MÉTODOS APROXIMADOS EN DETERMINADOS SISTEMAS MIXTOS

Cristofano Adrián José
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Argentina.
adriancristofano@hotmail.com

RESUMEN

El presente artículo constituye una narración pedagógica de distintos tópicos vinculados con la planificación de una secuencia didáctica para 5to año de nivel secundario que requirió de una innovación, un desafío y una oportunidad pedagógica para promover caminos de resolución posibles frente al conflicto que se plantea cuando los estudiantes observan que hay determinadas ecuaciones y sistemas de ecuaciones que no pueden resolverse mediante los métodos tradicionales que ellos conocen. Puntualmente se abordará el caso donde interviene un logaritmo y una ecuación lineal.

PALABRAS CLAVE: Sistemas Mixtos. Logaritmos. Métodos de aproximación.

INTRODUCCIÓN. PLANTEO DEL PROBLEMA

Cuando se les propone a los alumnos que resuelvan ecuaciones logarítmicas, las mismas presentan determinadas características para que las puedan resolver con los conocimientos que tienen disponible, por ejemplo la definición de logaritmo y sus propiedades.

Queriendo complejizar más la cuestión usualmente se combina una ecuación logarítmica con una ecuación de segundo grado, donde los alumnos deben realizar un cambio de variable previamente para encontrar las raíces y luego resolver.

Pareciera que los métodos analíticos conocidos resultaran adecuados para resolver cualquier tipo de sistemas. Pero sin embargo existen sistemas y ecuaciones específicas donde se evidencia que esto no sucede. Por ejemplo $\log_3 x = x - 2$.

Esta ecuación puede pensarse como el desarrollo de un sistema mixto donde intervienen dos ecuaciones, una logarítmica y otra lineal. Lo mismo podría pensarse con una ecuación logarítmica y una ecuación de segundo grado, entre otros ejemplos posibles.

Por lo general en las ecuaciones logarítmicas que se trabajan en el aula de 5to año, se agrupan los logaritmos por un lado para luego escribirlos como un solo logaritmo de un término (gracias a las propiedades de los logaritmos), las constantes se agrupan en el otro miembro, las variables que están fuera del logaritmo terminan cancelándose de forma tal que la definición de logaritmo pueda aplicarse sin ningún problema.

Pero en el ejemplo citado anteriormente, esto no ocurre. La variable que está fuera del logaritmo no se puede cancelar. La incógnita está presente tanto en el argumento del logaritmo, como fuera de él. Si se aplica la definición de logaritmo, la incógnita quedará tanto en el exponente como en la base del otro miembro.

Con lo cual, el problema que aquí se plantea es la necesidad de recuperar métodos aproximados de resolución en sistemas de ecuaciones mixtos que no pueden desarrollarse con los métodos exactos ya conocidos, como por ejemplo sustitución, igualación, determinantes, entre otros. En la escuela media, los métodos exactos de resolución han dejado de lado a los métodos de aproximación.

Se entiende que este fenómeno es producto de la transposición didáctica y el discurso matemático escolar. Sin embargo, en determinadas situaciones los métodos exactos no responden a la naturaleza de ese sistema de ecuaciones, e incluso en determinados contextos resultan más tediosos y menos convenientes que los métodos de aproximación.

OBJETIVO

El objetivo del artículo consiste en mostrar un tratamiento alternativo de los sistemas mixtos. El tratamiento de este tipo de sistemas surge a partir de determinadas ecuaciones logarítmicas que no pueden resolverse con los métodos tradicionales de resolución.

Recurriendo a otros tipos de registros, como el gráfico y el tabular, se espera que los alumnos puedan tener un acercamiento distinto a la resolución del sistema, en los que intervienen ecuaciones arbitrarias que no cumplen con características específicas que hacen que los métodos conocidos: sustitución, igualación, determinantes, entre otros, resulten aplicables.

