

LOS LIBROS DE TEXTO RECOMENDADOS A ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS PARA EL ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Claudia Zang; Gretel Fernández von Metzen;
Natalia León; Patricia Vila Torres
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales.
Universidad Nacional de Misiones, Argentina.
claudiamzang@gmail.com

RESUMEN

Las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales (ED) subrayan su potencialidad para construir modelos matemáticos, indican que las prácticas educativas usuales se caracterizan por una sobrevaloración del enfoque cuantitativo, centrado en técnicas y métodos de resolución, en detrimento de enfoques cualitativos que enfatizan la anticipación de soluciones y su interpretación; sugieren integrar los diferentes marcos que admite su estudio: algebraico, numérico y geométrico. Realizamos un análisis de la bibliografía sugerida desde cátedras vinculadas a la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales en algunas carreras de la Facultad de Ciencias Económicas y de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones, a fin de caracterizarlas y detectar, si en éstas, se hacen eco de las recomendaciones realizadas desde la investigación educativa. Detectamos que prevalece el enfoque cuantitativo.

PALABRAS CLAVE: Ecuaciones diferenciales. Libros de texto.

INTRODUCCIÓN

Los reportes de investigaciones educativas relativas a la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (ED) resaltan su potencialidad para la construcción de modelos matemáticos.

Las investigaciones referentes al tema, señalan que generalmente las prácticas de enseñanza e caracterizan por un abordaje en el que se prioriza un tratamiento cuantitativo, centrado en el manejo de técnicas y métodos de resolución, en detrimento de enfoques cualitativos, que permiten anticipar el comportamiento de las soluciones de una ED (sin resolverla previamente), analizándola en forma global e interpretándola en términos del fenómeno que representa.

Paralelamente, sugieren tratarlas integrando los diferentes marcos o cuadros que admite su estudio: el cuadro algebraico o cuadro de la resolución por fórmulas, el cuadro numérico o cuadro de resolución numérica aproximada y el cuadro geométrico o estudio global cualitativo de las curvas soluciones de la ecuación (Artigue, 1995a).

Este trabajo emana de las investigaciones que hemos venido realizando en el marco de dos proyectos de investigación. El primero de ellos, ya finalizado, tuvo por objetivo caracterizar en qué medida los estudiantes recurren a conocimientos adquiridos en instancias previas de su formación como un recurso para los primeros aprendizajes de ED. El segundo, actualmente en curso, tiene por propósito el estudio de los vínculos que existen entre ED exactas y campos vectoriales conservativos. A partir de la observación de prácticas áulicas detectamos dificultades en la resolución de ED Exactas y en el reconocimiento del procedimiento de construcción de la función potencial de un campo conservativo como válido para la obtención de la solución de ese tipo de ED.

En el intento por explicar estas carencias, efectuamos una revisión de la bibliografía usada. Dicha revisión persiguió dos propósitos. En primer lugar, determinar qué peso otorgan los libros a los tres enfoques para el estudio de ED, y en segundo lugar, en qué medida propician las relaciones entre las ED exactas y los campos vectoriales conservativos. En este trabajo se presenta una discusión sobre el primero de los aspectos señalados.

Mediante el empleo de técnicas de análisis de contenido, analizamos nueve libros de texto recomendados para el estudio de las ED en las carreras mencionadas anteriormente. Algunas cuestiones que detectamos a partir de dicho estudio están vinculadas con la posibilidad de caracterizar la perspectiva y secuencia de presentación de los diferentes temas relacionados con ED, otras a identificar los espacios destinados en los textos a los enfoques analítico, cualitativo y numérico para inferir qué prácticas se espera lograr en el lector: el dominio de las técnicas o la comprensión de las relaciones que entran en juego en la resolución de ED.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Los libros de texto han sido objeto de investigación desde diversas perspectivas. No obstante, hay varios trabajos publicados por diferentes investigadores que básicamente concuerdan en cómo considerarlos.

En este sentido, en el presente documento asumiremos que el libro de texto es una modalidad específica de recurso didáctico diseñado para el acto pedagógico de un determinado nivel educativo. En su elaboración, los autores han tenido en cuenta una planificación de aprendizaje, pensando que su lectura se realizará en el orden por ellos propuesto (Moya Pardo, 2008).

A partir de una transformación y recreación del conocimiento, los libros de texto imponen una distribución y jerarquización de ideas (Álvarez Méndez, 2001). Son instrumentos mediadores que traducen y concretan los significados incluidos en el currículum oficial, lo hacen a través de una presentación didáctica (Gimeno Sacristán, 2005). Martínez Bonafé (Martínez Bonafé, 2002) comparte esta postura y afirma:

“en los seminarios de formación en los que tengo oportunidad de participar les sugiero que se detengan a leer más allá de lo visible, para analizar la carga de poder simbólico que transmite una forma de seleccionar, presentar, de ordenar el contenido, y que constituye todo un modo de hacer entender cuál es la cultura y el conocimiento que la escuela –desde ese libro de texto- considera como valioso” (Martínez Bonafé, 2008, p. 3).

