USO DE LA CALCULADORA TI-NSPIRE CX CAS PARA APOYAR LA CONCEPTUALIZACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

José Carlos Cortés Zavala, Graciela Eréndira Núñez Palenius, Guillermo Ibarra Reyes
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.
erendira.palenius@gmail.com, cortes.zavala.jose@gmail.com, guillermoibarra@gmail.com

RESUMEN

En este artículo se presenta el diseño de actividades de aprendizaje en las que se aprovecha el uso de una calculadora TI-Nspire CX CAS para generar y promover las diferentes formas de representación de una función; Se pone énfasis en el significado de dos conceptos básicos como son Límites y Derivadas tratados con un enfoque constructivista. Se diseñaron siete actividades para la conceptualización de los tópicos antes mencionados y se realizó una experimentación piloto con estudiantes.

PALABRAS CLAVE: Cálculo. Conceptualización. Cas. Calculadora.

INTRODUCCIÓN

La integración de sistemas de algebra computacional (CAS), reconocidas por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza de matemáticas, ha sido investigada e implementada en muchos países. Desde su desarrollo en los años 70s y su introducción a la enseñanza en los 80s, CAS se vio como una herramienta altamente valiosa para hacer matemáticas y potencialmente viable para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Estudios implementados en clases de matemáticas en el nivel medio superior y superior (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000), han apoyado el argumento de que la manipulación simbólica dentro del CAS puede evitar los errores de manipulación de los alumnos y por lo tanto permitirles generar resultados exactos y aproximados de manera rápida. De acuerdo a Kutzler (1994), la habilidad de “construir” bases conceptuales en CAS permite que los alumnos puedan manejar problemas más complicados que la mayoría de los alumnos que trabajan de maneras tradicionales (lápiz y papel).

Además, tendiendo las facilidades de la manipulación simbólica, capacidades numéricas y representaciones gráficas, puede promover el hábito de utilizar las tres representaciones para incrementar su conocimiento (Pierce, 1999).

El enfoque instrumental, es una herramienta que ha sido reconocida para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en un ambiente CAS (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). De acuerdo a Monaghan (2007), este enfoque abarca elementos de ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1995) y la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999). En la teoría antropológica de lo didáctico, Chevallard (1999) observa que los objetos matemáticos emergen en un sistema de prácticas que son caracterizadas por cuatro componentes: ***tarea***, en donde el objeto se encuentra; ***técnica***, utilizada para resolver la tarea; ***tecnología,*** el discurso que explica y justifica la técnica; y ***teoría***, el discurso que proporciona la base estructural para la tecnología.

Artigue (2002), redujo los cuatro componentes de Chevallard a tres: tarea, técnica y teoría. El componente de teoría de Artigue combina los componentes de tecnología y teoría de Chevallard. Dentro de este marco teórico (*Tarea–Técnica–Teoría*), una técnica es el conjunto complejo de razonamiento y trabajo de rutina, tiene valores pragmáticos y epistémico (Artigue, 2002). Su rol pragmático de debe a que realiza una tarea (Lagrange, 2003).

Por otro lado, una interpretación común de la enseñanza constructivista, es el proceso activo en donde los estudiantes deben estar involucrados en su aprendizaje. De acuerdo a esta interpretación, las opciones pasivas como libros, clases tradicionales y presentaciones en línea son clasificadas como *enseñanza no-constructivista*, mientras que opciones activas como discusiones en grupo, actividades prácticas y juegos interactivos se clasifican como *enseñanza constructivista*.

La idea de que el aprendizaje constructivista requiere métodos de enseñanza activos, es un tema recurrente en educación. Lefrancois (1997), resumió que: “el enfoque constructivista a la enseñanza está basado en la suposición de que los estudiantes deben construir conocimientos por sí mismos. Por lo tanto, los enfoques constructivistas están básicamente orientados al descubrimiento” (pg. 206). Esta declaración significa que una teoría de enseñanza constructivista en donde un aprendiz es cognitivamente activo, equivale a una en donde hay un comportamiento activo.

Tomando en cuenta el potencial que ofrece el CAS de la Calculadora TI-Nspire y las ideas constructivistas se realizo una serie de actividades de aprendizaje (seis en total) en las cuales se propone un aprendizaje activo e interactivo haciendo uso de la calculadora.