FUNDAMENTACIÓN

En estos últimos años los cambios que ha tenido la nueva escuela secundaria les han dado a los alumnos un rol autónomo y más protagónico a la hora de construir un determinado conocimiento, y también para comunicar y expresar cuestiones que en ellos inquietan. Interrogan lo obvio, cuestionan el conocimiento que están aprendiendo, se replantean la finalidad, la utilidad, el pará qué les sirve en su praxis diaria ese conocimiento que están aprendiendo.

Rico (2006) en Huincahue (2015), conceptualiza una competencia para la Matemática desde el estudio PISA, declarando que la competencia matemática es "…la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano" (Rico, 2006, citado en Huincahue, 2015, p. 31).

El primer reflejo automático es pensar que las ecuaciones logarítmicas que se ven en la escuela media son ejercicios de laboratorio, es decir actividades que son minuciosamente pensadas por el docente para que el alumno construya un determinado conocimiento. Palomino (2008) señala que generalmente se recurre a algunas reglas aplicadas a un determinado conjunto de saberes matemáticos con características comunes que responden a dichas reglas.

Esto que señala Palomino entra en conflicto cuando se modifican las condiciones iniciales del ejercicio. Sucede especialmente con los alumnos curiosos o aquellos que tienen una valoración escéptica de la matemática y que manifiestan que lo que aprenden solo les sirve para esos ejercicios puntuales que ven en la clase.

Si bien la enseñanza de métodos aproximados de resolución no es algo que esté contemplado en el Diseño Curricular de secundaria, considero que la misma además de proporcionarle más herramientas a los estudiantes recuperando el registro gráfico, los ayudará a interpretar las incógnitas que están buscando como solución.

El tratamiento algebraico predomina por encima de otras representaciones, por su fuerza simbólica y su uso constante en el tratamiento de las tareas. Así lo expresa Gascón (1999) en Palomino (2008) "se trabajan con las expresiones algebraicas olvidando otras representaciones y conexiones con otros conceptos y procedimientos, promoviéndose la enseñanza de un álgebra como un conjunto atomizado de conocimientos" (Gascón, 1999, citado en Palomino, 2008, p. 1).

Esto lleva a pensar en la necesidad de diseñar una secuencia didáctica que recupere otro tipo de representaciones para que los alumnos puedan encontrar la solución o aproximarse a ella con un mínimo porcentaje de error ante la dificultad de no poder resolver el sistema con los métodos tradicionales conocidos.

Los alumnos siempre manifiestan más empatía cuando pueden ver y manipular lo que están estudiando. Ruiz (1998) citado en Montiel (2006) destaca la importancia de utilizar los gráficos y las tablas como instrumentos para la construcción del conocimiento matemático y no como un fin en sí mismo. Permanentemente hay una demanda de ellos al formato visual, a lo que pueden imaginar y vincular con fenómenos de la vida cotidiana.

DISEÑO DE LA SECUENCIA

Tiempo previsto: 2 horas reloj
1) Actividad Inicial: El docente les propone resolver la siguiente ecuación $\log_3 x = x - 2$

Los alumnos intentarán resolver la ecuación planteada, con métodos tradiciones que ya tienen incorporados. Es posible que intente aplicar la definición de logaritmo:

$$\log_3 x = x - 2 \rightarrow\ 3^{x-2} = x$$

No es efectiva ninguna de las técnicas anteriores que los alumnos conocen, ya que la incógnita aparece tanto en la base como en el exponente.

Aquí aparece la necesidad de trabajar con funciones, graficarlas, hacer un estudio de las mismas, e ir aproximando después de hacer un análisis gráfico.