Asimismo plantea que los libros que ofrecen las diferentes editoriales para una misma disciplina, provee de una variedad de posibilidades de elección al profesorado. Sin embargo, también estima que esa diversidad se ve poco reflejada en el tratamiento que se da a temas comunes: prácticamente todos los temas se enseñan de la misma manera en todos los libros de texto. Paralelamente, algunas investigaciones señalan que la perspectiva adoptada en los libros de texto puede influir en los estudiantes en cuanto a la comprensión de determinados contenidos, dado que reflejan la concepción de la disciplina (en nuestro caso de la Matemática) y de la enseñanza a la que adhiere el autor, de forma indirecta también, las teorías relativas a la forma en que deben presentarse los diferentes temas.

La elección del libro de texto constituye una de las decisiones curriculares más importantes que toman los docentes, ejercen una influencia importante en el aprendizaje porque orientan y direccionan muchas actividades que conforman las propuestas áulicas, en tanto los alumnos los usan como material de estudio (Campanario y Otero, 2000). Otros investigadores concuerdan en ello cuando afirman:

“las interpretaciones, formales o no, de los fenómenos físicos presentes en los libros de texto tienen un doble efecto en el desarrollo del conocimiento de los estudiantes: el de éste y el que le presenta el profesor que también hace uso del texto” (Michinel Machado y D’Alesandro Martinez, 1993, p. 37-38).

Con respecto al estado del arte, existe una gran variedad de artículos publicados que tienen a los libros de texto como objeto de estudio, mayoritariamente vinculados a la enseñanza de las Ciencias. Aunque no profundizaremos en esta línea, una revisión de los principales aportes puede encontrarse en un estudio titulado “Los libros de texto como objeto de investigación: una revisión bibliográfica” (Ocelli y Valeiras, 2013).

Por otro lado, las investigaciones de Godino indican que se debe analizar la naturaleza de los contenidos matemáticos desde un punto de vista ontológico y epistemológico, teniendo en cuenta el desarrollo institucional y personal de los objetos matemáticos.

Es esencial conocer estos aspectos, ya que las propuestas de enseñanza se verán enriquecidas si el profesor conoce el objeto matemático con el que va a trabajar, por ejemplo, su génesis histórica, los problemas que le dieron origen, los problemas que le dan sentido, las relaciones con otros objetos matemáticos, etc. (Godino, 2003); a lo que nos atrevemos agregar, la perspectiva seguida en los diferentes textos.

Antes de presentar algunos estudios que consideramos pertinentes a este trabajo, vale realizar algunas aclaraciones. La resolución de las ED puede abordarse desde diversos enfoques o cuadros: el cuadro algebraico de la resolución exacta, el cuadro numérico de la resolución aproximada, o el cuadro geométrico de la resolución cualitativa (Artigue, 1995a). Todos ellos proporcionan información vinculada a algún aspecto de la solución de la ED, se complementan y no se contradicen.

Los métodos de resolución algebraicos implican encontrar la expresión simbólica de la función incógnita. Éstos varían básicamente según el orden y el tipo de ecuación considerada: ecuaciones de primer orden (separables, lineales, exactas, etc.), ecuaciones de orden superior, métodos de eigenvalores para sistemas, método de variables separables para ED en derivadas parciales, etc. El número de ED que pueden tratarse con procedimientos analíticos es muy limitado, por lo que es conveniente completar el estudio de las mismas con los enfoques cualitativo y numérico.

Los métodos cualitativos recuperan la geometría de las soluciones, se basan en la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente o como pendiente de una función. A partir de conocer la pendiente de la solución en cada punto del plano, se construye un bosquejo de la solución. Estos métodos son aplicables a cualquier tipo de ED, incluso cuando se carecen de técnicas analíticas, y presentan la ventaja de ofrecer información sobre el comportamiento global y a largo plazo de las soluciones. Por último, los métodos numéricos requieren que se efectúen cálculos aritméticos (en forma manual o asistidos por un software matemático) que proporcionan aproximaciones de los valores futuros de la función incógnita.