Dentro de las dificultades del aprendizaje y enseñanza del cálculo diferencial, muchas radican en el aprendizaje del concepto del límite. Hitt (2005) observó que dentro de éste, aún más problemas surgen de no tener el conocimiento adecuado sobre los procesos infinitos. Algunos profesores en su intento de simplificar y generalizar el concepto del infinito matemático, llegan a provocar conflictos dentro de los alumnos a través del tiempo por falta de la conceptualización adecuada (Hitt 2005).

Con respecto al diseño de actividades para el aprendizaje del concepto del límite matemático, ha habido diferentes planteamientos. Hitt y Páez-Murillo (2005) en las actividades que diseñaron para la enseñanza del límite, se enfocaron en relacionarlo con la idea de una aproximación, además del significado que se tiene con las diferentes notaciones. En el software *Funciones y Derivadas* desarrollado para la enseñanza de la derivada, Cortés, García y Núñez (2005), implementaron un acercamiento informal a este concepto empleando gráficas y tablas.

MARCO TEÓRICO

Las matemáticas se consideran una disciplina acumulativa, es decir, que la información funciona como bloques de construcción. No se pueden "crear" nuevos conceptos o conocimientos sin tener los "cimientos". Los primeros bloques se establecen en la primaria al ver los conceptos de sumas, restas, multiplicación y división; estos conceptos constituyen los cimientos o lo fundamental.

Los siguientes bloques, típicamente involucran fórmulas y operaciones, y se deben dominar estos temas antes de pasar a los siguientes. En los niveles de secundaria y bachillerato comienzan los problemas, los alumnos avanzan en los cursos sin tener bien definidos los conceptos básicos. Haciendo uso de la analogía previa, intentan construir sobre un cimiento débil.

Por lo general, la enseñanza tradicional de las matemáticas se lleva a cabo bajo el siguiente esquema:

1. Se presenta el concepto teórico.
2. Se hacen unos ejemplos en clase.
3. Se deja tarea sobre el tema.
4. Se evalúa el tema con un examen.

Por cuestiones de tiempo el modelo de enseñanza anterior se considera el más práctico, pero en los últimos años, estudios han demostrado que dichos modelos pasivos no funcionan. Los maestros están presionados por cumplir con el programa, sin existir el tiempo suficiente para asegurar el domino del tema de cada alumno. Este problema se va arrastrando a través de los años, lo cual implica dificultades en el aprendizaje.

Por otro lado, la educación matemática realística (RME) de Van Reeuwijk (1995) tiene las siguientes características: mundo "real", producciones y construcciones libres, matematización, interacción y aprendizaje integrado. Una extensa discusión sobre la RME, se puede encontrar en Freudenthal (1991), Delange (1987) y Treffers (1987).

Con respecto a la característica de mundo “real”, se refiere a que el aprendizaje de las matemáticas empieza a partir de situaciones problema que los alumnos perciben como real o realístico. Pueden ser contextos de la vida cotidiana, pero también pueden salir de situaciones matemáticas que son significativas y naturales para el alumno.

La característica de producciones y construcciones libres en la teoría, es en donde los alumnos tienen la oportunidad de desarrollar sus propias estrategias de resolución de problemas informales, que pueden llevar a la construcción de procedimientos de solución.

Los modelos que se desarrollan gradualmente, se convierten en modelos genéricos para un tipo de situaciones. Este proceso de reinvención de “abajo hacia arriba”, es guiado por el maestro y los materiales de instrucción.

El concepto de reinvención guiada es esencial en RME. Organizar los fenómenos de acuerdo a la matematización, es importante en el aprendizaje de las matemáticas. Generalmente se distinguen dos tipos de matematización, horizontal y vertical; la ***matematización horizontal*** se refiere, a modelar la situación problema en forma matemática y viceversa; mientras que la ***matematización vertical***, se refiere al proceso de obtener un nivel superior de abstracción matemática.

Las interacciones entre alumnos, entre alumnos y el maestro, son importantes en la RME; debido a que la discusión y cooperación entre ellos, mejoran la reflexión que es esencia en el proceso de matematización.

En la filosofía de la RME, se deben integrar a un plan de estudios diferentes temas matemáticos. El alumno debe desarrollar una visión integrada de las matemáticas, además de la flexibilidad de conectar los diferentes sub-dominios.