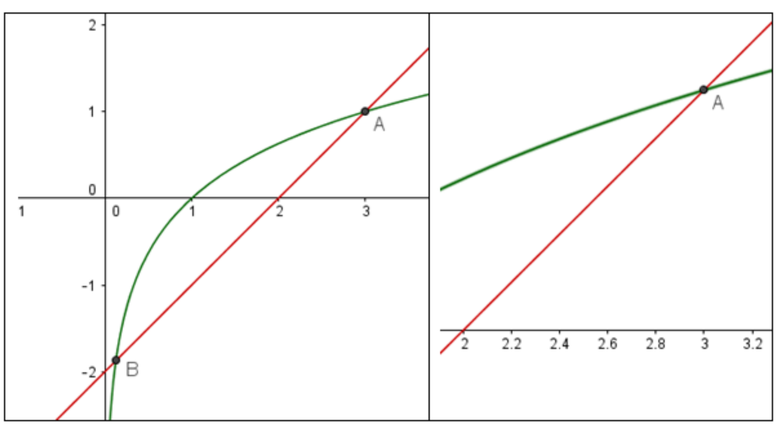
2) Actividad de Desarrollo:
a) Definimos:

$$f(x) = \log_3 x$$
$$g(x) = x - 2$$

b) Realizar ambos gráficos.

¿Cómo interpretan la o las soluciones de la ecuación gráficamente desde las dos funciones definidas?

Aquí se espera que los alumnos puedan responder que es en la intersección. Y que la función logaritmo con la función lineal se intersecan en dos puntos.



Observar que el punto de intersección A se localiza entre 2,8 y 3,2.

c) El desafío será identificar ambas soluciones con algún método de aproximación.

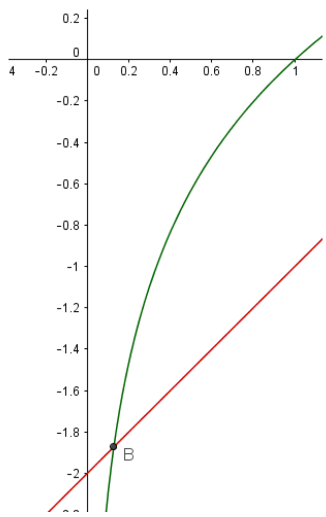
Utilizar la siguiente tabla para analizar los valores de f(x), g(x) y de f(x) - g(x)

x	$f(x) = \log_3 x$	$g(x) = x - 2$	$f(x) - g(x) = \log_3 x - x + 2$
2,8			
2,9			
...			
3,2			

d) Completar:

Donde la diferencia $f(x) - g(x)$ es _ _ _ _ ambas funciones valen igual.
En este caso ocurre en x= _ _ _ _, por lo tanto es parte de la solución.

e) Para la otra solución



Analizaremos 0 y 0,4.
Entre los valores de x donde la diferencia cambie de signo, por el corolario del Teorema de Bolzano, sabremos que ahí tendremos una _ _ _ _ _ _ _ .

f) Completar el siguiente cuadro:

x	$f(x) = \log_3 x$	$g(x) = x - 2$	$f(x) - g(x) = \log_3 x - x + 2$
0			
0,1			
...			
0,4			

El docente preguntará ¿para entre qué valores de x, la función diferencia cambió de signo? Se espera que los alumnos respondan "entre 0,1 y 0,2".

El docente deberá aclarar "en ese caso podríamos tomar como aproximado a 0,15 y así cometeríamos un error máximo del 0,1.

g) Consigna: Mejorar el error de la solución aproximada en f) de forma tal que ahora el error sea de 0,01.

El docente nuevamente sugiere construir una tabla con el intervalo que han dado los alumnos:

x	$f(x) = \log_3 x$	$g(x) = x - 2$	$f(x) - g(x) = \log_3 x - x + 2$
0,1			
0,11			
0,12			
...			
0,2			

Repetir el proceso anterior.

h) ¿cuál es la nueva aproximación de la segunda solución? ¿Con cuánto error?

i) ¿podríamos continuar hasta tener el error deseado? ¿Alguna vez culmina? en caso afirmativo, ¿cuándo?

j) Por último se espera que los alumnos digan cuáles son las soluciones aproximadas de la ecuación encontradas gracias al análisis gráfico de la función logaritmo y la función lineal.

