en softwares de geometría dinámica.

LA COMPARACIÓN COMO MEDIO HEURÍSTICO PARA EXPLICAR EL FENÓMENO

El carácter comparativo está implícito en la gran mayoría de las proposiciones. Esto se hace ostensible en siguiente definición, la más referenciada de la obra, en la que se sostiene "que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales" (Euclides, 2000, p.135). En este marco, todas las proposiciones de la *Óptica* descansan sobre la idea de estimar si ciertos ángulos son iguales, si son desiguales, si uno es mayor o menor que otro, si en un movimiento se mantienen invariantes o cambian proporcionalmente, entre otros.

Lo comparativo es algo que está imbricado al carácter dinámico de esta geometría. En las proposiciones 15, 16 y 17, lo comparativo se hace presente en la comparación mayor-menor-igual, y puede verse en las ideas "al acercarse por encima parecerá mayor, al alejarse parecerá menor", "al acercarse por abajo parecerá menor, y al alejarse parecerá mayor" y "al acercarse y alejarse parecerá lo mismo" (Euclides, 2000, pp. 149-150). Así, también, aparece en la proposición 44 en la comparación igual-diferente y en la proposición 4 aparece en la forma de la transitividad de las relaciones de orden, que surge después de comparar pares de ángulos desiguales, en donde se concluye que "los que se ven a mayor distancia parecen menores" (p.138).

La comparación es una manera accesible de estudiar el cambio. Si caminamos en la noche cerca de un poste de alumbrado público, nuestra sombra se hará más pequeña o grande en función de nuestra posición en relación al poste. La descripción de este cambio a través de la comparación es accesible desde la geometría, pero su cuantificación, así como sucede también con las proposiciones de la óptica, requiere de la intervención de la trigonometría, la cual estaba en un estado incipiente en la época de Euclides. Así la comparación es un medio de aproximación al cambio que puede desarrollarse previamente al estudio de su matematización en el sentido moderno.

La heurística comparativa está presente a lo largo de toda la *Óptica* de diversas formas. Aparece desde la relaciones de igualdad, de diferencias, de orden y fundamentalmente, desde la transitividad de las relaciones de orden. Generalmente se comparan magnitudes de igual naturaleza, pero también existen casos en que son de distinta naturaleza. La comparación también aparece, siguiendo la descripción de Reyes-Gasperini y Cantoral (2014), como una forma cualitativa de cuantificar el cambio. Esto ocurre en las proposiciones 48 y 49 en donde se plantea el problema de construir lugares geométricos desde dónde una magnitud se vea el doble, la mitad, o el cuádruple de una razón dada.

En síntesis, el carácter dinámico de esta geometría está determinado por la fenomenología intrínseca de la percepción visual, y la heurística comparativa aparece como un medio para generar un sistema de explicación del fenómeno a partir del análisis del cambio.

CONTRASTE ENTRE LA GEOMETRÍA DE LA ÓPTICA Y LA GEOMETRÍA ESCOLAR

Usamos las características de la racionalidad de la *Óptica* de Euclides como categorías para analizar la geometría escolar. Como resultado, encontramos que carácter dinámico y heurística comparativa subyacente a la geometría de la *Óptica* se contrasta con el carácter estático y predominancia del cálculo de la geometría escolar. A continuación, presentamos esta caracterización y confrontación.

SU CARÁCTER ESTÁTICO

El carácter estático de la geometría escolar puede ser ejemplificado a través del teorema escolar que señala "todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto" (Muñoz, Rupin y Jiménez, 2014, p. 135). En su formulación original en los *Elementos* de Euclides (1776) este teorema dice que "en el círculo el ángulo, que está en el semicírculo, es recto; el que está en el segmento mayor es menor que el recto; y el que está en el segmento menor es mayor que el recto" (p. 84). Esta significación original trae a colación la posibilidad de mover una cuerda dentro del círculo y analizar lo que sucede con el ángulo. En la formulación escolar la cuerda, que es el diámetro, no es susceptible de ser pensada dinámicamente.

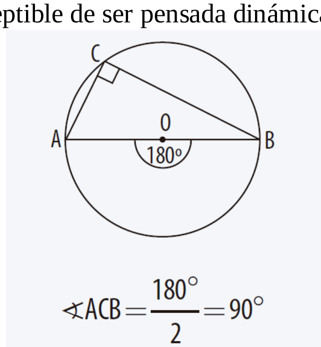

Figura 4: Descripción del teorema del ángulo inscrito. Imagen copiada de Muñoz, Rupin y Jiménez (2015, p.135).