La idea de tecnología como un catalizador para la realización de la RME, se ha estudiado profundamente. Drijvers y Doorman (1997), describen el uso potencial de la calculadora gráfica en el proceso de matematización, exploración, integración y flexibilidad. Drijvers (2000), llegó a las siguientes tres suposiciones sobre los posible beneficios de utilizar álgebra computacional para realizar los objetivos de la RME.

1. ***Matematización horizontal***: Utilizando dispositivos de álgebra computacional, se permite que la atención de los alumnos cambie de operaciones puramente algorítmicas a la traducción de problemas realísticos, a la modelación matemática y a la interpretación de los resultados con respecto al contexto. Liberando al alumno del trabajo técnico, que puede ser la solución para la matematización horizontal.

2. ***Exploración***: Debido a su retroalimentación directa, la herramienta de álgebra computacional ofrece diferentes oportunidades para las actividades de exploración. Las tareas de descubrimiento y clasificación, facilitan a través de la reflexión y la generalización llegar a la reinvención de propiedades o teoremas. CAS puede lograr la matematización vertical, de manera similar a otros dispositivos tecnológicos que sirven como instrumentos de investigación; pero el álgebra dentro del sistema, proporciona nuevas oportunidades como técnicas algebraicas.
3. ***Integración flexible de diferentes representaciones***: Utilizar CAS permite que el alumno transite fácilmente entre representaciones matemáticas, como gráficas, tablas y fórmulas. Lo anterior significa un uso flexible e integrado de las representaciones, que serán percibidas como diferentes pero relacionadas. La forma sofisticada de representar y editar fórmulas no es exclusiva de CAS, solo que es el punto débil de otras herramientas tecnológicas.

Drijvers (2000), postuló tres posibles conflictos entre la teoría de la RME y el uso de CAS:

1. ***Herramienta de arriba hacia abajo***: Ya que CAS está muy avanzada matemáticamente, existe el riesgo de que los resultados sean obtenidos de una manera "arriba hacia abajo". Debido a que todo ya está hecho, esto puede frustrar la motivación del alumno para construir y reinventar, a menos que se tomen medidas didácticas adecuadas.
2. ***Caja Negra***: CAS no da información sobre cómo se obtuvieron los resultados, el software es una caja negra que no enseña el método utilizado. Generalmente, los métodos aunque sean problemas sencillos, son más sofisticados que los métodos que los alumnos hubieran utilizado. Claramente el CAS, no apoya las estrategias básicas o informales.
3. ***Idiosincrasia***: Como una herramienta para un usuario aprendiz, CAS no es muy flexible. La introducción de datos requiere una sintaxis estricta y el resultado puede ser presentado en formas desconocidas. El lenguaje CAS es diferente del lenguaje matemático y natural, y el sistema no permite lenguaje informal. Cada CAS tiene sus propias reglas, restricciones y hábitos. Por lo tanto, los alumnos pueden percibir a CAS como una herramienta idiosincrásica en lugar de un instrumento flexible y natural que puede adaptarse a sus notaciones informales y estrategias. Lo cual hace, que la Génesis instrumental sea un proceso muy difícil (Guin y Trouche, 1999).

Después de su experimentación, Drijvers (2000) analizó las experiencias que los alumnos tuvieron con álgebra computacional y concluyó los siguientes obstáculos:

1. La diferencia entre las representaciones algebraicas proporcionadas por CAS y aquellas que los alumnos esperan y conciben como "sencillo".
2. La diferencia entre cálculos numéricos y algebraicos, y la forma implícita en la que CAS maneja la diferencia.

3. Las limitaciones de CAS y la dificultad, en proporcionar estrategias algebraicas para ayudar a CAS a superar dichas limitaciones.
4. La inhabilidad de decidir, cuándo y cómo el álgebra computacional puede ser útil.
5. La concepción flexible, de variables y parámetros que el uso de CAS requiere.

Los cinco obstáculos están relacionados entre sí, y tienen una doble naturaleza común. Existe un componente tecnológico y otro relacionado al dispositivo, pero para tratarlos adecuadamente requieren de comprensión matemática. Sólo el quinto obstáculo puede ser considerado matemático, aquí la falta de comprensión se hace más explícita al usar CAS.

Por otro lado, el "aprendizaje colaborativo" describe una situación en la cual formas particulares de interacción se espera que ocurran entre los involucrados, lo cual puede detonar mecanismos de aprendizaje; en consecuencia, es importante desarrollar formas para incrementar la probabilidad de que este tipo de interacciones ocurran.

