

# LA UTILIZACIÓN DEL GEOGEBRA, COMO HERRAMIENTA COGNITIVA DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO ECUADOR

Javier Mendoza C., Rómel Insuasti C., Jenner Baquero  
ESPOCH, FCP - Ecuador.  
mendoza9000@yahoo.es, rminsuasti@yahoo.es, jenniferbaquero@gmail.com

## RESUMEN

La presente investigación realizada en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en la Facultad de Ciencias Pecuarias, Carrera de Ingeniería en Industrias Pecuarias (Riobamba - Ecuador), el cual enfoca la enseñanza matemática con la utilización del software libre GeoGebra, con un enfoque cuali-cuantitativo longitudinal en un grupo de estudiantes de bajo rendimiento de primer nivel de carrera, y se mide estadísticamente su avance académico alcanzado. Posteriormente con ayuda de las Cadenas de Markov se determina la mejor combinación metódica que optimice el rendimiento estudiantil. Los resultados mostraron dos efectos interesantes.

**PALABRAS CLAVE:** Didáctica matemática. GeoGebra. Aprendizaje Activo.

## INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la aplicación del GeoGebra (2014) como herramienta didáctica que facilita el aprendizaje de las ciencias exactas en las diversas partes del mundo aborda temas interesantes como es aquel que busca unificar lógica matemática y geometría por un lado y por otro el de posibilitar la experiencia en el lenguaje abstracto de los estudiantes; a partir de la concreción de contenidos en la abstracción de saberes por medio de este software.

La novedad de este estudio radica en el hecho de que se implementan la programación lineal y los procesos estocásticos para abordar el análisis del rendimiento; esto, para conocer el grado de impacto de cada uno de los métodos usados para provocar el rompimiento que genere conocimiento en el estudiante; y de esa manera determinar cuál de ambas propuestas; cognitiva o psicomotriz puede generar mayor rendimiento en el estudiante. La presente investigación es útil para los maestros de nivel medio cuanto aquellos que ejercen la docencia en la educación superior pues les permite abordar el rendimiento estudiantil vinculado la acción de la didáctica con un enfoque más práctico que teórico en el cual se encuentran los mejores resultados; esto, en

detrimiento hasta cierto punto de la clase magistral. Es importante esta investigación por cuanto propende a la realización teórico-práctica de la matemática mediante el uso de recursos del área de la didáctica que faciliten la construcción de los aprendizajes significativos de los estudiantes que se valen de un software fácil de usar y por sobre todo gratuito y al alcance de todos (Hohenwarter, M. 2004) (Daniels, 2001).

La dificultad de entender el lenguaje abstracto de una ciencia formal como la matemática es solucionado en parte gracias a la utilización del GeoGebra el cual si bien es cierto no elimina dicho lenguaje abstracto pero facilita su comprensión mediante aplicaciones concretas; que es la temática en la cual se basa este estudio.

Si el presente estudio propusiese un nuevo medio didáctico de transponer los contenidos científicos vinculados a las matemáticas no podríamos estar seguros de la importancia de dicha propuesta pues a la dificultad en el ámbito matemático tendríamos que sumar la incertidumbre de la idoneidad del recursos para las sesiones áulicas (Bishop, 1993) pero este hecho no se da por cuanto los estudiantes viven en la era de la información y las sociedades del conocimiento (Ginsburg, 1997); prácticamente todos manejan computadores y software sencillo. La justificación normativa de este estudio tiene su soporte y sustento en la Ley Orgánica de Educación Superior mediante la cual se establece la necesidad que las universidades tienen de hacer de su estudio pertinente en las áreas de investigación, vinculación y academia. Este estudio aborda los 3 aspectos expresados. En el desarrollo del presente trabajo se abordan dos tipos de enfoques de contenidos curriculares: teórico para desarrollo cognitivo y pragmático basado en el desarrollo psicomotriz.

## **METODOLOGÍA**

La lógica de la investigación fue la siguiente: Se buscó el grupo de menor rendimiento a fin de aplicar sobre él el recurso didáctico GeoGebra con enfoque cuali-cuantitativo longitudinal de la siguiente forma:

- Preparación del cuaderno didáctico de contenidos curriculares.
- Aplicación de 28 de horas de clases magistrales expositivas de refuerzo cognitivo.
- Evaluación cuantitativa de la primera fase
- Implementación de las sesiones combinadas de aula cognitivo-GeoGebra
- Evaluación cuantitativa de la segunda fase.
- Tabulación de datos de los resultados de los dos momentos de evaluación.
- Validación de hipótesis científica mediante comparación de medias a través de la prueba Z, elaboración de Cadenas de Markov de probabilidades de rendimiento de los grupos bajo y en la media y determinación de mejor combinación metódica que optimice el rendimiento estudiantil.