Para ello sólo se requiere conocer el proceso de variación de la función (que justamente es lo que está implícito en la ED) y un punto de la solución (que está dado por unas condiciones iniciales). Éstos proporcionan una solución aproximada de la ED y, al igual que los métodos cualitativos, son generalizables a cualquier ED. Las investigaciones realizadas en forma independiente por Artigue (1995a), Moreno y Azcárate (2003), Habre (2000 y 2003), destacan que la enseñanza tradicional de las ED se caracteriza por un estudio formal de las mismas en el que se enfatiza el tratamiento algebraico. Artigue (1995b) indica además que los estudiantes valoran los métodos analíticos-algebraicos por sobre los enfoques cualitativos y numéricos por conferirles menor jerarquía a estos últimos.

Esta misma apreciación es compartida por Habre (2003), quien habiendo conducido un curso basado en el enfoque cualitativo de las ED, apoyado principalmente en el uso de diferente software matemático, notó que los estudiantes continuaban teniendo mayor inclinación por el uso de las técnicas de resolución analítica, suponiendo que el tratamiento simbólico de las funciones es más completo que el tratamiento gráfico, creencia que, según el autor, tenga probablemente sus orígenes en instancias previas de aprendizaje sobre contenidos matemáticos.

Resultados similares obtuvimos en un trabajo de investigación previo y cuya descripción y análisis se publicó en esta misma revista (Zang, Fernández von Metzen y León, 2013). Las concepciones y creencias de los profesores universitarios tienen cierta influencia sobre sus prácticas en la enseñanza de ED. En Moreno y Azcárate (Moreno y Azcárate, 2003), los docentes entrevistados admiten tener dificultades para reconciliar las técnicas analíticas con el estudio de los modelos, en virtud de que las ED involucradas en las aplicaciones son bastante complicadas y generalmente no se pueden resolver analíticamente.

Esto, junto a otros factores, desencadena en clases donde solamente se aborda el estudio de algunos modelos típicos y relativamente sencillos, y se enfatiza las cuestiones técnicas, que resultan más fáciles y cómodas tanto para alumnos como a docentes. La persistencia de la enseñanza tradicional de las ED, se apoya en la consideración de los profesores sobre el pobre nivel de competencias matemáticas de los estudiantes, se muestran convencidos de que los contenidos abordados actualmente son los que realmente deberían ser tratados, teniendo en cuenta las características de los estudiantes con que trabajan.

Además, las autoras citadas precedentemente, reconocen como factores de peso en el predominio de los métodos algebraicos a: la concepción formalista de las matemáticas en general y en particular de las ED (se confiere un estatus infra-matemático a los gráficos y a los métodos numéricos), el miedo de los docentes a utilizar contenidos específicos de la matemática aplicada en detrimento de los que proporciona la matemática pura, y el poco tiempo que destinan al replanteamiento de la asignatura que imparten por dedicar mayor tiempo a otras actividades institucionalmente más apreciadas (investigación y gestión).

Esto último se vincula también a lo planteado por Slisko, quien sostiene que los libros de texto, junto a los artículos sobre los procesos educativos, son producto de las actividades desplegadas por los profesores en el ámbito de la docencia. Identifica el hecho de que institucionalmente sean más valorados los productos de la investigación que los de la docencia, como uno de los responsables de que los errores en los libros de texto de física persistan a través del tiempo y de nuevas ediciones (Slisko, 2005).

Para concluir esta sección de antecedentes, citaremos un estudio de Rasmussen cuyo objetivo fue orientar a los alumnos a pensar las ED de un modo más interpretativo y reforzar sus

capacidades de análisis gráfico y numérico. Manifiesta que, en los últimos años, se realizaron varios estudios para mejorar el currículo del Cálculo, sin embargo, los relacionados a ED, fueron escasos.

Desde su visión, con la tecnología disponible actualmente, ya no tiene sentido dar tanta atención a las soluciones analíticas, las técnicas para obtenerlas son muy limitadas y no sirven para la mayoría de las ecuaciones. En tanto que los métodos numéricos se pueden implementar de manera relativamente sencilla con la ayuda de las tecnologías, y en muchos casos, proporcionan soluciones aproximadas confiables. Por otro lado, los métodos gráficos proveen información importante relacionada con la solución de las ED en estudio (Rasmussen, 2001). Esta opinión es compartida por autores de bibliografía específica, cuando afirman: “el énfasis tradicional en ardides y procedimientos especializados para resolver ED ya no es apropiado, dada la tecnología disponible” (Blanchard, Devaney y Hall, 1998, p. v).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Realizamos esta investigación con un enfoque descriptivo de casos (Ander-Egg, 2010). Usamos técnicas de análisis de contenido (Bardín, 1996) que permitieron la recopilación de datos de acuerdo a propósitos específicos.