Muchos de los desarrollos recientes que integran las nuevas tecnologías a la enseñanza de las ciencias, están basados en modelos de aprendizaje colaborativo, que hacen uso intensivo del potencial comunicativo e interactivo de las nuevas tecnologías (Núñez y Cortés, 2011). Por lo anteriormente citado y por la importancia que tiene el aprendizaje colaborativo en la enseñanza de las matemáticas, se optó por trabajar de ésta manera con los estudiantes en la aplicación de las actividades.

METODOLOGÍA

En este trabajo se presenta el diseño y experimentación de actividades de Aprendizaje bajo el esquema de Tarea–Técnica–Tecnología (TTT), dentro de un ambiente CAS para resolver una tarea. Es importante observar, que la tarea se refiere a una pregunta dentro de una actividad. De acuerdo a Kieran y Saldanha (2008), la actividad es un conjunto de preguntas relacionadas con una tarea central. Las actividades son diseñadas de tal manera que las preguntas teóricas y técnicas son centrales, tal que, el alumno tiene la oportunidad de reflexionar sobre los aspectos técnicos y teóricos en un ambiente tradicional (lápiz y papel) y en un ambiente CAS.

La primera versión de las actividades de aprendizaje, se desarrollaron con los temas de cálculo diferencial de acuerdo al programa del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química; así como, de libros de texto como Anton, Bivens y Davis (2009), Tan (2011), Stewart (2008), Larson y Edwards (2010), y Hass, Weir y Thomas (2009). Para el diseño de ésta versión, fue importante la formulación de preguntas asociadas con los conceptos; además se analizaron las diferentes técnicas de enseñanza de los autores mencionados anteriormente, en conjunto con experiencias previas de los investigadores.

Se realizó una primera experimentación piloto, con alumnos de primer ingreso de la licenciatura de Ingeniería Química para revisar la estructura conceptual de las actividades diseñadas. Dentro de ésta, se llevaron a cabo discusiones extensivas entre el investigador y los estudiantes sobre las preguntas, su significado y cómo adaptar las mismas con respecto a su claridad. Este proceso ocurrió hasta que las actividades se consideraron adecuadas.

Posteriormente se realizó una experimentación formal, aplicando las actividades ya modificadas a los alumnos del segundo año de la misma licenciatura que tenían noción de los conceptos involucrados. Lo anterior, para revisar la estructura didáctica de las mismas. Las actividades experimentadas trataban los temas siguientes: Diferencias, Pendientes, Pendiente como función, Límites, Líneas secantes y tangentes, Función derivada y por último Aplicaciones.

El trabajo de los estudiantes se realizó en equipos de tres integrantes, intercambiando el rol de cada uno de ellos que era el de líder, majeo de calculadora y manejo de la actividad; para favorecer el Aprendizaje colaborativo.

Se video-grabaron cada una de las sesiones de las experimentaciones realizadas con tres cámaras, una fija y dos móviles; para tener evidencia de las interacciones y razonamientos de los estudiantes; además de la evidencia escrita, como las actividades y las hojas que se les entregaron para escribir cualquier deducción extra que hicieran.

EXPOSICIÓN DE LA PROPUESTA

En el diseño de actividades educativas, la pregunta clave es ¿cuáles problemas significativos fomentan el desarrollo cognitivo de acuerdo a la trayectoria de aprendizaje hipotético? Tres principios de diseño guían el proceso: reinvención guiada, fenomenología didáctica y modelos de mediación (Drijvers, 2003). El antes citado, también sugirió que se debe poner más atención al rol de la parte tradicional (lápiz y papel) y las discusiones de clase.

Andreu-Ibarra y Riestra (2005), proponen una alternativa para la enseñanza del concepto de Derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica. Se enfocaron en casos de maximización, haciendo la observación de que los ceros de la derivada pueden indicar máximos o mínimos. Proponen la función $P(h)=f(x+h)-f(x)$, aplicando el teorema del factor se obtiene $P(h)=hQ(h)$, en donde $Q(h)$ representa la derivada. Implícitamente se consideran tres conceptos importantes en su enfoque:

1. Comportamiento cuando h tiende a cero.
2. $f(x+h)$.
3. $f(x+h)-f(x)$.

Por otro lado, se propone la conceptualización del Cálculo Diferencial, en donde el punto de partida es la Derivada como función y sus diferentes representaciones. Al observar la figura 1, en el centro se encuentra una de las formas más convencionales de representar una derivada, con la notación $f'(x)$. Siguiendo las flechas se puede apreciar la relación que existe entre las diferentes representaciones. De tal manera, que se obtienen los siguientes siete temas principales:

1. Diferencias
2. Pendientes
3. Pendiente como función
4. Límites
5. Líneas secantes y tangentes
6. Función derivada
7. Aplicaciones

El último tema no aparece dentro de la figura 1, pero se considera crucial dentro de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial.

