# ESTUDIO DEL NÚMERO IRRACIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES

Evelyn Cappellucci y Ariel Carballido
Instituto Superior del Profesorado J. N. Terrero
evelyncappellucci@gmail.com, profcarballido@gmail.com

**RESUMEN**

Este trabajo surge como respuesta a nuestra inquietud ante las crecientes dificultades de los alumnos del secundario superior de la Argentina respecto a la comprensión del concepto de número irracional. La dificultad en el alumnado puede deberse a un planteo erróneo o incompleto por parte del docente. Es fundamental tener en cuenta, entonces, la presentación que los textos escolares hacen del tema, si se considera a éstos como el recurso didáctico más usado a la hora de preparar una clase. Motivados por la lectura de un trabajo sobre el estudio de los números irracionales en los libros de texto secundarios de Venezuela, planteamos un análisis similar hacia nuestros libros de uso frecuente.

**PALABRAS CLAVE:** Número irracional, dificultad, textos escolares, análisis

## CONSIDERACIONES INICIALES

Desde la antigüedad, el hombre conoce la existencia de los inconmensurables. Su aparición planteó un reto para la escuela pitagórica al poner en tela de juicio su tesis de que todo podía ser medido. ¿Cómo encontrar el valor de la diagonal de un cuadrado de lado unidad? ¿Cómo calcular el perímetro de una circunferencia? Los grandes matemáticos se ocuparon de resolver estos problemas, partiendo de los ya conocidos racionales, y recorrieron un largo camino hasta llegar a considerar a los irracionales como números, a partir de las definiciones de Cantor y Dedekind en el siglo XIX.

Puede hacerse un paralelismo entre los obstáculos que sortearon los matemáticos y los que presentan los educandos y educadores en el proceso de enseñanza y aprendizaje frente a este concepto matemático. Entender las dificultades históricas de la comunidad científica es una herramienta para mejorar dicho proceso.

Los libros de texto escolares se han vuelto un recurso didáctico fundamental a la hora de enseñar. Muchas veces, el planteo de un determinado tema por parte del texto, es llevado al aula sin una mirada crítica y un buen análisis previo, pudiéndose llegar  a conceptos o ideas erróneas. Al hablar de los números irracionales, no suelen detenerse en su construcción histórica, su presencia en el contexto sociocultural del estudiante y sus propiedades como conjunto numérico, quedando así aislado de otros entes matemáticos. Esto nos lleva a realizar un análisis del planteo de éste contenido por parte de los textos escolares de mayor uso actual en el nivel secundario.

A raíz de la lectura de un trabajo sobre el estudio del número irracional en los libros de texto escolares de Juan Carlos Sánchez y Carmen Valdivé en Venezuela, buscamos realizar una investigación similar en Argentina.

## CONSIDERACIONES TEÓRICAS:

### NATURALEZA DE LOS LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES:

Los libros de textos escolares son un recurso didáctico casi universal en el nivel medio de enseñanza. Aunque, obviamente, no es el único, su uso extendido y la importancia que se les da a estos a la hora de preparar la clase, los ponen en un lugar central en el acto educativo:

> El libro de texto no es un medio más entre los restantes materiales curriculares, ni por su historia, ni tampoco por su naturaleza y características pedagógicas. El libro de texto es un instrumento, a diferencia de otros medios, que no se diseña (y consiguientemente no se utiliza) para que sea útil en situaciones específicas y puntuales de enseñanza, sino que es un recurso con suficiente potencial para ser usado a lo largo de todo un curso escolar completo. (Escudero, 1999, 11)

Respecto del análisis de los textos escolares:

> ¿Qué tiene de especial el análisis de los textos escolares? Precisamente, debido al anclaje de este recurso en la rutina de la vida escolar, se ha venido creando, una cultura que lo ubica como parte natural del sistema educativo, alejando de él toda reflexión crítica en tanto se asume como algo naturalmente y por ende bien elaborado. (Torres; Moreno, 2008, 55)

