RESOLUCIÓN DE ECUACIONES IRRACIONALES POR MEDIO DEL USO DE GRÁFICAS A PARTIR DE LA REINTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN

Claudio Gaete Peralta, Pedro Vidal-Szabó
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Universidad Bernardo O´Higgins, Chile.
claudio.gaete@ubo.cl; pedro.vidal_s@umce.cl

RESUMEN

Esta investigación indagó en el tratamiento realizado por diversos textos escolares, profesores de matemática y estudiantes de ingeniería en Chile, cuando deben resolver una ecuación irracional. Dicha indagación, de carácter cualitativo, evidenció falencias relacionadas con su resolución. Acorde a esto, se propone una resolución por medio del uso de gráficas de funciones, la cual otorga un sentido desde la visualización gráfica y complementa el uso de algoritmos y técnicas algebraicas, propias de los procesos tradicionales de enseñanza y aprendizaje en Chile. Esta propuesta, implicó la necesidad de reinterpretar el concepto de ecuación que actualmente predomina en el sistema escolar chileno.

PALABRAS CLAVE: Ecuación irracional. Función Raíz cuadrada. Gráfica.

INTRODUCCIÓN

Aunque busquemos hacer cambios, nos damos cuenta que es muy difícil transformar al sistema educativo. ¿Cuál es la fuerza principal que se opone a este cambio? Hay restricciones multifactoriales que incluyen aspectos políticos, afectivos, socioeconómicos, históricos, institucionales, las mismas costumbres didácticas y, sobre todo, la epistemología dominante en nuestro actual sistema educativo, la cual establece los contenidos matemáticos que deben ser tratados en clases y también el cómo deben ser tratados.

Usualmente, un profesor prefiere los textos escolares que sean más cercanos al programa de estudio. Esto produce que el profesor no tome decisiones sobre los cambios en su práctica profesional. Un ejemplo de esto, es la algoritmia en la búsqueda del conjunto solución de una ecuación, la cual está fuertemente instaurada en la matemática escolar chilena.

Encontrar una solución de una ecuación, equivale a “despejar la incógnita x” y la técnica para tal despeje está arraigada a lo algebraico. Sin embargo, existen ciertos tipos de ecuaciones, denominadas irracionales, en donde el álgebra no entrega necesariamente la solución de dicha ecuación, más bien, puede entregar soluciones que no satisfacen la ecuación original, denominadas soluciones espurias. Mendoza, Vásquez, Colina y Plasencia (2011) establecen que "los docentes en clase adoptan la misma estrategia exigiendo a sus estudiantes efectuar el procedimiento de comprobación para determinar si las raíces encontradas son solución o no, sin justificar plenamente la necesidad de tal esfuerzo" (p. 2). La resolución de este tipo de ecuaciones, resulta por lo general, un proceso memorístico, sin mayor posibilidad de comprensión, por parte del estudiante e inclusive por parte de algunos docentes, sobre por qué aparecen soluciones espurias. Dicho proceso acarrea dificultades en la comprensión más profunda sobre la tarea de buscar el conjunto solución de una ecuación irracional.

Cantoral (2013) señala que:

> En ciertas ocasiones, el profesor presenta un problema, pero no destina suficiente tiempo para que sus estudiantes propongan soluciones y exploren posibilidades y en consecuencia no se promueve el desarrollo de su pensamiento matemático. Cuántas veces, por ejemplo, se permite que los estudiantes lleguen a la solución de un problema por medio de preguntas genéricas como: ¿Qué hacemos? ¿Ustedes qué piensan? ¿Alguien tiene una idea distinta? ¿Qué ocurrirá si en vez de esto, hacemos esto otro? Idealmente, debemos ser la mayoría de los profesores los que en este tipo de prácticas, por no decir la totalidad. (p. 81)

Para nosotros, resulta evidente que la forma actual de abordar este tipo de ecuaciones no permite realizar las preguntas genéricas antes señaladas, debido a que las metodologías que se utilizan para el tratamiento de las ecuaciones irracionales, resultan ser impuestas.

En esta investigación, buscamos dar una alternativa de enseñanza para abordar la resolución de las denominadas ecuaciones irracionales, dejando de lado procedimientos rutinarios, ligados a técnicas algebraicas que no explican por sí solas la presencia de soluciones espurias.