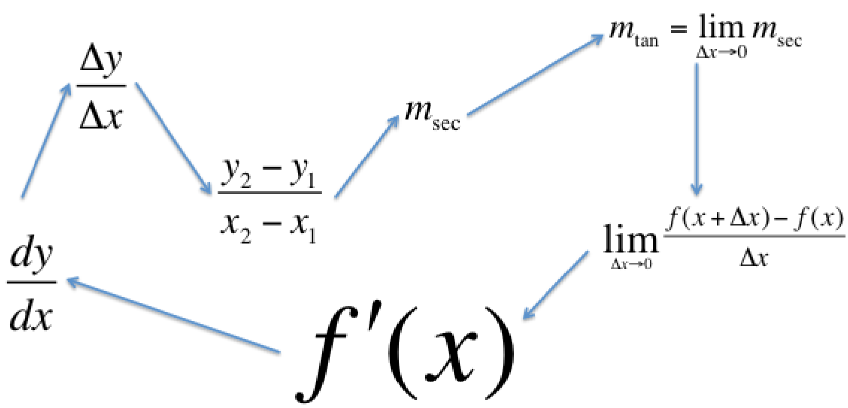


Figura 1. Diferentes representaciones de la derivada

El contenido de las actividades en términos generales, es la aplicación de las técnicas de la educación matemática realística (RME). La estrategia empleada es la siguiente:

1. Introducción de un concepto dentro de la vida cotidiana o una situación “real”.
2. Libertad de construir o llegar al concepto a través de observaciones (expresión creada).
3. Reinvención del concepto o la expresión creada, a través de discusiones con integrantes del equipo, el grupo y el profesor.

La estrategia anterior, encapsula lo fundamental de la RME. Además de la mediación por el profesor en el paso tres, se lleva a cabo la mediación por la calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS como apoyo para la construcción de conocimientos. Aprovechando la versatilidad de la calculadora simbólica, se presenta la oportunidad de manipular las diferentes representaciones y además, observar el mismo fenómeno en diferentes perspectivas con el fin de lograr la matematización.

Para complementar la estructura didáctica de las actividades diseñadas, además de las secciones del trabajo tradicional (lápiz y papel) y la tecnológica (con CAS), en esta propuesta se implementó una sección de gran importancia como es la ***simbolización***.

EXPERIMENTACIÓN

En la experimentación piloto participaron nueve alumnos, que trabajaron en equipos de tres personas; en donde cada integrante tuvo un rol específico (líder, majeo de calculadora y manejo de la actividad) que cambió en cada actividad.

Se les proporcionó: una calculadora TI-Nspire CX CAS, la actividad respectiva, un lápiz y hojas en blanco para cualquier anotación. Las interacciones y discusiones entre ellos, y los investigadores, fueron grabadas con una cámara de video para ser analizadas posteriormente.

Con las evidencias de la experimentación piloto, se prestó atención especial en las discusiones entre el investigador y los alumnos. De tal manera, que se introdujo una sección de discusiones grupales en las actividades y se formuló una guía para el maestro que las aplicará.

Dentro de esta, se consideran las discusiones grupales que se llevarán a cabo en cada actividad, además se proporcionan los puntos claves de cada discusión y algunas sugerencias de cómo realizarlas.

La primera versión de las actividades que se aplicó, los alumnos no las realizaron en su totalidad, por lo tanto se considera una experimentación informal. Dentro de ésta se llevaron a cabo discusiones entre el investigador y los estudiantes.