### DEFINICIONES FORMALES DEL CONCEPTO DE NÚMERO IRRACIONAL EN LA HISTORIA:

En la antigua Grecia, los pitagóricos manejaron un concepto de número como principio rector del cosmos e incluso como materia que constituía el universo. Dentro del campo de la Matemática, esta escuela sostuvo que: dados dos segmentos A y B, sin importar su longitud, uno puede ser incluido en el otro una cantidad determinada de veces; si existe un resto C, puede seguirse el procedimiento incluyendo C tantas veces como sea posible en el menor de los segmentos iniciales. El último segmento obtenido es la medida común de A y B. Dichos segmentos son, entonces, conmensurables. Al comparar el lado de un cuadrado con su diagonal (o al dividir un segmento en media y extrema razón) no es posible encontrar una medida común. Se produce una ruptura en el paradigma pitagórico. Aparecen aquí los inconmensurables.

Se le atribuye a Hipaso de Metaponto (450 a.C.) el descubrimiento de los inconmensurables al lograr resolver la Sección Áurea.

En la búsqueda de la medida de áreas de círculos, encontramos intentos a aproximarse al valor de $\pi$. En la cultura egipcia utilizaron el valor aproximado de 3,16. En la cultura china, se encuentra la obra de Tsu Ch'ung-Chih (430 a.C.), el cual dio para $\pi$ el valor de 3,1415927 como valor por exceso y 3,1415926 como valor por defecto. Arquímedes de Siracusa (287 a.C.) halla una aproximación de la razón de la medida de una circunferencia y su diámetro mediante la utilización de polígonos inscriptos, expresado por la desigualdad $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ .

Estudios de los matemáticos Brahmagupta (628 d.C.), Omar Khayyam (1050 d. C), Al-Kashi (1436 d.C.) y Leonardo de Pisa (1180 d.C.) logran determinar valores más exactos para los números irracionales $\pi$ y $\varphi$. En la obra del matemático indio puede apreciarse un manejo libre de las magnitudes inconmensurables, admitiendo de esta forma la existencia de las mismas.

Hacia 1872 Cantor presenta a los números reales; estos contienen tanto a los racionales como a los irracionales. Tomando sucesiones de números racionales que satisfacen el criterio de Cauchy (a las que llama sucesiones fundamentales; así mismo llama elementales a las sucesiones racionales cuyo límite es cero o nulo), Cantor establece una relación de equivalencia en el conjunto de las sucesiones fundamentales al definir que dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si la sucesión $\{a_n-b_n\}$ es nula. Quedan determinadas así clases de equivalencias y el conjunto cociente es el conjunto de los números racionales si a cada sucesión $a_n$ se la identifica con un número racional a, para cada n. Cantor demuestra, además, las propiedades de cuerpo, orden y completitud para los reales.

Contemporáneamente a Cantor, Richard Dedekind define el conjunto de los números reales a través del concepto de cortadura. Dicho concepto establece que cualquier punto de una recta genera una separación de la misma en dos clases de manera que cada punto de la primera clase se ubica a la izquierda de cada punto de la segunda clase y existe un único punto que produce esta división. Puede apreciarse que la cortadura no es otra cosa que una partición en dos clases.

Dedekind considera particiones de los racionales en dos clases disjuntas $A_1$ y $A_2$ de forma tal que cada número de la primera clase sea menor a cada número de la segunda. Si la primera clase $A_1$ tiene elemento máximo o la segunda clase $A_2$ tiene elemento mínimo, la cortadura es producida por un número racional. Existen infinitas cortaduras que no son producidas por números racionales para las cuales ni la clase $A_1$ exhibe un máximo elemento ni la clase $A_2$ un mínimo. En este caso, cuando la cortadura no es producida por un número racional, se crea un número irracional definido mediante aquella.

Bertrand Russell, en su obra *Introduction to Mathematical Philosophy*, simplifica la definición anterior afirmando que cada una de las clases de una cortadura está definida unívocamente por la otra; por lo tanto alcanza con una de las dos, a la que se llama segmento, para definir un número real.

## CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Teniendo en cuenta que el diseño curricular prescribe la enseñanza de los números irracionales en tercer año de la secundaria, se analiza la presentación del tema por parte de algunos de los libros de texto de tercer año de aquellas editoriales de uso más frecuente entre los docentes (Matemática 9, editorial Puerto de Palos; Matemática 9, editorial Kapeluz; Matemática III, editorial Santillana; Nueva carpeta de Matemática III, editorial Aique). Para cada uno se tendrá en cuenta: definición del concepto de número irracional, ejemplos de irracionales, consideraciones históricas, vinculación con los campos numéricos ya conocidos por los alumnos (naturales, enteros, racionales) y representación de los mismos en la recta numérica.

## CONSIDERACIONES FINALES, HALLAZGOS

Laurito, L. B. de Stisin,L., Trama, E., Ziger, D., Sidelsky, E. (2001). *Matemática 9. Estadística y Probabilidad*:

Definición: Define a los números irracionales como expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas, que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros.

Ejemplos: Se presenta π, aunque sin hacer alusión a su origen. Se indica que toda raíz no exacta de un número entero es un número racional.

Consideraciones históricas: ninguna.

Vinculación con otros campos numéricos: Presenta a los números reales como la unión de los racionales y los irracionales antes de definir a estos últimos.

Representación en la recta: Se propone representar raíces no exactas de números enteros a través de triángulos rectángulos cuya hipotenusa es igual al irracional en cuestión y uno de sus catetos está ubicado siempre sobre la recta numérica con el vértice del ángulo agudo coincidente con el punto 0. Con un compás se socaba la medida de la hipotenusa sobre la recta numérica, ubicando así el punto que representa al irracional.

Fernández M., Selva, M., Ottolenghi-Viterbi, C. (2002). *Matemática 9*:

Definición: Los define como aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Plantea ejercicios de sucesiones en los cuales se suman varios términos de las mismas para obtener aproximaciones a π, e y ϕ.

Ejemplos: Presenta a π como razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Se le da especial consideración a ϕ indicando que puede hallarse en el cuerpo humano y en construcciones arquitectónicas. Se nombra a e sin aclarar de donde surge. Se indica que también son irracionales las raíces no enteras de los números naturales.

Consideraciones históricas: Se introduce el concepto de número irracional a través de la imposibilidad, por parte de los pitagóricos, de expresar la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Respecto a π, se hace una alusión de la dificultad que tuvieron los pueblos de la antigüedad para calcular su valor, se plantea que en la Biblia (Reyes I, 7,23) se le da el valor práctico de 3.

Vinculación con otros campos numéricos: Se enuncia que el conjunto de los números irracionales junto con el de los racionales forma el conjunto de los números reales. Establece que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales.
Representación en la recta: si bien indica que todo número real, y por ende todo número irracional, puede ser ubicado en la recta numérica, no establece cómo hacerlo.