Vidal (2009) analiza el concepto de raíz cuadrada en tres períodos específicos, a saber, en los años 1965,1981 y 1998, en donde se llevaron a cabo reformas educacionales en Chile. En su estudio, formula cuatro hipótesis. La primera señala que la transposición didáctica del álgebra de radicales ha permanecido invariante en su difusión en los libros de texto. La segunda hipótesis indica que en el tratamiento del álgebra de radicales en los libros de texto, se recurre a demostraciones basadas en el cambio de representaciones algebraicas que fallan en la secuenciación de los contenidos. Mientras que la tercera hipótesis indica que dicho tratamiento comunica errores conceptuales y procedimentales, evidenciándose rupturas epistemológicas con el saber matemático. Por último, la cuarta hipótesis del autor afirma que no han existido cambios en los enfoques paradigmático – epistemológicos de los autores de los libros de texto, pero si a nivel de los programas ministeriales

Vidal (2009) da cuenta de que la tercera hipótesis se cumple en los tres períodos, mientras que la segunda hipótesis se cumple en los dos primeros períodos, pero es superada en el tercero.

El propósito de esta investigación, es dar a conocer las falencias que actualmente existen en nuestro actual sistema educativo, a la hora de resolver ecuaciones irracionales. Además, buscamos promover la resolución de ecuaciones irracionales, a través de la reinterpretación del concepto de ecuación y por medio del uso de gráficas, "ya que se considera como una herramienta muy útil que permite poner los conocimientos en juego a un nivel funcional" (Morales, Alarcón, Pérez & Bautista, 2010, p. 11), entendiendo funcional como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. En ese sentido, creemos que los docentes de matemática, en general, no promueven la argumentación ni la resolución de ecuaciones en base a gráficas de funciones, probablemente porque consideran que su uso está desvinculado del concepto de ecuación, el cual posee una carga semiótica más algebraica que geométrica.

ANTECEDENTES

Ecuaciones irracionales en textos escolares

Con respecto a la resolución de este tipo de ecuaciones, Zañartu y Darrigrandi (2012) indican que "siempre, al resolver una ecuación que posea alguna incógnita en la cantidad subradical, debe comprobarse que la o las soluciones encontradas realmente satisfacen la ecuación" (p. 37). Por otro lado, Wisniewski (2002) señala que: "al resolver la ecuación radical $\mathrm{L(x) = P(x)}$ se puede aplicar el siguiente método:

$$\mathrm{L(x) = P(x) \Leftrightarrow L^2(x) = P^2(x)}$$

En este método siempre se debe verificar si las soluciones cumplen con la ecuación y eliminar raíces falsas" (p. 168). Resulta interesante notar que en general, dicha equivalencia no es cierta.

De Gisper (2008) introduce las ecuaciones irracionales de la siguiente manera:

> Se designan como ecuaciones irracionales aquellas en las que aparece alguna raíz cuadrada que contiene en el radicando la incógnita de la ecuación como, por ejemplo: $\sqrt{x+2} = 3$. Para resolver esta ecuación, hay que elevar al cuadrado. La operación de elevar al cuadrado se realiza debido a que es la operación inversa a la extracción de la raíz cuadrada (si se realiza una operación sobre su inversa ambas desaparecen). Se elevan los dos miembros de la igualdad; al desaparecer la raíz se obtiene una ecuación que se sabe resolver. Así, $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (3)^2$ queda como $x + 2 = 9$. Agrupando a continuación los términos semejantes se obtiene finalmente $x = 9 - 2$. Haciendo la cuenta $9 - 2$ se obtiene la solución de la ecuación, que en este caso es $x = 7$ (p. 233)

Zañartu et al (2012), establece que “en una ecuación con radicales, las soluciones encontradas algebraicamente deben ser siempre comprobadas, de modo que la ecuación original esté definida para valores reales” (p. 39).

Asimismo, Saiz y Blumenthal (2012) sugieren que “las ecuaciones irracionales, al igual que las demás ecuaciones, siempre hay que comprobarlas. Para ello, se debe verificar que se cumpla la igualdad planteada en la ecuación irracional al reemplazar la incógnita, por el valor encontrado” (p. 49)

Podemos notar que, en general, estos textos escolares dan énfasis a la verificación de la solución, pero no dan un argumento mayor del por qué es necesario hacerlo. En pocas palabras, se acentúa lo procedimental, mas no se justifica el método.