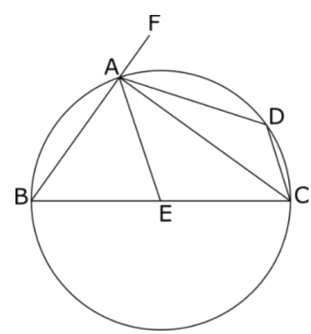

Figura 5: Proposición 31, libro III, imagen tomada de los *Elementos* de Euclides (1774, p. 84), adaptada con alfabeto latino.

Este ejemplo expresa la generalidad del sentido estático que tiñen a la mayoría de las evocaciones matemáticas de la geometría escolar. Existen excepciones, ligadas a aplicaciones a contextos cotidianos, que suelen presentarse al inicio de los capítulos como actividades de motivación o al final como problemas de ampliación o aplicación. Y, a pesar del dinamismo inherente a las preguntas, estas tienden a referirse a situaciones en posiciones o instantes fijos. Además, al estar relacionados a ciertos teoremas o contenidos específicos, su resolución tiende a reducirse a la aplicación de una fórmula, quedando fuera el carácter dinámico de la situación o el uso de razonamiento heurístico en la resolución del problema. A modo de ejemplo, véase Muñoz, Rupin y Jiménez (2015, pp. 90, 100, 132) y Zañartu, Darrigrandi y Ramos (2012, pp. 149, 153, 166).

Si bien, desde mediados de los años 80, se han venido desarrollando distintos softwares de geometría dinámica, el sentido dinámico de estos depende en gran medida de la concepción que posee el profesor sobre los procesos de instrucción y el tipo de actividades que este es capaz de proponer (Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva y Llinares, 2010). Es decir, se puede trabajar en un entorno de geometría dinámica, pero bajo una racionalidad estática de la geometría. Si se mueve el punto C de la Figura 4 sobre la circunferencia, se está haciendo alusión a una propiedad invariante dentro del cambio, pero esta invariancia no tiene suficiente alcance si este punto no se mueve hacia fuera o hacia dentro del círculo. O no se verá de manera general si el diámetro se ve como una cuerda que se mueve dentro del círculo. Todo este dinamismo es habitual dentro en la geometría de la *Óptica*.

El dinamismo que encontramos en la geometría de la *Óptica* se contrasta con el carácter estático de la geometría escolar. Esto concuerda con Barrantes y Blanco (2004), cuando plantean que la enseñanza de la geometría se ha caracterizado, entre otras cosas, por la resolución de problemas en contextos métricos donde predomina una concepción estática de la geometría, la cual se manifiesta en el escaso uso de recursos para la manipulación concreta y la falta de modelación ligada al movimiento.

LA PREDOMINANCIA DEL CÁLCULO

La predominancia del cálculo en la geometría escolar puede ser ejemplificada en la siguiente actividad (Figura 6). Esta es sugerida por los planes de estudio oficiales de Chile en la unidad de criterios de semejanza de triángulos (MINEDUC, 2011, p.58). Si bien el objetivo plantea que los estudiantes deben analizar la situación matemática, en la actividad sugerida las medidas y figuras se encuentran preestablecidas, por lo que la actividad del estudiante queda restringida a la validación por medio del cálculo.

ACTIVIDAD

A continuación se presenta una situación relativa a cálculos de trazos en triángulos rectángulos. Se pide que realicen las siguientes actividades:

1 dibuje el triángulo ABC, rectángulo en C, donde $\angle A = 30^{\circ}$, $AC = 2$ cm. y la altura $h_c = \sqrt{3}$ cm.

2 verifique que los triángulos ADC, DBC y ABC son semejantes, donde $h_c = CD$

3 calcule la longitud de los trazos AD y DB, empleando criterios relativos a la semejanza de triángulos.

Figura 6: Actividad sugerida como aplicación de los criterios de semejanza (MINEDUC, 2011, p.58).