Pérez, M. M. y Romero, G. G. (2012). *III Matemática. Saber es clave*:
Definición: Define a los números irracionales como aquellos que no se pueden escribir como una fracción y su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.
Ejemplos: se presenta a $\phi$ como uno de los irracionales más famosos, dice que es el llamado número de oro y que es muy usado desde la antigüedad para representar proporciones áureas. Nombra luego el número $\pi$ sin dar ninguna explicación de este; al igual que el número $e$, del que tampoco se da ninguna explicación. Se indica que también son irracionales las raíces no enteras de los números racionales.
Consideraciones históricas: ninguna.
Vinculación con otros campos numéricos: enuncia que los números racionales junto con los números irracionales forman el conjunto de los números reales.
Representación en la recta: Se propone representar raíces no enteras de números naturales a través del teorema de Pitágoras con triángulos rectángulos cuya hipotenusa es igual al irracional en cuestión y este a su vez es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Garaventa, L., Legorburu, N., Rodas, P., Turano, C. (2007). *Nueva carpeta de Matematica III*:
Definición: a partir de la definición de los números racionales, que los define como los números que pueden expresarse en forma de fracción, se dice que existen números que no pueden expresarse como fracción, ya que su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas y que estos son los llamados números irracionales.
Ejemplos: como ejemplo se dan las raíces de números naturales cuyos resultados no son naturales. Expresiones decimales "inventadas" con cierto criterio, de tal modo que las cifras decimales sean infinitas y no periódicas y por último el número $\pi$ y $e$.
Consideraciones históricas: ninguna.
Vinculación con otros campos numéricos: dice que la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales forma el conjunto de los números reales, que "completan" la recta numérica, ya que todos sus puntos pueden ser representados mediante un número real.
Representación en la recta: muestra una construcción geométrica de estos números, utilizando el teorema de Pitágoras, sin dar explicación alguna.
En ninguno de los casos analizados se parte de los números racionales para definir a los irracionales, como sí ocurre en las definiciones formales de Cantor y Dedekind. Las definiciones que se dan no se corresponden con ninguna de las vistas en nuestro apartado histórico. En el caso del libro de editorial Kapelusz se incluyen actividades de sucesiones que se aproximan a algún irracional; no se hace una relación entre ellas y el concepto dado.

## Reflexiones finales

Uno de los problemas que se da en la comprensión del concepto de número irracional por parte de los alumnos, surge del hecho de la utilización por parte de los libros de una de las características de estos tipos de números (sus valores se representan con expresiones decimales no periódicas) como la definición misma. Un planteo de problemas en los que el alumno pueda acercarse a un número irracional determinado por sucesivas aproximaciones de racionales sería más fiel al concepto formal y ayudaría en la comprensión del concepto de completitud de los reales.

Otro de los inconvenientes es el hecho de no realizar ningún tipo de vinculación entre estos números y el contexto socio-cultural del alumno, en donde pueda visualizarlo y entenderlo de una mejor forma, y de esta manera relacionarlo con algo ya conocido para poder hacer una construcción, guiado por el docente, y lograr un aprendizaje significativo.

Las referencias históricas, cuando las hay, se encuentran más a modo de anécdota que como como ayuda clara y fiel hacia el concepto de número irracional. El recorrido histórico debe aprovecharse para que el alumno aprecie las dificultades que surgieron, muchas veces similares a las del aula, las recree y las supere con la ayuda del docente.

Este trabajo abre las puertas a futuras investigaciones sobre la enseñanza de los números irracionales que puedan dar recursos eficaces para lograr una correcta apropiación del contenido por parte del alumnado.

## Referencias bibliográficas

Ayres, F. (1977). *Álgebra Moderna*. U.S.A.:McGRAW-HILL.
Escudero, J. (1999). *Diseño, desarrollo e innovación del Currículum.* Madrid, España: Síntesis.
Fernández M., Selva, M., Ottolenghi-Viterbi, C. (2002). *Matemática 9*. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.
Garaventa, L., Legorburu, N., Rodas, P., Turano, C. (2007). *Nueva carpeta de Matemática III.* Buenos Aires, Argentina; Aique.
Klimovsky, G. y Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción*. Buenos Aires: Argentina: AZ.
Laurito, L. B. de Stisin,L., Trama, E., Ziger, D., Sidelsky, E. (2001). *Matemática 9. Estadística y Probabilidad.* Buenos Aires: Argentina: Puerto de Palos.
Pérez, M. M. y Romero, G. G. (2012). *III Matemática. Saber es clave.* Buenos Aires, Argentina: Santillana.
Sánchez, J. C. y Valdivé, C. (2014). Estudio del número irracional en los libros de texto escolares: una visión desde el PMA. *Premisa 16(62),* 36-46.
Torres, Y. y Moreno, R. (2008). El texto escolar, evolución e influencias, *Laurus. Revista de Educación 14*(27), 53-75.