En primera instancia seleccionamos una muestra intencional conformada por nueve libros de texto universitarios. Los mismos fueron seleccionados según un único criterio: estar sugerido en los programas analíticos de alguna de las cátedras vinculadas a la enseñanza de ED, consideradas en nuestro estudio. Para saber, de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales se trabajó con Análisis II de Ingeniería Química e Ingeniería en Alimentos y Análisis IV de los profesorado en Matemática y en Física; en tanto, de la Facultad de Ciencias Económicas, la cátedra observada fue Matemática para Economistas de la carrera Licenciatura en Economía.

Salvo uno, todos los textos están disponibles para que los alumnos los consulten en la biblioteca de cualquiera de las dos casas de estudio mencionadas. Posteriormente, agrupamos los libros teniendo en cuenta el peso relativo de las ED dentro de la obra (lo estimamos como el cociente de la cantidad de capítulos destinados al estudio de ED entre la cantidad de capítulos que tiene el libro en su totalidad) y los potenciales destinatarios. Los incluidos en el grupo I son aquellos que desarrollan temas de varios campos de la Matemática, como por ejemplo Álgebra, Geometría Analítica, Análisis Matemático, etc.

Por tanto, en éstos, el peso relativo de las ED es siempre menor a la unidad. Con respecto a los destinatarios, en los prefacios, los autores indican explícitamente que están dirigidos a estudiantes de carreras de Ingenierías y Matemáticas.

Los libros del grupo II son los dedicados exclusivamente al estudio de tópicos relacionados con ED. Es decir, el peso relativo de las ED en estas obras es igual a la unidad. Los destinatarios coinciden con los mencionados para el grupo I. Finalmente, los del grupo III son libros para estudiantes de carreras vinculadas a la Economía; como los del grupo I, comparten el estudio de las ED con tópicos de otros campos matemáticos.

En la Tabla 1 se exhiben los libros de texto analizados según la agrupación realizada, dentro de cada grupo se los referencia en orden alfabético y con una identificación compuesta de un número romano seguido de un número arábigo, se indica también los tópicos generales de ED que en ellos se aborda y, a grandes rasgos, el orden de presentación de los mismos. En adelante se denotarán en forma abreviada las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP).

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En primer lugar se analizará la presentación que hacen los distintos autores sobre las ED, prestando especial atención al tipo de enfoque (cualitativo, numérico o algebraico) al que otorgan mayor importancia¹, esto se resume en la Tabla 1. Luego se presenta una síntesis con las características más sobresalientes encontradas, indicando coincidencias y disimilitudes halladas. Cabe aclarar que al momento de realizar el análisis se sondearon también otras cuestiones no incluidas en este documento, como por ejemplo: la alusión a los contextos históricos de surgimiento de los diferentes conocimientos vinculados a las ED, a qué problemas se buscaba dar respuesta, los ámbitos de aplicación de las ED y su utilización para modelar fenómenos de diversa índole.

En ambos libros del grupo I, cómo ya hemos mencionado en la sección que presenta los lineamientos metodológicos, el peso relativo dado al estudio de las ED es menor que la unidad. Con respecto a I.1, destinado a alumnos de carreras de ingeniería, física y matemáticas, ciencias de la computación, consta de dos volúmenes divididos en seis partes independientes. La parte A, desde el primer capítulo hasta el sexto inclusive del volumen 1, se aboca al estudio de las EDO.

En los capítulos destinados al estudio de sistemas de ED, se muestran en simultáneo cómo resolverlas en forma analítica (con la búsqueda de los valores propios y vectores propios de la matriz de coeficientes) y cómo visualizar las curvas solución o trayectorias en el plano fase. Este tratamiento es algo diferente al realizado en los otros textos analizados donde se abordan el análisis cualitativo y el cuantitativo en forma separada (sin dejar de mostrar las

¹ En realidad, en ninguno de los textos analizados se dice explícitamente que un enfoque es más importante que otro, esto es una inferencia que hacemos en base a la observación del tratamiento que realizan en sus respectivas obras

interrelaciones que existen entre ambos métodos).

Podemos observar una ventaja en el esquema de trabajo seguido en I.1 puesto que hace más evidentes las relaciones que existen entre ambas formas de dar solución a un sistema de ED. Se visualiza cómo el análisis cualitativo aporta información sobre el comportamiento global de las soluciones y que ésta no se contrapone a la obtenida de la resolución exacta del sistema. Percibimos como desventaja que la totalidad de los ejemplos propuestos involucren ED que se pueden resolver tanto analítica como cualitativamente; deja implícita la potencialidad propia del enfoque cualitativo para resolver sistemas que carecen de técnicas de resolución analítica.

Por otro lado, los métodos numéricos recién son desarrollados en el volumen 2, al igual que los métodos de resolución de EDP. Se evidencia un claro predominio de los métodos algebraicos. Con respecto al I.2., en el prefacio se indica que el objeto del libro es desarrollar matemáticas posteriores al cálculo para ingenieros, científicos y matemáticos aplicados. Ello explicaría que no se aborde el estudio de las EDO ni los sistemas de EDO. Los temas relacionados con ED se estudian del primer capítulo hasta el quinto inclusive, los restantes se ocupan del análisis de variable compleja.