Se espera que los alumnos respondan:

$$x = 3 \text{ ó } x = 0{,}13 \ (con\ error\ menor\ que\ 0{,}01)$$

3) Actividad de cierre:
El docente les pide a los alumnos que analicen en qué medida el estudio del logaritmo como función, les permitió resolver y aproximarse a la solución de una ecuación que no se podía resolver con la definición de logaritmo y sus propiedades.

Por último se les pide que resuelvan estas ecuaciones de tarea:

a) $\log(x-1) = x-3$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 2 - x^{2}$

Definir una función auxiliar por cada miembro e identificar los puntos donde las curvas se intersecan.
Definir la función diferencia, y a partir de un intervalo determinado gráficamente, ir aproximando los valores de x recurriendo al corolario del Teorema de Bolzano donde la diferencia cambie de signo (en el caso de que las soluciones no aparenten ser exactas). Y así ir aproximando la solución con un determinado margen de error. Para ambos ejercicios, se pide que el margen sea de 0,01.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

La idea es poder comenzar con un ejercicio disparador de ecuaciones logarítmicas, en donde los alumnos tomen conciencia que con los conocimientos que tienen disponibles no lo pueden resolver, ya que ninguna de las técnicas conocidas resultan efectivas.

$$\log_3 x = x - 2 \rightarrow 3^{x-2} = x$$

El desafío del docente será guiar a los alumnos para que piensen en distintas alternativas que los acerquen al método de resolución aproximado. Una de ellas es pensar a la ecuación como el desarrollo de un sistema de ecuaciones por el método de igualación. Eso llevará a los alumnos a reflexionar que cada miembro de la ecuación se corresponde con dos funciones definidas a priori en un sistema mixto.

Seguirán observando que por los métodos analíticos conocidos de sistemas de ecuaciones no lo pueden resolver, pero en esa búsqueda del método adecuado es probable que algún estudiante proponga el método gráfico. Dicho método está más internalizado por los alumnos en los sistemas que en las ecuaciones. En ecuaciones no suelen realizar las gráficas de las curvas de cada miembro. Sin embargo, esta técnica puede resultar efectiva para que definan a cada miembro como dos funciones independientes y luego procedan a graficarlas. Como las soluciones de los sistemas de ecuaciones resueltos gráficamente las hallan desde la intersección, apelarán a la observación para dar una ubicación cercana de las mismas. Aquí es oportuno que el docente haga hincapié en la idea de solución aproximada.

El sistema tiene dos soluciones. Los alumnos observarán que una de ellas se encuentra entre los valores 2,8 y 3,1, mientras que la otra entre 0 y 0,4. Por supuesto que cuanto más acotado sea el intervalo donde los estudiantes localizan la raíz desde la observación, menos cuentas tendrán que realizar. Pero la observación no es una herramienta de precisión, con lo cual se recomienda incrementar el intervalo en caso de no estar seguros de que la raíz se encuentre dentro de él. Si bien los alumnos desconocen el valor exacto de la raíz, conceptualmente saben que en dicho punto ambas funciones tienen la misma imagen, es la intersección por lo tanto pertenece tanto a una como a la otra. Con lo cual, la diferencia de ambas imágenes es nula.

El corolario del Teorema de Bolzano para funciones continuas establece la existencia de una raíz donde la diferencia de las imágenes cambie de signo. Sin embargo, para trabajarlo en el aula, se sugiere hacer hincapié en la diferencia de las imágenes, donde cuando más pequeñas sean, más óptima resultará la aproximación de las soluciones. Si la diferencia es nula, se debe a que las imágenes son exactamente iguales y, en consecuencia, es una solución exacta.

Para encontrar esta diferencia nula mencionada, se recomienda que los alumnos elaboren una tabla con los valores comprendidos entre 2,8 y 3,1 con un rango de 0,1, y vayan buscando las imágenes de ambas funciones y de la diferencia. Este ejercicio ha sido pensado de manera tal que una de las raíces sea exacta (para que los alumnos comiencen a conocer el método de resolución aproximada) y la otra raíz sea inexacta (en donde tengan que continuar la búsqueda reduciendo el rango de variación para aproximarse cada vez más a la raíz).