Este ejemplo ilustra algo que encontramos con frecuencia en los textos analizados. La mayoría de las actividades propuestas presentan tareas acerca del cálculo de una medida desconocida, la caracterización o clasificación de figuras y la justificación de la veracidad de las afirmaciones dadas. Aquí la mayor cantidad de tareas propuestas están relacionadas con acciones procedimentales de carácter algebraico y la realización de cálculos aritméticos para determinar el valor de una medida pedida. Las construcciones geométricas son relegadas a ser una simple representación para orientar la ubicación de los elementos a calcular. El predominio de lo algebraico sobre lo geométrico reduce el problema a encontrar y aplicar una fórmula o técnica determinada, limitando nuevamente el dinamismo inherente a los problemas en contexto.

A pesar de que las sugerencias de las Bases Curriculares apuntan implícitamente a desmarcar los aprendizajes de las tradicionales tareas de cálculo y aplicación de fórmulas, para los estudiantes la geometría escolar sigue estando centrada en reconocer, describir y clasificar figuras planas, calcular medidas de longitud, superficie y espacio o bien aplicar fórmulas para obtener tales medidas (Pérez y Guillén, 2008). Por lo tanto, aquello que los estudiantes reconocen como actividades geométricas corresponden en realidad a resolución de ejercicios y problemas tipos, tomados en gran medida de los libros de texto, donde la dificultad radica en conocer la fórmula que se debe aplicar (Barrantes y Blanco, 2004, p. 248). En consecuencia, la acción del estudiante queda sujeta a un desempeño aritmético o algebraico, que se restringe al ámbito de las representaciones simbólicas, alejándose de la riqueza del análisis que verdaderamente permite la geometría.

La heurística comparativa propicia el análisis del cambio y lo invariante, la elaboración de conjeturas y mecanismos de verificación, ya sea en el ámbito de la matemática o de la matematización, como en es el caso de la *Óptica*. En cambio, la predominancia del cálculo enfatiza el seguir patrones preestablecidos, en secuencias lógicas predeterminadas, para encontrar soluciones puntuales. Ambas, afirmamos, son necesarias para el aprendizaje. Pero la carencia de la primera en las actividades escolares, reduce el aprendizaje a la algoritmización y dificulta que los sistemas de explicación y análisis tengan un rol activo dentro del proceso de aprendizaje.

CONCLUSIONES

Para enfrentar la problemática generada por la contrastación entre lo que es y lo que se espera que sea la matemática escolar, nos propusimos realizar una comparación entre la geometría escolar y la geometría de la *Óptica* de Euclides. Caracterizamos aspectos de la racionalidad subyacente a cada geometría. En este análisis, encontramos una confrontación entre dos maneras de ver y usar la geometría, una basada en un carácter dinámico y heurística comparativa, y otra basada en un carácter estático y la predominancia del cálculo. Sistematizamos esta confrontación en la Figura 7:

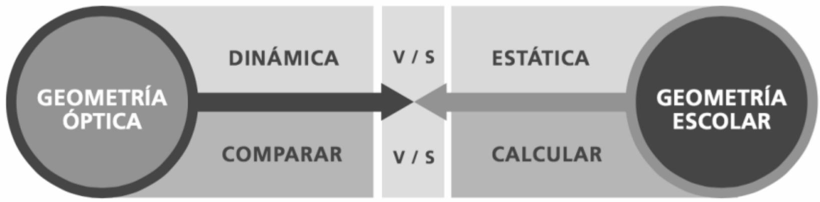

Figura 7: Confrontación entre las racionalidades subyacentes a la geometría de la *Óptica* de Euclides y a la geometría escolar.

Las reformas contemporáneas han promovido el incremento de acciones tendientes a hacer que la matemática escolar se vincule con la vida cotidiana, sobre todo en las últimas décadas. Hoy podemos encontrar en los libros escolares de matemáticas numerosas referencias a situaciones en contexto donde se exhorta al estudiante a aplicar sus conocimientos. Sin embargo, existe la tendencia a generar una contextualización, forzando la realidad para adaptarla a la matemática escolar o presentando situaciones que se distancian de los contenidos escolares. Se reduce la contextualización a la evocación de situaciones realistas y, en consecuencia, la matemática que vive en la escuela sigue presentándose como algo que poco o nada tiene que ver con la vida cotidiana de los estudiantes (Cantoral, Montiel, y Reyes-Gasperini, 2015). De aquí la necesidad de preguntarnos acerca de lo que estamos entendiendo por contextualizar el conocimiento matemático y vincularlo con la vida cotidiana del estudiante.