Como se ha podido apreciar en este texto no se trabajan las EDO, y el tratamiento que se da a las EDP es mucho más exhaustivo que el dado en los demás analizados, posiblemente ello se debe al tipo de público al que está destinado. A lo largo de la obra se prioriza el enfoque algebraico.

Grupo	Abreviatura	Libros de texto	Contenidos generales sobre ED y orden de presentación de los mismos.
I	I.1	Kreyszig E. (2003). "Matemáticas avanzadas para Ingeniería". Vol I. México: Limusa	Introducción a las ED. Modelado con EDO de primer orden. Métodos algebraicos para EDO de primer orden. Métodos cualitativos (campo direccional usando curvas isóclinas). Método numérico de Picard. Métodos algebraicos para EDO de segundo orden y de orden superior. Modelado con EDO de orden superior. Sistemas de EDL. Análisis cuantitativo y cualitativo de la naturaleza y estabilidad de soluciones. Análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales. Series de potencias y series de Bessel-Fourier. Transformada de Laplace aplicada a circuitos eléctricos y a ED.
	I.2	O'Neil P. (2007). "Matemáticas avanzadas para ingeniería". México: CENGAGE Learning.	Método de la Transformada de Laplace. Series de Fourier. Integrales y transformadas de Fourier. Polinomios de Legendre. Funciones de Bessel. Método de variable separables para EDP. Método numérico para EDP.
II	II. 1	Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). "Ecuaciones diferenciales" México: Thomson.	Modelado con EDO. Estudio algebraico, gráfico y numérico simultáneos de modelos de primer orden. Formalización de métodos algebraicos (separación de variables) y sistematización de técnicas cualitativas (campo de direcciones). Introducción de definiciones y terminología mediante ejemplos. Métodos algebraicos, gráficos y numéricos para EDO de orden superior. Sistemas de ED de primer orden y modelado mediante sistemas. Métodos algebraicos para sistemas de EDO lineales. Técnicas de linealización de sistemas no lineales. Transformadas de Laplace. Estudio sistemático de métodos numéricos. Sistemas dinámicos discretos.

	II. 2	Edwards H., Penney D. (2001). "Ecuaciones diferenciales". México: Prentice Hall	Introducción a las ED. Métodos algebraicos para EDO de primer orden. Modelado con ED. Métodos numéricos para EDO. Métodos algebraicos para EDO de orden superior. Sistemas de EDO lineales. Métodos numéricos para sistemas de ED. Sistemas de ED no lineales. Estudio cualitativo de sistemas autónomos y análisis de naturaleza y estabilidad de soluciones. Método de la Transformada de Laplace. Series de potencias. Funciones de Bessel y de Legendre. Series de Fourier. Método de variable separables para EDP
	II. 3	Nagle K., Saff, E., Snider A. (2001). "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera". México: Addison Wesley	Introducción a las ED. Modelado con ED de primer orden. Métodos gráficos y numéricos para ED autónomas. Métodos algebraicos para EDO de segundo orden. Introducción a sistemas de ED. Métodos gráficos y numéricos para sistemas. Métodos algebraicos para EDO de orden superior. Método de la Transformada de Laplace. Series de potencias. Funciones de Bessel y de Legendre. Métodos algebraicos para sistemas de ED lineales. Series de Fourier. Método de variable separables para EDP
	II. 4	Zill D. (1997) "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado", México: Thomson	Introducción a las ED. Modelado con ED. Métodos algebraicos para EDO de primer orden y de orden superior. Solución de ED mediante series de potencias. Método de la Transformada de Laplace. Sistemas de EDO lineales. Métodos gráficos y numéricos para EDO. Series de Fourier, de Bessel y de Legendre. Método de variable separables para EDP
	II. 5	Zill D., Cullen M. (2002) "Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera". México: Thomson,	Introducción a las ED. Modelado con ED. Métodos gráficos y método de Euler para EDO de primer orden. Métodos algebraicos para EDO de primer orden y de orden superior. Solución de ED mediante series de potencias. Método de la Transformada de Laplace. Sistemas de EDO lineales. Estudio cualitativo de sistemas autónomos y análisis de naturaleza y estabilidad de soluciones. Linealización de sistemas no lineales. Series de Fourier, de Bessel y de Legendre. Método de variable separables para EDP. Ecuación de Laplace en otros sistemas coordenados. Función error y extensión de la transformada de Laplace a funciones de dos variables y su aplicación a EDP. Integral de Fourier y Transformada de Fourier. Métodos numéricos para EDP.
	III	III. 1	Pérez Grasa I., Minguillón E y Jarne G. (2001). "Matemática para la Economía. Programación Matemática y sistemas dinámicos". España: Mc Graw Hill.
III. 2		Sydsaeter K. y Hammond P. (1996). "Matemática para el análisis Económico". Madrid: Prentice Hall	Ecuación en diferencia. Introducción a las ED. Teoría cualitativa para EDO de primer orden. Métodos algebraicos para EDO de primer orden. Métodos algebraicos para EDO lineales de orden superior. Teoría cualitativa para ED lineales de orden superior. Métodos algebraicos para EDO de orden superior.