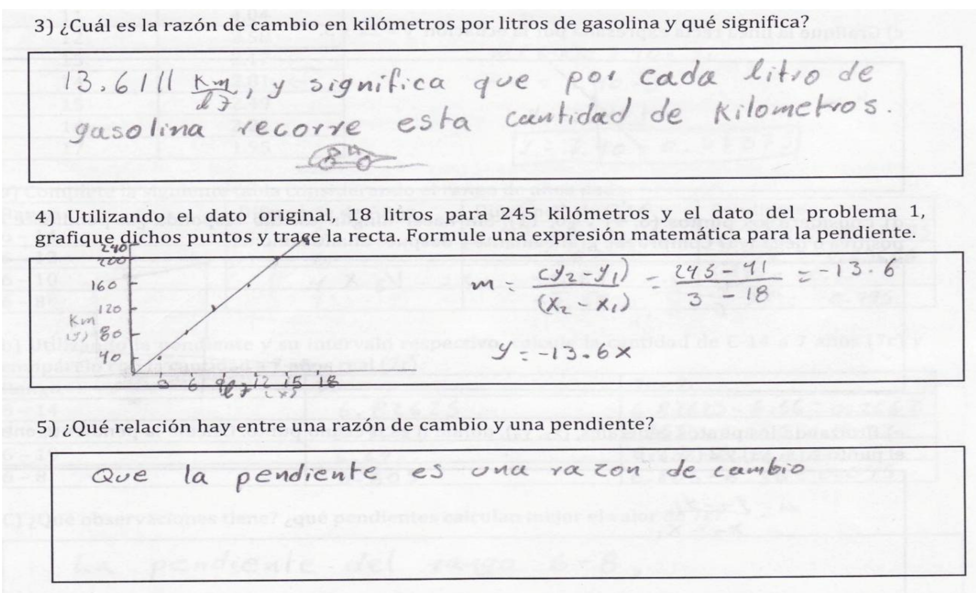
Cabe mencionar que en una sesión extra, se trabajó el manejo de la calculadora TI-Nspire CX CAS; por medio de una actividad diseñada de tal forma que los estudiantes pudieran identificar los botones y las funciones asociadas a los mismos, los comandos básicos y el manejo de las diferentes representaciones que tiene la misma.

Se llevaron a cabo dos experimentaciones:

1. En la primera fase, las actividades propuestas se aplicaron a dos alumnos los cuales trabajaron en equipo y fueron elegidos porque se consideraron con conocimientos avanzados de Cálculo Diferencial. Se les proporcionó una calculadora TI-Nspire CX CAS, la actividad diseñada y un lápiz; para trabajar sin límite de tiempo. Esta fase tuvo como propósito, revisar la estructura conceptual de las mismas; posteriormente se hicieron modificaciones.
2. En la segunda fase se aplicaron las actividades modificadas, a los alumnos que tenían noción de los conceptos involucrados, pero no lo dominaban completamente. Lo anterior, para revisar la estructura didáctica de las mismas. Dichos alumnos se encuentran cursando matemáticas II. Esta fase se llevó a cabo, bajo las mismas condiciones de la primera fase.

RESULTADOS

Las actividades tienen una estructura conceptual progresiva, se diseñaron de tal manera, que se presenta un problema de aplicación y el alumno deduce su significado. Por ejemplo en la actividad 1 se emplea la siguiente secuencia de preguntas:


3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

13.6111 Km/Lt, y significa que por cada litro de gasolina recorre esta cantidad de kilometros.

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{245 - 41}{3 - 18} = -13.6$

$y = -13.6x$

5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

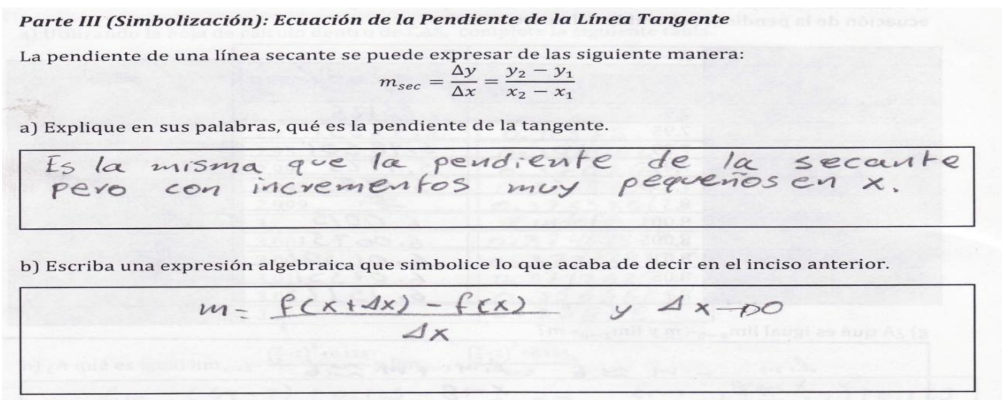
Que la pendiente es una razon de cambio

Figura 2. Secuencia típica empleada, actividad 2 realizada por el equipo 1

Aquí se observa claramente, que a través de preguntas de deducción y observación se llega a los conceptos claves dentro del Cálculo Diferencial.