Algunas resoluciones de docentes y estudiantes chilenos en la resolución de una determinada ecuación irracional

La presente investigación se centró en estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una determinada universidad chilena junto con un grupo de profesores de matemática que actualmente trabajan en el sistema escolar chileno.

Chevallard, Marianna y Gascón (1997) mencionan un problema didáctico importante: sobre la dificultad de hallar o construir una situación en la que el alumno actúe, además de como alumno, como un verdadero matemático, responsabilizándose de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean.

La formulación de este problema didáctico parte de la constatación de un hecho que se repite en todos los niveles educativos: los alumnos tienden a delegar al profesor la responsabilidad de la validez de sus respuestas, como si no les importara el que éstas sean verdaderas o falsas; como si el único objetivo de su actuación fuera contestar a las preguntas del profesor y en nada les comprometiera la coherencia o validez de su respuesta.

Se les presenta a los estudiantes y profesores, la tarea de resolver la siguiente ecuación irracional:

$$\boldsymbol{\sqrt{x} - 3 = \sqrt{x + 3}}$$

Al enfrentarse a esta tarea, tanto estudiantes como profesores llegan, en su mayoría y de manera algebraica, a la solución $\mathbf{x} =$ □ (ver figuras 1 y 2). Un simple reemplazo da cuenta que ésta no es efectivamente la solución de esta ecuación. Es más, esta ecuación no tiene solución. El uso de gráficas asociadas a esta ecuación, podría dar paso a una justificación sobre por qué el conjunto solución es vacío (ver figura 3).

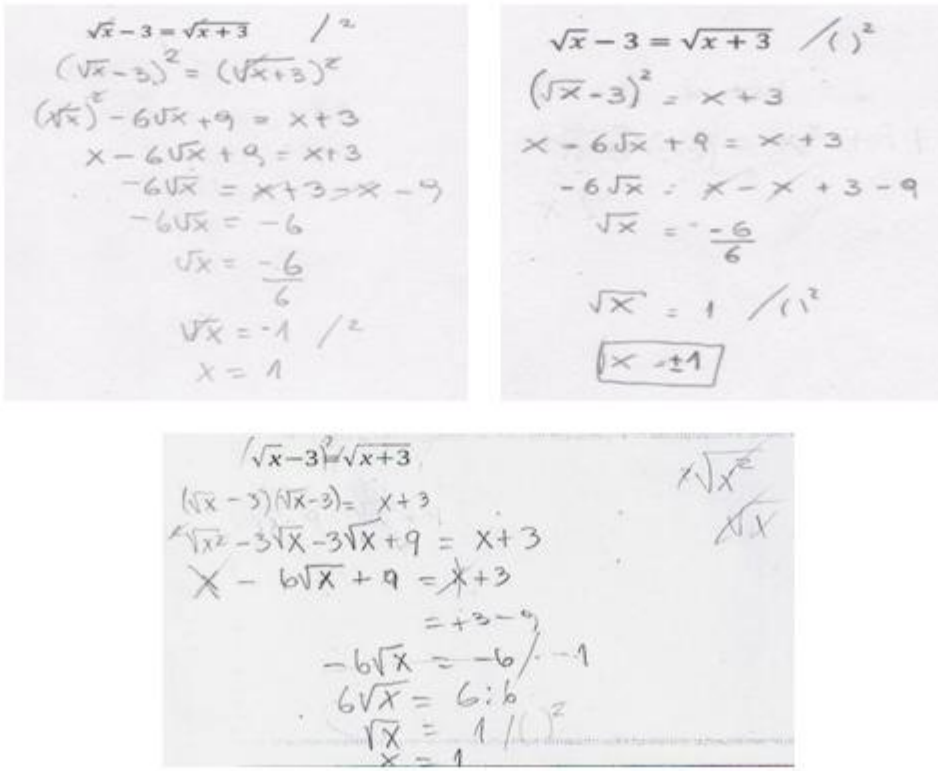


Figura 1: Resoluciones de la ecuación irracional hecha por estudiantes

Los estudiantes y profesores consultados encuentran, en un proceso algebraico, lo que consideran una solución. Sin embargo, al surgir de ellos la necesidad de reemplazar dicha solución en la ecuación, se dan cuenta que no satisface la igualdad, pero no son capaces de explicar lo sucedido.