Tabla 1. Libros de texto según clasificación realizada, identificación y contenidos abordados

Los libros del grupo II se ocupan exclusivamente del estudio de ED y tópicos afines.

En el prefacio de II.1, los autores manifiestan que se vieron en la necesidad de reformular el curso tradicional de ED que focalizaba su atención en procedimientos especializados para resolver ED, dado que gracias a las nuevas tecnologías esto dejó de ser esencial, además porque las ED que aparecen en las aplicaciones generalmente no son lineales y por tanto se carece de técnicas de resolución analítica.

Consideran que es prioritario que los estudiantes tengan las herramientas para la formulación de ED y la interpretación de sus soluciones. Ello se traduce en el trabajo sistemático con procedimientos cualitativos y numéricos a lo largo de toda la obra.

El último capítulo se ocupa del estudio de los sistemas dinámicos discretos y se basa principalmente en el estudio de métodos iterativos (numéricos). Este tema no fue presentado en los demás textos revisados.

El II.2 incluye secciones que consisten en proyectos de cómputo cuya finalidad es el trazado de campos de direcciones (método cualitativo) mediante entornos computacionales como Maple, MATLAB y Mathematica, que se van alternando con el desarrollo de los diferentes conceptos vinculados a ED.

Si bien en uno de los capítulos coexisten los tres enfoques trabajados de forma aislada para resolver ED, no se aprovechan las potencialidades de los mismos porque dado que le queda al lector explícitar los alcances y las limitaciones de cada uno.

Es notorio que, a lo largo de la obra, se resuelven de forma analítica las ED y a la par se muestran los campos de direcciones y las gráficas de algunas curvas integrales representativas. Si bien es cierto que no se indican detalles de cómo se obtienen estas gráficas, salvo en las secciones del libro dedicadas explícitamente al estudio cualitativo de las ED, al menos están presentes e implícitamente otorgan una visión geométrica, más concreta, de la ecuación y su solución..

Con respecto a II.3, luego de la introducción de las ED y de la terminología específica, antes de exponer los métodos analíticos de resolución de EDO de primer orden, se destaca la utilidad del campo de direcciones para describir la naturaleza de la solución de una ED, sobre todo cuando resulte imposible hallar la fórmula que represente explícitamente a la misma.

Luego de abordar los métodos algebraicos para EDO de primer orden, se exponen métodos numéricos. Si bien el tratamiento dado a estos últimos es similar al de los otros autores, en II.3 se explícita la utilidad que tienen estos métodos para resolver las ecuaciones que aparecen en la mayor parte de las aplicaciones y para las que no hay técnicas de resolución analíticas.

Por otro lado, el estudio algebraico de los sistemas de ED es incompleto (no se estudian sistemas no lineales, sistemas casi lineales y técnicas de linealización).

Si bien se realiza un análisis del plano de fase (método cualitativo) en un capítulo previo, este resulta demasiado escueto: no muestra cómo los enfoques cualitativo y cuantitativo se complementan y aportan básicamente la misma información, tampoco se expone como los autovalores de la matriz de coeficientes condiciona el tipo de punto crítico que tendrá el sistema.

En II. 4 prevalecen los métodos algebraicos sobre los gráficos y numéricos. Es tan notorio ese predominio que un solo capítulo del libro se destina al tratamiento numérico de las ED, dentro del cual, en una sección se expone un método gráfico para hallar la solución de ED de primer orden: el de isóclinas para construir el campo de pendientes.

Está ausente la extensión de estos métodos al caso de sistemas de ED: no se realiza el estudio de las características del plano de fase de un sistema de ED; como consecuencia, se pierde la posibilidad de estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema de ED, ya sea en situaciones en que el disponer de la solución exacta no sea tan interesante como el poder realizar un análisis global de la misma, o bien para poder establecer el comportamiento de las soluciones cuando las ED son bastantes complicadas y los métodos analíticos no existan.

Este texto tampoco pone énfasis en aclarar al estudiante que existen tres caminos para encarar la solución de una ED: la búsqueda de técnicas que permitan resolver en forma exacta la ED, la utilización de métodos numéricos que permiten aproximar una solución de un PVI y los métodos gráficos o cualitativos que permiten dar las características globales de las soluciones de ED.

