

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD SIMPLE Y PROBABILIDAD CONDICIONAL: UN ESTUDIO EN ALUMNOS DE INGENIERÍA

Álvaro Toledo San Martín
Universidad Bernardo O'Higgins, Chile.
alvaro.toledo@ubo.cl

RESUMEN

La finalidad de este estudio es evaluar la comprensión del concepto de probabilidad simple y probabilidad condicional en 86 alumnos de pregrado de Ingeniería que han realizado su primer curso de Estadística. Se destaca, dentro del grupo de respuestas incorrectas, el asociar lo condicional con una dificultad en el experimento aleatorio y dentro de las definiciones imprecisas, asociar lo condicional con causalidad.

PALABRAS CLAVE: Probabilidad simple y condicional. Definición.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad la enseñanza del cálculo de probabilidad y específicamente de la probabilidad condicional es parte de la formación de un ingeniero, es la base para cursos avanzados como: simulación, investigación de mercados y análisis de decisiones, entre otros. La capacidad de trabajo bajo incertidumbre y la toma de decisiones se especifican como fin importante en la mayoría de los perfiles de egreso en carreras de esta área (Casar, 2009). Aún así, se tiene que los alumnos no comprenden del todo los conceptos básicos de probabilidad partiendo por la definición de estos, observándose además, una idea incorrecta sobre azar y probabilidad que se extiende inclusive a quienes enseñan tales conceptos (Zazkis y Leikin, 2008 y Azcárate, 1995).

A continuación se presentan antecedentes, metodología, resultados y conclusión del estudio.

ANTECEDENTES

Respecto a la comprensión y uso de definiciones, diversas investigaciones revelan las dificultades que presentan los alumnos (Furina, 1994, Fernández, 2004 y Roh, 2008), la mayoría de ellas enfocadas en el contexto de definiciones matemáticas indican que tales

dificultades podrían ser atribuidas a la “estructura de la matemática como es concebida por los matemáticos en comparación con los procesos cognitivos implicados en la adquisición de conceptos” (Vinner, 1991, p.65).

De acuerdo a Leikin y Winicki-Landman (2001) una definición debe dar nombre a los conceptos y establecer condiciones necesarias y suficientes incluyendo un número mínimo de tales condiciones además de conceptos previamente definidos. La definición de un concepto, una vez determinado en un plan de estudios, influye en el enfoque de la enseñanza de las matemáticas, la secuencia de aprendizaje, el conjunto de teoremas y demostraciones (Zazkis y Leikin, 2008). La importancia de la presentación a los alumnos y por ende la transmisión de estos de tal definición es parte esencial de la estructura de conocimiento que afecta los procesos de pensamiento del alumno (Vinner, 1991). Las dificultades que los estudiantes presentan con la probabilidad condicional tanto en su definición como en el uso de ella han sido ampliamente estudiados en Kahneman, Slovic y Tversky (1982), Falk (1986), Pollatsek, Well, Konold, y Hardiman (1987), Totohasina (1992) y Martignon, y Wassner (2002) entre otros.

En publicaciones de habla hispana podemos encontrar a Ojeda (1995), Longedo y Huerta (2004) cuyos estudios se centran en la comprensión del concepto de probabilidad en escolares y Díaz y Batanero (2005) respecto a cómo se aborda el concepto de probabilidad condicional en textos universitarios. Estudios en alumnos de psicología presentados en Díaz (2007) y en futuros profesores de secundaria en Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013) muestran que tales dificultades se repiten en estudiantes de distintas disciplinas. De acuerdo con estos estudios, las dificultades se refieren a la consideración de la probabilidad condicional como una medida de la relación causal entre dos eventos, de tal manera que los valores que se asignan a las probabilidades condicionales dependerán de la relación causal del evento condicionado en relación con el evento condicionante (Kahneman et al, 1982), otra dificultad observada por Falk (1979) y Gras y Totohasina (1995) es la denominada falacia temporal donde el evento condicionado ocurre después del evento condicionante. En Chile no hay estudios relacionados al tema, por tanto, el objetivo de estudio es verificar si tales imprecisiones en las definiciones de probabilidad simple y condicional se repiten, o bien, si es posible observar diferencias con los estudios mencionados.