Chevallard et al (1997) señalan como irresponsabilidad matemática por parte de los alumnos, el hecho de no verificar que la solución que obtuvieron, sea efectivamente, la solución de la ecuación irracional.

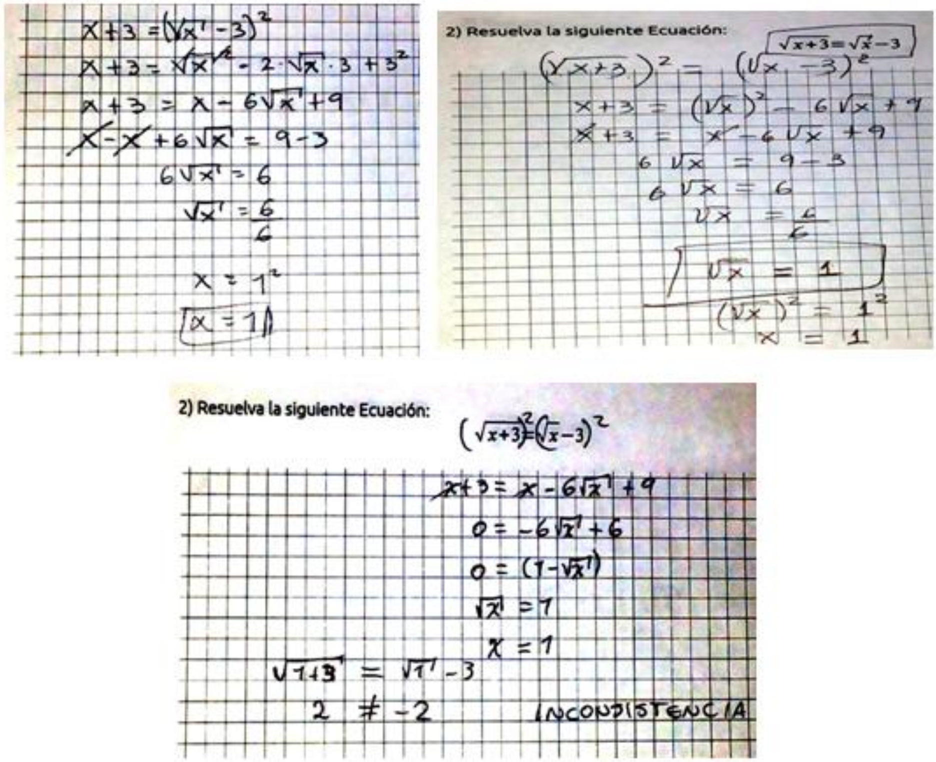


Figura 2: Resoluciones de la ecuación irracional hecha por profesores

La forma tradicional como se ha venido estudiando la resolución de ecuaciones irracionales no permite en el desempeño del estudiante un desarrollo del pensamiento crítico que dé paso a cuestionar los procedimientos e indagar, reflexivamente, en lo que efectivamente se está haciendo a modo de justificación de la técnica empleada, entendiendo ese procedimiento como algo adicional y superfluo. En base a esto, resulta importante abordar la resolución de este tipo de ecuaciones desde otro enfoque.

Existen evidencias que hacen referencia al hecho de que construir el concepto de raíz cuadrada representa una dificultad de tipo cognitivo (Gamboa, 2013). En nuestro caso, y ligado a este tipo de dificultad, en la posible “pérdida” de soluciones en una ecuación irracional, hay de fondo un análisis de la raíz cuadrada, como función, y no como un mero operador.