## RESULTADOS

Resumen de las evaluaciones de la investigación. (Los datos y gráficos expuestos a continuación son tomados y realizados por los investigadores).

Listado	Cognitivo magistral	Pragmático aplicativo GeoGebra
1	12	12
2	6	10
3	14	10
4	6	14
5	8	12
6	14	12
7	14	10
8	10	10
9	12	10
10	12	14
11	12	12
12	10	10
13	10	12
14	12	14
15	10	12
16	6	14
17	10	12
18	14	14
19	10	14
20	14	14
21	6	14
22	6	14
23	14	10
24	6	10
25	6	14
26	8	10
27	6	10
Promedio/% de 20	9,93/0,496	12/0,6

Cuadro. N. 1. Evaluación de la investigación

Explicación: La tabla anterior registra tres columnas: la primera de la izquierda representa el número de lista de los estudiantes tanto del grupo de experimentación (segunda columna) cuanto de control (tercera columna). Los gráficos posteriores presentan las tendencias de dichas distribuciones; se aclara que las calificaciones registradas pertenecen al rango cero a 14 puntos.

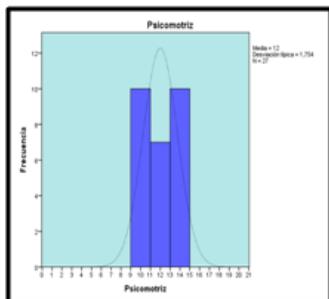


Gráfico .N. 1 Tendencia rendimiento psicomotriz

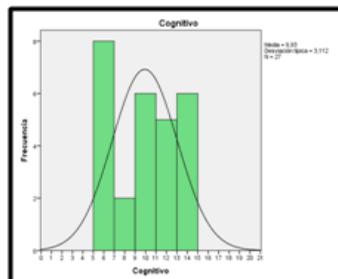


Gráfico .N. 2 Tendencia rendimiento cognitivo

Formulación de la hipótesis científica de la investigación:

**Ho:** Las distribuciones cognitivo y psicomotriz son iguales:  $p \geq 0,05$

**Hi:** Las distribuciones son significativamente diferentes:  $p < 0,05$

Listado	Cognitivo	Psicomotriz	Resumen	Comparado	Listado	Resumen	Comparado
1	12	12	12	Cognitivo	1	12	Psicomotriz
2	6	10	6	Cognitivo	2	10	Psicomotriz
3	14	10	14	Cognitivo	3	10	Psicomotriz
4	6	14	6	Cognitivo	4	14	Psicomotriz
5	8	12	8	Cognitivo	5	12	Psicomotriz
6	14	12	14	Cognitivo	6	12	Psicomotriz
7	14	10	14	Cognitivo	7	10	Psicomotriz
8	10	10	10	Cognitivo	8	10	Psicomotriz
9	12	10	12	Cognitivo	9	10	Psicomotriz
10	12	14	12	Cognitivo	10	14	Psicomotriz
11	12	12	12	Cognitivo	11	12	Psicomotriz
12	10	10	10	Cognitivo	12	10	Psicomotriz
13	10	12	10	Cognitivo	13	12	Psicomotriz
14	12	14	12	Cognitivo	14	14	Psicomotriz
15	10	12	10	Cognitivo	15	12	Psicomotriz
16	6	14	6	Cognitivo	16	14	Psicomotriz
17	10	12	10	Cognitivo	17	12	Psicomotriz
18	14	14	14	Cognitivo	18	14	Psicomotriz
19	10	14	10	Cognitivo	19	14	Psicomotriz
20	14	14	14	Cognitivo	20	14	Psicomotriz
21	6	14	6	Cognitivo	21	14	Psicomotriz
22	6	14	6	Cognitivo	22	14	Psicomotriz
23	14	10	14	Cognitivo	23	10	Psicomotriz
24	6	10	6	Cognitivo	24	10	Psicomotriz
25	6	14	6	Cognitivo	25	14	Psicomotriz
26	8	10	8	Cognitivo	26	10	Psicomotriz
27	6	10	6	Cognitivo	27	10	Psicomotriz

Cuadro. N. 2. Comparativo de muestras

Explicación: Al ser 54 los datos numéricos para analizar se debe elegir la estadística paramétrica basada en la prueba Z; asumiéndose que la distribución conjunta de los momentos cognitivo y psicomotriz por ser de un tamaño muestral grande es normal.