Con respecto a II. 5, a diferencia de II. 4 que comparte uno de los autores con II. 5, se presenta una delimitación más clara de los tres métodos para resolver las ED. En este sentido, en el segundo capítulo, antes de acometer con la búsqueda de soluciones analíticas, se incorpora una sección destinada al estudio del comportamiento cualitativo de las soluciones de ED mediante los campos de direcciones y el análisis de la línea de fase.

Así también se presenta el método de Euler de resolución numérica y se aclara al lector que en el capítulo nueve se verán más métodos numéricos.

El grupo III está conformado por textos para estudiantes de Ciencias Económicas y Empresariales, en los que las ED se desarrollan solamente en algunos de los capítulos de los mismos.

El análisis de la secuencia seguida por los autores para el estudio las ED se hizo igual que con los de los dos grupos precedentes, prestando especial atención al tipo de enfoque (cualitativo, numérico o algebraico) al que otorgan mayor importancia.

No obstante, previo al análisis de los textos, esperábamos que difieran con respecto a la presentación e intensidad del tratamiento que hacen de los temas, dado el público al que están dirigidos.

Por otra parte, no debe asombrar la ausencia de la resolución por métodos numéricos, la complejidad de situaciones que realmente los requieren excede los objetivos de estos textos.

Aún así, se observa en III. 2 un esfuerzo para que los ejemplos y la ejercitación propuesta mantengan una estrecha relación con el área disciplinar de los lectores a quienes está dirigido.

Con respecto a III.1, los autores indican que la obra se caracteriza por la presentación de los temas con rigor matemático en las definiciones, complementadas con abundantes ejercicios resueltos y análisis de algunas aplicaciones usuales en ciencias económicas.

Comparado con otros libros, se observa un lenguaje altamente especializado que hace dificultosa su lectura para un estudiante que no haya sido entrenado en escritura matemática.

Como lo expresa el título, se abordan dos áreas propias de la matemática aplicada: problemas de optimización y análisis de sistemas dinámicos. De ocho capítulos, los cinco primeros lo dedican al tratamiento de la optimización y los tres últimos a sistemas dinámicos.

En este sentido, después de tratar técnicamente a las integrales se presenta el capítulo de ED, denominado “Introducción a la Ecuaciones Diferenciales”, marcando de alguna manera el abordaje superficial que se hará de las mismas.

Se inicia con una breve fundamentación del uso de las ED contextualizada en un problema de crecimiento poblacional en el tiempo. Acompañadas de ejemplos, se dan las definiciones formales y las generalidades relativas al tema.

Luego se analizan algunas aplicaciones combinando las miradas analítica y cualitativa en la descripción del fenómeno. Teniendo como base los métodos de solución de ED, siguiendo la línea aquí trazada con algunos ejercicios de aplicación más, cierra el libro el capítulo de ecuaciones en diferencia.

En cuanto a III. 2, el libro está dirigido a alumnos de economía. Según lo expresan los autores en el prólogo:

“El propósito de este libro es ayudar a los estudiantes a adquirir las habilidades matemáticas que necesitan para leer artículos de economía menos técnicos, al menos, y así ser capaces de desempeñar una labor de economistas o de analistas financieros en el mundo contemporáneo” (Sydsaeter y Hammond, 1996, p. xvii).

Está compuesto de veintidós capítulos y cuatro anexos. Se destina un capítulo a ecuaciones en diferencia y otro para ED. Con respecto a estas últimas, el texto marca el camino a seguir en el capítulo precedente referido a ecuaciones en diferencia.

Utilizando vocabulario coloquial, sin pérdida de formalidad, presenta generalidades de ED en forma resumida y con ejemplos sencillos de fácil comprensión.

Inmediatamente presenta la teoría cualitativa para ED pero solo para introducir campos de pendiente para el trazado de curvas solución.

Después se tratan los métodos analíticos para la resolución de EDO de primer orden, cada uno acompañado por ejemplos resueltos y ejercicios propuestos, involucrando modelos propios de la economía que da lugar a la interpretación de los mismos como de su solución.

Este libro, finaliza la exposición sobre EDO de primer orden con una sección donde se exponen en la teoría cualitativa y la estabilidad apelando a modelos económicos usuales en microeconomía.

Similar es al abordaje que se hace de las ED lineales de orden superior. Cada sección cierra con ejercicios propuestos diferenciados en “Problemas” y “Problemas avanzados” en el que los autores se permiten introducir modelos reales de la teoría económica.