Dentro del cálculo y cualquiera matemática de nivel superior, se pone énfasis en la simbología utilizada. Lo anterior en la mayoría de los casos, se ve como el manejo de otro idioma. En las actividades diseñadas, se incorpora una sección dedicada a la formulación de la simbología. Lo anterior, se lleva a cabo en dos partes.

En la primera el alumno genera su propia expresión, mientras que en la segunda se compara con la forma convencional. En la siguiente figura, se observan los incisos realizados en la experimentación piloto:



Parte III (Simbolización): Ecuación de la Pendiente de la Línea Tangente

La pendiente de una línea secante se puede expresar de las siguiente manera:

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

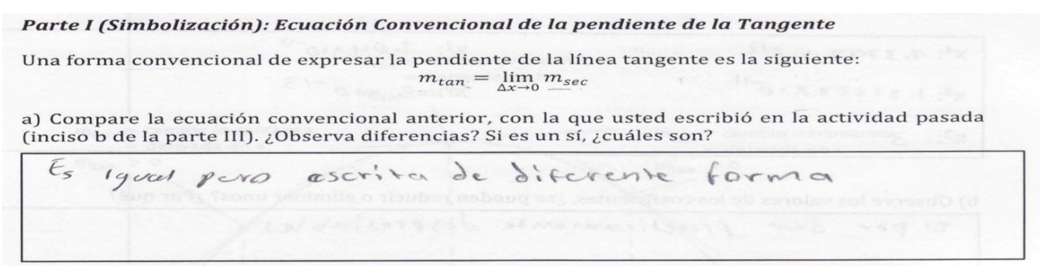
a) Explique en sus palabras, qué es la pendiente de la tangente.

Es la misma que la pendiente de la secante pero con incrementos muy pequeños en x.

b) Escriba una expresión algebraica que simbolice lo que acaba de decir en el inciso anterior.

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x \to 0$$

Figura 3. Primera parte de la simbolización, actividad 5 realizada por el equipo 1



Parte I (Simbolización): Ecuación Convencional de la pendiente de la Tangente

Una forma convencional de expresar la pendiente de la línea tangente es la siguiente:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

a) Compare la ecuación convencional anterior, con la que usted escribió en la actividad pasada (inciso b de la parte III). ¿Observa diferencias? Si es un sí, ¿cuáles son?

Es igual pero escrita de diferente forma

Figura 4. Segunda parte de la simbolización, actividad 5 realizada por el equipo 1

CONCLUSIONES

Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se lleva acabo utilizando métodos pasivos, es decir, el alumno solamente recibe información sobre el tema; es decir, se presenta primero la teoría y después se hacen algunos ejercicios de la misma. Por ejemplo, en una clase para la cubrir el tema de derivada se puede ver de la siguiente manera:

1. Para encontrar la derivada de cualquier función se utiliza la expresión:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
2. Entonces la derivada para x^2 sería:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

Después de esa introducción al tema, el profesor pone a trabajar a los estudiantes en la clase con problemas similares, y probablemente también se deje una tarea.

Innumerables estudios han demostrados, que técnicas de enseñanza pasivas no son adecuadas para un aprendizaje significativo. En este trabajo de investigación el alumno construye su propio conocimiento a través de métodos activos, es decir, que ellos están involucrados y son responsables de su aprendizaje por medio del “descubrimiento”. Diferentes investigaciones (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000) sugieren, que el descubrimiento guiado o mediado es más eficaz.

La mediación se lleva a cabo, por las actividades de aprendizaje diseñadas y el investigador que las aplica, a través de discusiones individuales y grupales. Las actividades están diseñadas de tal manera, que el conocimiento lo construye el alumno cuando une conceptos e ideas implícitos en las mismas.