Un aspecto central a considerar en relación a la contextualización en la enseñanza de las matemáticas es la idea de racionalidad contextualizada, esto es, la existencia de cierta "manera de ver" al conocimiento situada a contextos específicos. En esta investigación, hemos evidenciado cómo la racionalidad subyacente de una geometría que se usa para entender un fenómeno físico (la percepción visual estudiada desde la óptica geométrica) es diferente a la que está presente en la geometría escolar. De aquí que el acto de contextualizar requiere de traer a la escuela la racionalidad inherente a los conocimientos en sus escenarios de uso. Lo anterior implica un desafío epistemológico, pues demanda cuestionar la racionalidad imperante en el discurso matemático escolar.

En el caso de la enseñanza de la geometría, para que los estudiantes puedan usar su razonamiento geométrico en la comprensión y resolución de problemas ligados a contextos realistas, no de una manera utilitaria, sino que de una forma flexible y creativa, se hace necesario trastocar la racionalidad estática-comparativa subyacente a la geometría escolar. Se requiere incorporar en la escuela actividades en las que aparezca en escena una geometría con carácter dinámico y cuyo abordaje descanse sobre la práctica de la comparación. Consideramos que esto puede lograrse incorporando actividades que involucren situaciones dinámicas, tanto en el ámbito de la geometría o como en el de la geometrización de un fenómeno. En estas, se pueden incorporar preguntas basadas en la comparación, preguntas del tipo ¿cómo varían?, ¿cuándo permanecen iguales?, ¿cuándo uno es más grande que el otro?, ¿cuándo es su mitad, doble o cuádruple?, etc. En estas preguntas, un horizonte deseable es propiciar el uso de la transitividad de las relaciones de orden.

Concluimos con la siguiente hipótesis abierta a la investigación: La incorporación de aspectos ligados a la racionalidad dinámica y comparativa sobre la geometría escolar, en conjunto con el desarrollo de la práctica de la geometrización, pueden propiciar en los estudiantes la generación de vínculos más significativos entre la geometría que aprenden en la escuela y diversas situaciones ligadas a su vida cotidiana, como también la interdisciplinariedad con otras asignaturas escolares, como por ejemplo la física, la música o el dibujo, entre otras. Estos vínculos, sostenemos, ayudan a que no solo los estudiantes entiendan las matemáticas, sino que también las disfruten. Ambos procesos, como sostiene Cantoral (2013), son necesarios para avanzar hacia la democratización del aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 241-250.

Cantoral, R., Montiel, G., Reyes - Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 5-17.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. *Estudios sobre construcción social del conocimiento (2a ed.).* Editorial Gedisa SA, Barcelona.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., y Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 83-102.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo: una epistemología a través de la actividad humana. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *4*(2), 103-128.

Espinoza, L. (2009). *Una visión de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico.* Tesis de Maestría inédita. CINVESTAV. México.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses.* Tesis de Doctorado inédita. CINVESTAV. México.

Euclides. (1774). *Los seis primeros libros el undécimo y duodécimo* (Roberto Simson, trad.). Madrid, España. Recuperado de: https://archive.org/details/texts?sort=titleSorter

Euclides. (2000*). Óptica catóptrica fenómenos* (Paloma Ortiz García, trad.). Editorial Gredos, S.A, Madrid, España.

Huang, X. (2008). *De la racionalidad tradicional a la racionalidad contextualizada.* Publicaciones Cruz O., S.A., México.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology.* Sage Publications: London.

Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides* (Vol. 6). Libros del Zorzal, Argentina.

Ministerio de Educación (2012). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. Unidad de Currículum y evaluación. Santiago, Chile.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Muñoz, G. Rupin, P., y Jiménez, L. (2014) *Matemática 2° Medio:* Texto del estudiante. Ministerio de Educación. Santiago, Chile: Ediciones S.M

Pérez, S. y Guillén, G. (2008). *Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria.* Publicación Interna. Universidad de Valencia, España.

Pérez, S. y Guillén, G. (2008). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M. y Blanco, L. J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XII Simposio de la SEIEM*, pp. 307-319. Universidad de Extremadura, Badajoz, España.

PISA (2015). Draft Mathematics framework. Recuperado de
https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf

Scriba, C. J. y Schreiber, P. (2015). *5000 years of geometry: Mathematics in history and culture*. Birkhäuser, London.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión Una Visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 360-382.

Torregrosa-Gironés, G., Delicado, M. J. H., Martínez, M. D. C. P., y Ciscar, S. L. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de educación*, *352*, 379-404.