Cognitivo					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	6	8	9,9	29,6	29,6
	8	2	2,5	7,4	37,0
	10	6	7,4	22,2	59,3
	12	5	6,2	18,5	77,8
	14	6	7,4	22,2	100,0
	Total	27	33,3	100,0	
Perdidos	Sistema	54	66,7		
Total		81	100,0		

Cuadro. N. 3. Distribución cognitivo

Psicomotriz					
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	10	10	12,3	37,0	37,0
	12	7	8,6	25,9	63,0
	14	10	12,3	37,0	100,0
	Total	27	33,3	100,0	
Perdidos	Sistema	54	66,7		
Total		81	100,0		

Cuadro. N. 4 Distribución psicomotriz

Estadísticos			
		Cognitivo	Psicomotriz
N	Válidos	27	27
	Perdidos	54	54
Media		9,93	12,00
Desv. tip.		3,112	1,754

Cuadro. N. 5 Resumen estadístico de distribuciones

Explicación: los cuadros anteriores resumen el análisis de estadístico descriptivo de las distribuciones cognitiva y psicomotriz. Dicho estadístico analiza los casos válidos, los casos perdidos; las medias y distribuciones de las colas de distribución de los casos cognitivo y psicomotriz. Estos datos servirían para el cálculo de la prueba paramétrica Z.

Medias y desviaciones	Valor
X1 Cognitivo	9,93
X2 Psicomotriz	12
s1	3,112
s2	1,754

Cuadro. N. 6. Medias y desviaciones muestrales

### Prueba estadística Z

Hipótesis: Las medias de rendimiento entre el método cognitivo y psicomotriz son iguales

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 ; p_{\text{valor}} \geq 0.05$$

Las medias de rendimiento entre el método cognitivo y psicomotriz son significativamente diferentes.

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 ; p_{\text{valor}} < 0.05$$

$$z = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}} = \frac{9,93 - 12}{\sqrt{\left(\frac{3,112^2}{27} + \frac{1,754^2}{27}\right)}} = \frac{-2,06}{0,687} = -2,99$$

Decisión: Como p valor = -2.99 < -1.96 (valor crítico al 95% de probabilidad) se asume que las distribuciones cognitiva y psicomotriz no son iguales.

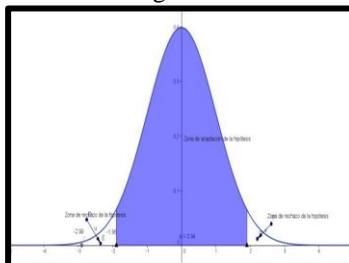


Gráfico .N. 3. Prueba estadística Z

La respuesta anterior plantea las siguientes preguntas científicas:

- ¿Es suficiente esta información para concluir que el momento de la aplicación psicomotriz es más adecuado que la cognitiva?
- ¿Existe una cadena regular de probabilidades que permita predecir el rendimiento de los estudiantes en futuras evaluaciones?
- ¿Hay una forma óptima de combinar clases magistrales de desarrollo cognitivo con clases prácticas usando GeoGebra de modo que el rendimiento de los estudiantes sea máximo?

### Investigación de Operaciones: Procesos Estocásticos-Cadenas de Markov

Detalle:

Rojo: Rendimiento más bajo que la media esperada (7/14).

Amarillo: Rendimiento cercano a la media (7/14).

Verde: Rendimiento estudiante que alcanzó el máximo puntaje en la evaluación diagnóstica.

Lista	Estado 0	Estado 1
1	12	12
2	6	10
3	14	10
4	6	14
5	8	12
6	14	12
7	14	10
8	10	10
9	12	10
10	12	14
11	12	12
12	10	10
13	10	12
14	12	14
15	10	12
16	6	14
17	10	12
18	14	14
19	10	14
20	14	14
21	6	14
22	6	14
23	14	10
24	6	10
25	6	14
26	8	10
27	6	10
Promedio	9,92592593	12

Cuadro. N. 7. Transición de estados de rendimiento

Las medias en los momentos “antes” y “después” porque pertenecen a las evaluaciones de los logros de aprendizaje diagnóstico (retrospectivo) y aquel asociado a la aplicación del GeoGebra (prospectivo); los valores cuantitativos van de los cero a los catorce puntos el valor máximo; en el mejor de.