Las actividades propuestas se sometieron a experimentaciones formales y piloto, y de acuerdo a las observaciones realizadas por el grupo de investigadores se modificaron hasta llegar a las actividades finales que conceptualizaron el Cálculo Diferencial. El esquema empleado, es que a través de preguntas tales como: ¿qué pasa bajo esas condiciones?, ¿a qué se debe?, ¿cómo formularías lo antes dicho?, etc., se van construyendo los conocimientos, los cuales representan la conceptualización del objeto matemático.

De la experimentación piloto se observó, que la mayoría de los problemas encontrados se atribuyen a los integrantes de los equipos y no al diseño de las actividades. Por ejemplo, algunos errores se deben a que no leen con cuidado las preguntas, responden de forma equivocada, o bien no discuten adecuadamente sobre los cuestionamientos.

Con respecto al diseño de las actividades, la única modificación resultante después de la experimentación piloto fue la inserción de discusiones. Las cuales tienen el objetivo resumir lo más importante de los temas tratados y de reforzar la construcción de los conceptos involucrados. Debido a que las actividades son acumulativas, es importante asegurar que los alumnos obtengan cada uno de los conceptos involucrados en las mismas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andreu-Ibarra, M. E. y Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológico de su desarrollo. En J. C. Cortés y F. Hitt (eds), *Reflexiones Sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza*. Morelia, Mich., México: Morevallado Editores, 157-174.

Anton, H., Bivens, I. y Davis, S., (2009). *Calculus Early Transcendentals*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, INC.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Enviroment: The Genesis of a Reflection About Instrumentation and The Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

Atkins, N., Creegan, A. y Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE, but can you make them think? *International DERIVE Journal*, 2(1), 63-82.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactiqu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.

Cortés, J.C., García, J.R., y Núñez, G.E. (2005). Software para la enseñanza de la derivada. En J. C. Cortés y F. Hitt (eds), *Reflexiones Sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza*. Morelia, Mich., México: Morevallado Editores, 197-222.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal for Mathematical Learning*, 5, 189-209.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer alegbra environment* (doctorial dissertation). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Drijvers, P. y Doorman, M. (1997). The graphics calculator in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 14(4), 425-440.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Guin, D., y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

Hass, J., Weir, M. B. y Thomas, G. B. (2009). *University Calculus: Early Transcendentals*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. C. Cortés y F. Hitt (eds), *Reflexiones Sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza*. Morelia, Mich., México: Morevallado Editores, 81-108.

Hitt, F., y Páez-Murrillo, R. (2005). Dificultades de aprendizaje del concepto del límite y actividades de enseñanza. En J. C. Cortés y F. Hitt (eds), *Reflexiones Sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza*. Morelia, Mich., México: Morevallado Editores, 133-156.
Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.
Kieran, C., y Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the codevelopment of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En G. W. Blume y M. K. Heid (eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: Vol. 2 cases, and perspectives (pp. 393-414). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Kutzler, B. (1994). DERIVE – the future of teaching mathematics. *International DERIVE Journal*, 1(1), 37-48.
Lagrange, J. B. (2000). L'Intégration d'Instruments Informatiques dans l'Enseignement: une Approche par les Techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: Nationa Council of Teachers of Mathematics.
Larson, R. y Edwards, B. H. (2010). *Calculus*. Belmont, CA: Brooks/Cole.
Lefrancois, G. R: (1997). *Psychology for teachers*. Belmont, CA: Wadsworth.
Monaghan, J. (2007). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 14(2), 63-72.
Núñez, G. y Cortés, J. (2011). Uso de tecnología en educación matemática. Investigaciones y propuestas 2011. *Desarrollo de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas: Una experiencia con la Línea Recta* (51-56). Morelia: AMIUTEM, A.C.
Pierce, R. (1999). Using CAS as a scaffolding for calculus: Some observations. En W. Spunde, P. Cretchley y R. Hubbard (eds.), *The Challenge of Diversity: Proceedings of the Delta-99 Symposium on Undergraduate Mathematics* (pp. 172-176). Brisbane: Delta 99 Committee.
Stewart, J., (2008). *Calculus Early Transcendentals*. Belmont, CA: Thomson Higher Education.
Tan, S. T., (2011). *Calculus: Early Transcendentals*. Belmont, CA: Brooks/Cole.
Treffers, A. (1987). *Three Dimensions*. Dordrecht: Reidel.
Van Reeuwijk, M. (1995). Student's knowledge of algebra. En: *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. pp. 135-160.
Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.