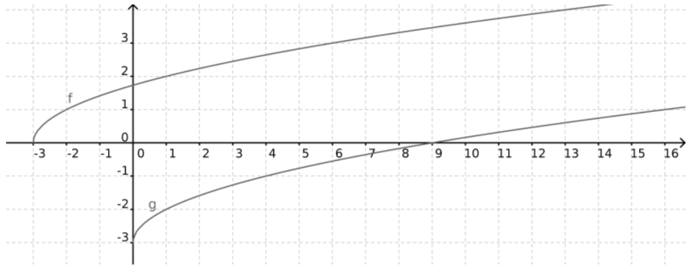


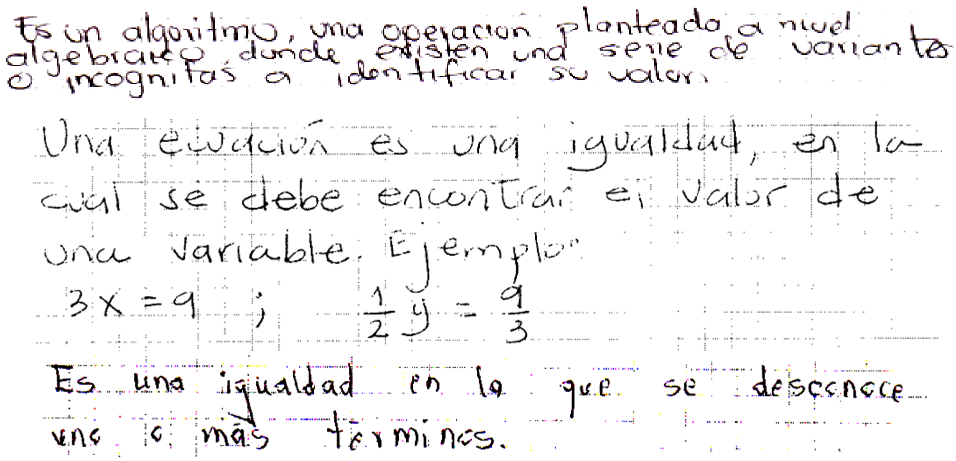
Figura 3: Gráficas de las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x} + \square}$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{3}$

A partir de esto, levantamos una propuesta que apunte a cambiar la forma en la que es abordada una ecuación irracional, dejando de lado la tan utilizada técnica algebraica y otorgando una herramienta que permita, tanto a profesores como alumnos, resolver una ecuación. Para esto, recurriremos al estudio del dominio, recorrido y gráfica de funciones de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \sqrt{\mathbf{bx} + \mathbf{c}}$, para ciertos valores de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, esta forma de resolver ecuaciones irracionales, requiere una reinterpretación del concepto de ecuación que sea acorde a este enfoque.

Sobre la definición del concepto de ecuación

Se les pidió a profesores de diferentes niveles educativos[1], que definieran el concepto de ecuación. A continuación, se adjuntan algunas respuestas (ver figura 4):



Es un algoritmo, una operación planteado a nivel algebraico donde existen una serie de variantes o incognitas a identificar su valor.

Una ecuación es una igualdad, en la cual se debe encontrar el valor de una variable. Ejemplo:

$3x = 9$; $\frac{1}{2} y = \frac{9}{3}$

Es una igualdad en la que se desconoce uno o más terminos.

[1] Docentes de Matemática de diversas localidades de Chile.

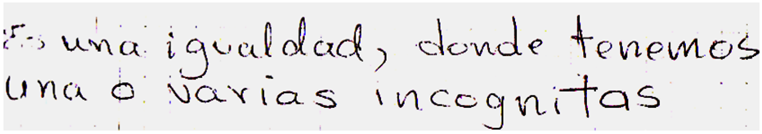


Figura 4: Definiciones del concepto de ecuación dadas por diferentes profesores de matemática del sistema escolar chileno

Las definiciones del concepto de ecuación, de la figura 4, no hacen referencia alguna del concepto de función. Más bien, ecuación es relacionado a conceptos tales como igualdad, términos e incógnitas. Tampoco lo hacen algunas definiciones dadas en textos escolares. (ver tabla 1)

Fuente	Definición de ecuación	Resumen
Real Academia Española (2014)	"igualdad que contiene una o más incógnitas"	igualdad con incógnitas
Baldor (2007)	"una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas, y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas" (p.122)	igualdad entre cantidades
Spiegel (2007)	"una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que se denominan miembros de la misma." (p.67)	igualdad entre expresiones
Arya y Lardner (2009)	"una ecuación es una proposición que expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas. Por lo regular involucra una o más variables y el símbolo de igualdad, =." (p.60).	proposición
Ortiz (2012)	"cuando tenemos una igualdad donde una letra representa un valor desconocido que hay que dilucidar, cuál es, se habla de ecuación y cuando despejamos la letra que representa el valor desconocido, que llamamos incógnita, decimos que estamos resolviendo esa ecuación" (p.72).	valor desconocido

Tabla 1: Definiciones del concepto ecuación en diversos textos escolares.