Frecuencia Estado 0	Frecuencia Estado 1
6	10
5	7
16	10

Cuadro. N. 8. Frecuencia de rendimiento

Combinación	Frecuencia	Probabilidad
VV	2	33,33
VA	1	16,67
VR	3	50,00
AA	2	40,00
AV	2	40,00
AR	1	20,00
RR	6	37,50
RV	6	37,50
RA	4	25,00
Total	27	

Cuadro. N. 9 Matriz de probabilidad Estados 0 y 1

Explicación: La columna de la izquierda muestra la transición de estados de rendimiento en los estudiantes; así: VV significa el número de casos de estudiantes en la media en el estado 0 se quedaron en la media en el estado uno (frecuencia 2).AR por ejemplo muestra que 2 estudiantes que estuvieron en el puntaje 12 (casi alcanza los aprendizajes) pasaron en el estado 1 a bajar su rendimiento hasta ubicarse por debajo de la media.

	R	A	V	Total
R	0,375	0,25	0,375	1
A	0,2	0,4	0,4	1
V	0,5	0,17	0,33	1

Cuadro. N. 10 Matriz de probabilidad

Explicación: El cuadro previo se explica mediante un ejemplo.- La probabilidad RR p(1,1) se obtuvo de la siguiente manera: si en el estado cero existían 16 estudiantes en "R" 6 de esos estudiantes permanecieron en "R" en el estado 1; lo que hace de  $p = 0,375$ .

$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0,17 & 0,33 \end{pmatrix}^2$	$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,355 & 0,278 & 0,367 \\ 0,3865 & 0,2491 & 0,3644 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0,17 & 0,33 \end{pmatrix}^3$	$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,372 & 0,262 & 0,365 \\ 0,376 & 0,258 & 0,364 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0,17 & 0,33 \end{pmatrix}^4$	$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,374 & 0,260 & 0,365 \\ 0,375 & 0,259 & 0,365 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0,17 & 0,33 \end{pmatrix}^5$	$\begin{pmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,375 & 0,259 & 0,365 \\ 0,375 & 0,259 & 0,365 \end{pmatrix}$

Cuadro. N. 11 Regularidad de la cadena

Explicación: Una de las fortalezas de las cadenas de Markov consiste en la predicción de los comportamientos de los casos que analiza; para lo cual la matriz de probabilidad debe analizarse a la luz de los exponentes para saber si dicha matriz es regular (las probabilidades por columnas tienden a estabilizarse). Vemos que ya desde la tercera fila los valores de las probabilidades están estables.

Probabilidades:

- $v_1=0.375$
- $v_2=0.259$
- $v_3=0.365$

Lo que explica el siguiente fenómeno a la larga:

- 37,5% de los estudiantes estarán por debajo de la media
- 25,9% estarán cerca de alcanzar la media
- 36,5% estarán en la media
- La media es 14

Éste resultado muestra que el simple hecho de aplicar clases de GeoGebra combinada con clases magistrales rinde la mediocre media de 14 puntos, por lo que se debe buscar una metodología de combinación metódica adicional.

### Investigación de operaciones: programación lineal

Sea el problema: Existen dos métodos de trabajo aplicados por el maestro de matemáticas; el primero corresponde a la clase magistral y el segundo a la utilización del GeoGebra; hay así mismo dos tipos de enfoque sobre los contenidos curriculares; teórico para desarrollo cognitivo y pragmático basado en el desarrollo psicomotriz. Se conoce que el rendimiento alcanzado por el grupo mediante la clase magistral es del 49,6% de la calificación máxima; mientras que mediante el uso de GeoGebra es del 60% (ambos métodos no son complementarios sino independientes; por tanto la suma de las probabilidades no necesariamente debe ser uno). ¿De qué forma se deben combinar ambos métodos de modo que la función objetivo se maximice?