REFLEXIONES FINALES

Algunos de los textos revisados (I.1, II.1, II. 2, II.3, II.4, II.5) inician el estudio con la presentación de definiciones básicas de ED y terminología específica (por ejemplo, orden de una ED, solución particular, solución general, etc.). Si bien el orden en que aparecen los diferentes temas varía, el tratamiento que realizan es en esencia el mismo.

En concordancia con lo señalado por Martínez Bonafé (Martínez Bonafé, 2008), en la mayoría de los textos examinados se trabaja de manera similar: estudio de métodos analíticos de resolución de ED que pueden ser clasificadas como separables, lineales, exactas. Sustituciones y cambios de variables que permitan reducir a ED del tipo mencionado antes. Ecuaciones diferenciales de orden superior.

En el caso de los sistemas de ED ocurre algo parecido: se estudian métodos analíticos para resolver sistemas lineales y luego se extiende dicho tratamiento a los sistemas casi lineales. Entre los textos analizados y en lo concerniente a EDP, muy pocos utilizan los métodos numéricos para darles solución.

Si bien son omnipresentes los métodos algebraicos en casi todos los libros de textos analizados, existe un claro intento de incorporar los métodos cualitativos y numéricos.

Sin embargo, el único que realmente logra resaltar la riqueza de estos métodos es II.1, puesto que todos los temas los aborda integrando los diferentes enfoques recalcando que, aún cuando sea posible resolver en forma analítica alguna ED, siempre es importante reconocer como se ven las soluciones, esto es, el comportamiento a largo plazo de las mismas, y esto se logra mediante el empleo de técnicas cualitativas.

Por ello a lo largo de toda la obra adquieren un papel protagónico métodos cualitativos como los análisis de la línea de fase y de los planos de fase, así también los campos de direcciones. Las recomendaciones hechas desde la investigación educativa se ven reflejadas mayoritariamente en los libros de ediciones más recientes.

Por otro lado, la preferencia de los estudiantes por los métodos de resolución analíticos (Habre, 2000, Habre 2003; Zang, Fernández von Metzen y León, 2013) y el predominio en clase del enfoque algebraico (Artigue, 1995a, Moreno y Azcárate, 2003) puede entenderse si se tienen en cuenta los resultados obtenidos de la presente investigación. Dado que en los libros predominan los enfoques analíticos, es de esperarse que lo mismo suceda en las clases, debido a la influencia que los mismos tienen sobre las prácticas educativas como ya se ha señalado en una sección precedente (Michinel Machado y D^o Alesandro Martínez, 1993; Campanario y Otero, 2000).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarez Mendez, J.M. (2001). *Entender la Didáctica, entender el Curriculum*. Madrid: Miño y Dávila.
- Ander-Egg, E. (2010). *Métodos y Técnicas de investigación social, Vol. III: Cómo organizar el trabajo de investigación*. España: Lumen.
- Artigue, M. (1995a). La enseñanza de los principios del cálculo. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 97-140), México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (1995b). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 33-59), México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.
- Blanchard, P., Devaney R. y Hall G. (1998). *Ecuaciones diferenciales*. México: Thomson.
- Campanario, J.M. y Otero, J. (2000). La comprensión de los libros de texto, en F.J. Perales y P. Cañal (Eds.). *Didáctica de las Ciencias Experimentales* (pp 323-338). Alcoy: Marfil.

- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Universidad de Granada.
- Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (4), 455-472.
- Habre, S. (2003) Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. *International Journal of Mathematical, Educations in Science and Technology*, 35, (5), 651-662.
- Martínez Bonafé, J. (2002). *Políticas del libro escolar*. Madrid: Ediciones Morata.
- Martínez Bonafé, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. *RASE: Revista de la Asociación de Sociología de la Educación*, 1(1), 62-73.
- Michinel Machado, J. L. y D'Alesasandro Martínez, A (1993). Concepciones no formales de la energía en textos de Física para la escuela básica. *Revista de Enseñanza de la Física*, 6 (2), 37-53.
- Moreno Moreno, M. y Azcárate Giménez, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2), 265-280.
- Moya Pardo, C. (2008). Aproximación al concepto y tratamiento de texto escolar. *Cuadernos de Lingüística Hispánica*, 11, 133-152.
- Occelli, M. y Valeiras, N. (2013). Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: una revisión bibliográfica. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 133-152.
- Rasmussen, C. (2001) New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.
- Slisko, J. (2005). Errores en los libros de texto de Física: ¿Cuáles son y por qué persisten tanto tiempo? *Revista Electrónica Sinéctica*, 27, 13-23.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. (1996). *Matemática para el análisis Económico*. Madrid: Prentice Hall
- Zang, C. M.; Fernández von Metzen, G. A. y León M. N. (2013). Aportes para la evaluación de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales de primer orden. *Revista Premisa*, 56, 29-40.