SOBRE LA NECESIDAD DE REINTERPRETAR EL CONCEPTO DE ECUACIÓN

La función raíz cuadrada se estudia en segundo año de enseñanza media, en la tercera unidad, llamada Álgebra, donde se analiza su dominio, recorrido y gráfica, según los programas establecidos en Chile, por el Ministerio de Educación (2011) y se proponen determinadas actividades (ver figuras 5 y 6).

A pesar de que el currículum escolar chileno se preocupa de estudiar conceptos relativos al análisis gráfico de la función raíz cuadrada, tanto de forma manual como tecnológica, resulta interesante notar que la resolución de ecuaciones irracionales sigue apegada, tanto en textos escolares, como en las propias prácticas de estudiantes y profesores, a estrategias meramente algebraicas. Posiblemente, una de las mayores dificultades a la hora de resolver una ecuación irracional, se encuentre en la propia definición que comúnmente otorgan profesores y textos escolares. Como pudimos ver anteriormente, las definiciones del concepto ecuación no se relacionan al de función, lo que limita su resolución a técnicas algebraicas y verificaciones sin mayor fundamento. La definición del concepto de ecuación que se revisó, entabla una normativa implícita en el tratamiento de las mismas, lo cual se acopla al uso del álgebra, desvinculado de lo gráfico.

AE 03

Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

1

Estudian la función raíz cuadrada $f(x) = a\sqrt{bx}$, con $bx \in \mathbb{R}_0^+$ y $a \in \mathbb{R}$.

Construyen tablas de valores para distintos valores de a y b. Por ejemplo, para:

- $a = b = 1$
- $a = -2$ y $b = 1$
- $a = 1$ y $b = -2$
- $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -5$

Observaciones al docente: *Se sugiere observar las tablas de valores que construyen los estudiantes y utilizar los errores. Por ejemplo, algunos estudiantes podrían pensar que no se puede obtener el valor aproximado de una raíz solo por el hecho de ver el signo negativo en el radicando. Algunos alumnos también pueden considerar números negativos de la función $j(x) = \sqrt{x}$ en la tabla de valores y no percatarse de que ese valor no existe en los números reales; por ejemplo, quizás escriban $x = -4$, $j(-4) = -2$*

AE 03

Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

- Representan gráficamente la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \in \mathbb{R}_0^+$ en forma manual y usando herramientas tecnológicas.
- Identifican las características gráficas de una función raíz cuadrada, incluyendo dominio y recorrido.
- Argumentan acerca de las variaciones que se producen en la gráfica al modificar los parámetros de la función raíz cuadrada. Por ejemplo, caracterizan la función $f(x) = \sqrt{x - a}$ con $x - a > 0$, observando en el gráfico la traslación horizontal que resulta al variar el parámetro a.

Figura 5: Actividad de aprendizaje propuesta por el Ministerio de Educación (p. 62)

Analizan la gráfica de las funciones y responden para cada uno de los casos estudiados:

- ¿cuál es el dominio?
- ¿cuál es el recorrido?

Describen los cambios producidos en los gráficos al variar los valores de los parámetros a y b.

4

Sea la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x-h} + k$, con $h, k \in IR$. Responden:

- ¿cuál es su dominio?
- ¿cuál es el recorrido?

Describen los cambios producidos en los gráficos al variar los valores de los parámetros h y k.

Observaciones al docente: *Se sugiere usar algún graficador para estudiar mejor los cambios que se registran al variar los distintos parámetros y analizar el dominio y el recorrido de todos esos casos.*

Figura 6: Ejemplos de actividades propuestas por el Ministerio de Educación (p. 69)

Con la finalidad de comenzar a generar herramientas para la resolución de ecuaciones irracionales, reinterpretaremos el concepto de ecuación y solución de una ecuación, como sigue: Sean **f** y **g** funciones reales de variable real. Entenderemos por ecuación de incógnita **x**, a una expresión de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Una solución de dicha ecuación, es un número real cuya imagen es la misma bajo la acción de **f** y **g**. En términos gráficos, entenderemos por solución de una ecuación, a todos aquellos puntos de la abscisa, o eje X, en donde las gráficas de dichas funciones se intersecan. Note que esta reinterpretación, implícitamente pide que $\mathbf{Domf} \cap \mathbf{Domg} \neq \emptyset$. En caso contrario, la ecuación no tendría solución (o bien, el conjunto solución es vacío).