Se repite el procedimiento en el intervalo [0; 0,4]. Es muy probable que los primeros valores que seleccionen sean con un rango de 0,1. Al buscar las diferencias, notarán que no encuentran el valor nulo pero se produce una variación de signo entre 0,1 y 0,2 por lo tanto la raíz se encuentra entre ambos valores. El docente puede aclarar que en ese caso, una de las soluciones posibles ha sido 0,15 (el punto medio de los dos) con un error de 0,1.

Para mejorar la aproximación de la solución, se puede reducir el error a 0,01 y elaborar una nueva tabla para los valores del intervalo [0,1; 0,2]. Cuando los estudiantes lo resuelvan, se espera que puedan afirmar que si encuentran el valor nulo de la diferencia arribarán en una raíz exacta. Mientras que si observan una variación de signo, se estarán aproximando a ella en forma cada vez más precisa pero no exacta. Luego de que los alumnos repitan el proceso dos o tres veces, se espera que proporcionen una solución aproximada indicando el error de trabajo.

Por último se puede reflexionar con los alumnos en qué medida el estudio del logaritmo como función, les ha permitido resolver y aproximarse a la solución de una ecuación que no se ha podido resolver con la definición de logaritmo y sus propiedades. Destacar la importancia de definir una función auxiliar por cada miembro.

Recurrir al método gráfico e identificar, desde la observación y en forma aproximada, los puntos donde las curvas se intersecan para luego definir los intervalos que los contengan. Recuperar el corolario del Teorema de Bolzano y la impronta de la función diferencia para aproximarse a la solución. Como cierre se puede rescatar la idea de que el método aproximado utilizado localiza a las soluciones exactas y se aproxima tanto como se quiera a las inexactas.

CONCLUSIONES

A través de esta secuencia se ha desarrollado uno de los temas que arrastran una gran cantidad de inquietudes de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones logarítmicas y de los sistemas de ecuaciones, por sus múltiples usos, por los diversos contextos que le dan vida, y por sus variadas interpretaciones. El saber se hace presente en la forma de una situación didáctica construida por el profesor, pero vivida también protagónicamente por el estudiante.

Esta secuencia por un lado le ofrece al estudiante de un método alternativo de resolución de sistemas de ecuaciones que, si bien trabaja con aproximaciones, puede llegar a resultar más óptimo según las características del mismo. Logra recuperar el registro gráfico y lo articula con conceptos interrelacionados, como el de la raíz, la intersección entre curvas, la interpretación de las imágenes, etc. permitiendo su mejor comprensión. El registro gráfico deja de ser un fin en sí mismo, ya que los alumnos lo utilizan para arribar en la solución o aproximarse a ella con el menor porcentaje de error. Siendo que en los ejercicios tradicionales el gráfico era un fin en sí mismo, los alumnos lo hacían solo para verificar que la solución analítica estuviera bien. Para propiciar un debate constructivo y colaborativo, se sugiere trabajar esta secuencia didáctica en pequeños grupos, ya que los mismos les permite a sus integrantes elaborar conjeturas, configurar y reconfigurar procedimientos para luego discutir esas conjeturas entre ellos y con los otros grupos. Y así poder validarlas o refutarlas posibilitando la construcción de un aprendizaje significativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Huincahue, J. (2015). Tipos de representaciones externalizadas durante el proceso de modelación: el caso del ciclo de modelación Blum-Borromeo. *Premisa, 17 (67)*, 29-40.

Montiel G. (2006). Notas sobre la didáctica de la función. *Naturaleza del pensamiento matemático*. Ciclo 2005 - 2006. México

Palomino, M. (2008). *La factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de lápiz/papel (L/P) y álgebra computacional (CAS).* Tesis de Maestría no publicada, Universidad del Valle. Santiago de Cali.