Método de Sesiones aulicas	Teórico (Horas requeridas)	Resolución de problemas (Horas requeridas)	Rendimiento
x=Magistral	2	1	0,496/1
y=GeoGebra	3	0,5	0,6/1
Total Horas	28	28	
Función Objetivo	$Z = 0,496x + 0,6y$		

Cuadro. N. 12 Esquema matriz del problema método-  
rendimiento

Explicación: El cuadro anterior muestra que en el caso de la clase expositiva magistral; se alcanza la categoría de comprensión cognitiva del tema en una media de 2 horas (observación no estructurada); mientras que en el caso del uso de GeoGebra esto toma 3 horas como media. En el tema de resolución de problemas en cambio; se logra una comprensión de los procesos en 1 hora de clase magistral a diferencia del uso del GeoGebra en cuyo caso el tiempo se reduce a media hora. El rendimiento (cuarta columna del cuadro) se toma de la primera tabla de este capítulo.

### Planteamiento de las ecuaciones de solución

$$2x + 3y \leq 28$$

$$x + 0,5y \leq 28$$

$$x, y \geq 0$$

$$Z = 0,496x + 0,6y$$

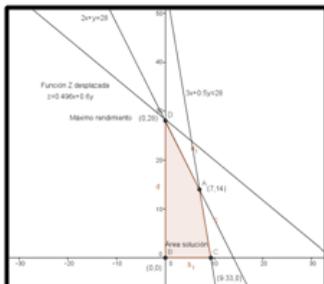


Gráfico N. 4 Esquema gráfico del problema método-  
rendimiento

Explicación: Se graficaron las ecuaciones mediante GeoGebra:

$$2x + 3y = 28$$

$$x + 0,5y = 28$$

$$x, y = 0$$

Posteriormente se aisló el polígono solución (en marrón) de las ecuaciones descritas. Se graficó y trasladó la función objetivo:  $Z = 0,496x + 0,6y$  para determinar las coordenadas que maximicen el rendimiento.

Punto crítico	Coordenadas	Ev. $Z=0,496x+0,6y$	Decisión
A	(7,14)	$Z=11.872$	2do lugar
B	(0,0)	$Z=0$	Valor mínimo
C	(9,33,0)	$Z=4.63$	3er lugar
D	(0,28)	$Z=16.8$	Valor máximo

Cuadro. N. 13 Análisis de resultados de la evaluación

Análisis: Al trasladar la función objetivo  $Z=0,496x+0,6y$  a cada uno de los puntos críticos del gráfico anterior se presentan 4 valores uno de los cuales maximiza el rendimiento; esto es, mediante la combinación de los métodos analítico teórico de desarrollo cognitivo y el otro pragmático de desarrollo psicomotriz el cual arroja el siguiente resultado: Aplicando 28 sesiones de clases prácticas mediante GeoGebra y ninguna magistral se logra el máximo de rendimiento estudiantil con una aceptable media de 16.8 puntos. Con lo cual se validaría la hipótesis empírica que el GeoGebra incide notablemente en el mejoramiento del rendimiento en los estudiantes.

## CONCLUSIONES

La primera conclusión parte de los resultados de la prueba Z para validación de la hipótesis; la cual muestra que al aplicar GeoGebra como recurso didáctico sobre la simple clase expositiva mejora el aprendizaje de matemática en los estudiantes involucrados en la investigación. Los procesos estocásticos de la investigación de operaciones presentaron probabilidades estacionarias predictivas en cuanto al rendimiento de los estudiantes en las diferentes evaluaciones luego de una aplicación simultánea de los métodos magistral y pragmático; lo que muestra que no es suficiente el uso del recurso didáctico sin una planificación de optimización de la dosificación de los métodos de coordinación de aprendizaje. Se concluye que el mero hecho de aplicar clases magistrales introductorias a las temáticas de estudio para posteriormente usar GeoGebra como herramienta didáctica en el aprendizaje problemático no garantiza un óptimo rendimiento; verificado en los resultados de esta investigación la cual muestra una media de 14 puntos en el primer momento del estudio mientras que a través del uso de GeoGebra en todas las sesiones áulicas la media de rendimiento sube hasta 16.8 como lo demostró la programación lineal.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bishop, A. e. (1993). *Significant Influences On Children's Learning Of Mathematics*. París: UNESCO.
- Daniels, H. (2001). *Vygotsky y la Pedagogía*. Barcelona: Paidós.
- GeoGebra. (Diciembre de 2014). *GeoGebra*. Recuperado el 5 de Diciembre de 2014, de <http://www.geogebra.org/material/show/id/145529>
- Ginsburg, H. P. (1997). Mathematics Learning Disabilities A View From Developmental Psychology. *Journal of learning disabilities*, 30(1), 20-33.
- Hohenwarter, M. &. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics. *Teaching Conference*. Hungary: Pecs.