Deseamos otorgar a estudiantes y profesores, herramientas que permitan mejorar la comprensión del por qué se generan las soluciones espurias al resolver ecuaciones irracionales. Para esto último, el uso de procesadores gráficos resulta útil para complementar la enseñanza relacionada a la resolución de este tipo de ecuaciones, por medio del análisis gráfico. Por ejemplo, en GeoGebra se puede visualizar, mediante un deslizador, que estas funciones no se intersecan y por lo tanto, la ecuación $\sqrt{\mathbf{x+3}} = \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{3}$ no tiene solución (ver figura 6).

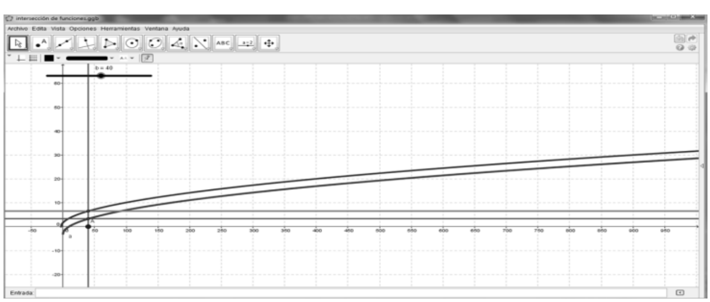


Figura 7: Visualización dinámica de la ecuación $\sqrt{\mathbf{x+3}} = \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{3}$ en términos gráficos.

RECURSO GEOMÉTRICO

Para resolver $\sqrt{\mathbf{x+3}} = \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{3}$, consideramos dos funciones $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{x+3}}$ y $\mathbf{g(x)} = \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{3}$. Ambas funciones en el plano cartesiano tienen una única representación gráfica, en que si existe alguna intersección, entonces habrá una preimagen para la cual se tengan iguales imágenes. Si existe aquella preimagen, entonces diremos que la ecuación irracional tiene solución.

Recordemos las traslaciones horizontales y verticales en las gráficas:
$\mathbf{f_1(x)} = \mathbf{f_0(x)} + \mathbf{k}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$, es decir, que la gráfica de $\mathbf{f_1}$es la gráfica de $\mathbf{f_0}$trasladada verticalmente en $\mathbf{k}$ unidades. Si $\mathbf{k} > 0$, entonces será hacia arriba, en caso contrario, excluyendo el cero, será hacia abajo.
$\mathbf{f_1(x)} = \mathbf{f_0(x-k)}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$, es decir, que la gráfica de $\mathbf{f_1}$es la gráfica de $\mathbf{f_0}$trasladada horizontalmente en$\mathbf{k}$ unidades. Si $\mathbf{k} > 0$, entonces será hacia derecha, en caso contrario, excluyendo el cero, será hacia la izquierda.

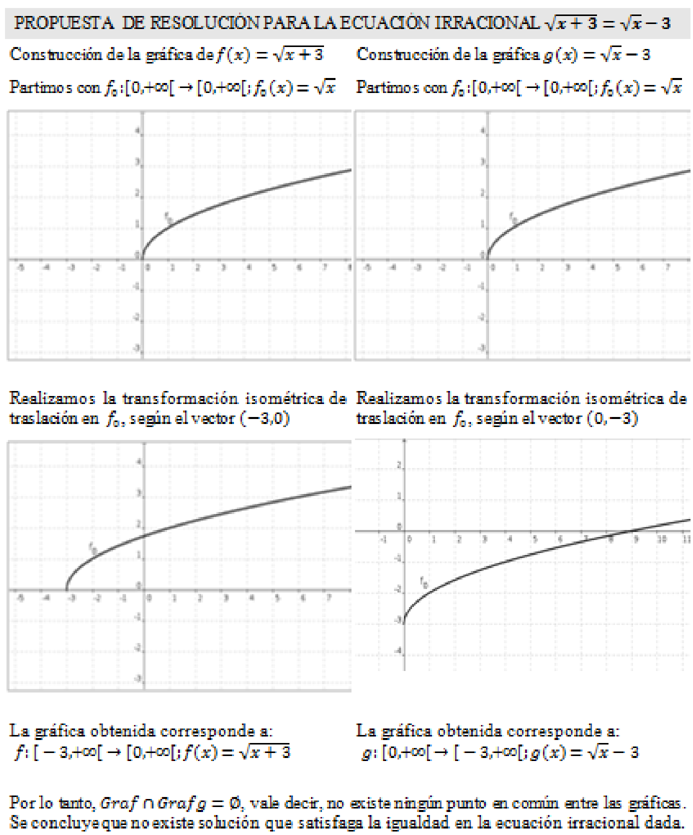


Figura 8: Resolución de la ecuación irracional $\sqrt{\mathbf{x+3}} = \sqrt{\mathbf{x}} - \mathbf{3}$ a partir de un análisis gráfico

CONCLUSIONES

Las dificultades y deficiencias en la resolución de ecuaciones irracionales es un tema actual en el sistema educativo chileno. Su tratamiento, apoyado de textos escolares y del discurso de profesores, actualmente se limita a técnicas algebraicas, en donde se obtiene un candidato a solución, seguida de una comprobación de esta, para verificar si efectivamente es la solución. El currículum escolar, actualmente otorga conceptos interesantes para enfocar de manera distinta la resolución de este tipo de ecuaciones y sin embargo, dichos enfoques no se han incorporado del todo en la enseñanza del concepto de ecuación irracional y su resolución.

El presente trabajo evidenció falencias en el tratamiento que se le da a este tipo de ecuaciones, a la hora de encontrar una posible solución, tanto en textos escolares como en los propios profesores. Sin duda, esto debe ser considerado como un obstáculo didáctico en Chile.

Los motivos que causan las dificultades y falencias en la resolución de ecuaciones irracionales, según nuestra perspectiva, son dos: la manipulación algebraica a la hora de encontrar una solución que invisibiliza la transformación que sufre la ecuación irracional, pudiendo desvirtuar a las soluciones que emergen a partir de ello, llegando en algunos casos a soluciones espurias.

Por otro lado, la propia definición de ecuación, que actualmente predomina en nuestro sistema escolar, da un marco de tratamiento a las ecuaciones irracionales en donde domina el uso de técnicas algebraicas, dejando en un estado tácito las técnicas gráficas para determinar el conjunto solución de una determinada ecuación irracional. Al reinterpretar el concepto de ecuación, en términos ligados al concepto de función y gráfica, el tratamiento de este tipo de ecuaciones adquiere un predominio por sobre la manipulación algebraica, presentando niveles de comprensión más profundos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arya, J. y Lardner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía*. México: Pearson.
Baldor, J. (2007). *Álgebra*. México: Grupo Editorial Patria.
Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Barcelona: Gedisa.
Chevallard, Y., Marianna, B. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-HORSORI.
De Gisper, C. (2008). *El mentor de Matemáticas*. Barcelona: Océano.

Gamboa, M. (2013). *Construcción Cognitiva de la Raíz Cuadrada. Una mirada desde la teoría APOE*. Tesis de Magíster no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Mendoza, L., Vásquez, J., Colina, F. y Plasencia, M. (2011). *Determinación de Soluciones Espurias para Ecuaciones Irracionales*. Recuperado el 10 de Noviembre de 2015 de http://www.academia.edu/637958/Determinación_de_Soluciones_Espurias_para_Ecuaciones_Irracionales_CO_

Ministerio de Educación. (2011). *Matemática. Programa de estudio Segundo año medio. Santiago, Chile*. Recuperado el 06 de Diciembre de 2015 de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_33_1.pdf

Morales, A., Alarcón, N., Pérez, M. y Bautista, L. (2012). *La Argumentación gráfica en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Trabajo presentado en la XXXVIII Semana de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Ortiz, A. (2012). *Matemática. Primer año medio. Texto para el estudiante*. Santiago: McGraw-Hill.

Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 24 de Mayo de 2015 de http://dle.rae.es/?id=EMMSSFY8

Saiz, O., Blumenthal, V. (2012). *Matemática Tercero Medio. Texto del Estudiante*. Santiago: Cal y Canto.

Spiegel, M. (2007). *Álgebra Superior*. México: McGraw- Hill.

Vidal, R. (2009). *Las raíces y radicales en libros de textos en Chile (1969-2009). Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Wisniewski, P. (2002). *Introducción a las Matemáticas Universitarias*. México: McGraw-Hill.

Zañartu, M. y Darrigrandi, F. (2012). *Matemática, Segundo Medio*. Santiago: Santillana.