METODOLOGÍA

Concluido el curso de Estadística I y Estadística Aplicada (Probabilidades) del primer semestre de 2015 dictado a alumnos de Ingeniería de cierta universidad privada de la ciudad de Santiago de Chile, comuna de Santiago, en una última sesión previa al examen de contenidos del curso, como actividad inicial se les pidió responder por escrito la siguiente pregunta:

Participaron un total de 86 alumnos de las carreras de: Ingeniería Civil Industrial, Ingeniería Comercial, Ingeniería en Geomensura y Cartografía e Ingeniería en Prevención de Riesgos y Medio ambiente.

Siguiendo la investigación de Contreras *et al* (2013) se consideraron como aceptables aquellas respuestas donde el sujeto, o bien, da una definición correcta de las probabilidades, presenta fórmulas correctas o expone algún ejemplo donde se evidencie el uso correcto de la definición de ambas probabilidades.

Como definición aceptable se considerará probabilidad condicional como: “La probabilidad de que ocurra un evento A dado que se tiene información sobre otro evento B”.

RESULTADOS

Siguiendo la clasificación propuesta en Contreras *et al* (2013) en un estudio con futuros profesores de secundaria se describen los resultados.

Categorías:

C0: *Definiciones incorrectas*: La definición no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna condición necesaria (Leikin y Winicki-Landman, 2001) o se confunden conceptos implicados.

En el estudio se observaron las siguientes sub categorías:

C0.1. *Errores formales*. El sujeto incluye el término que desea definir en la definición o da una definición que corresponde a otro concepto.

“Probabilidad simple es aquella que se puede obtener de manera directa, en cambio probabilidad condicional es aquella que está condicionada a algo” (Sujeto 72)

C0.2. *Errores producidos por confundir conceptos que intervienen en la definición*. El sujeto confunde la probabilidad condicional con otras probabilidades. En este tipo de error se incluyen además los casos donde el sujeto considera que lo condicional es complejizar el experimento aleatorio.

“La probabilidad simple es que salga cara o sello al lanzar una moneda, la condicional es tirar dos monedas y es más difícil de calcular” (Sujeto 66)

C0.3. *Definiciones apoyadas en fórmulas que contienen errores.* No se observaron en este estudio.

C1. *Definición imprecisa de la probabilidad condicional.* La definición incluye todas sus condiciones necesaria o suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001) pero es confusa o añade condiciones no necesarias.

C1.1. *Asume que el suceso condicionante precede al condicionado.* Corresponde a la falacia del eje de tiempos mencionada en Tversky y Kahneman (1982).

“La probabilidad condicional es la probabilidad de que ocurra un evento si anteriormente ya ocurrió otro” (Sujeto 25)

C1.2. *Suponer un suceso dependiente del otro.* El sujeto añade una condición no necesaria y podría subyacer la confusión entre condicionamiento y causalidad (Falk, 1986)

“La probabilidad condicional es donde un evento depende de otro” (Sujeto 55)

C2. *Define correctamente sólo la probabilidad condicional.* Díaz (2007) define tres grupos:

C2.1. *Olvida definir la probabilidad simple, y define verbalmente la condicional.* La definición establece condiciones necesarias y suficientes.

No se observaron en el estudio.

C2.2. *Olvida definir la probabilidad simple, y define la probabilidad condicional con fórmulas.* Entrega la definición de probabilidad condicional, es decir, La razón entre la probabilidad conjunta de los eventos y la probabilidad marginal del evento condicionante.

No se observaron en el estudio.

C2.3. *Error al definir la probabilidad simple.*

“Probabilidad simple: no está condicionada o sujeta a otras probabilidades, es independiente en donde: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. (Sujeto 83)

C3. *Define imprecisamente las dos probabilidades pedidas.* Contreras *et al* (2013) definen cinco grupos:

C3.1. *Suponer que el suceso condicionante tiene que ocurrir antes que el condicionado.* Falacia temporal, pero, imprecisa.

“Probabilidad simple: es aquella que no se ve afectada por algún hecho anterior o no tiene un requerimiento y probabilidad condicional es aquella probabilidad que se afecta por algún hecho anterior o requerimiento” (Sujeto 65)

C3.2. *Suponer que el suceso condicionante es dependiente del suceso condicionado.* Consideración de dependencia causal pero imprecisa.

“La probabilidad simple se calcula de un hecho independiente y la condicional es cuando existe un hecho que depende de otro” (Sujeto 67)

C3.3. *Fórmulas imprecisas para definir las probabilidades.*

“Probabilidad simple = n° de casos favorables / n° de casos totales” (Sujeto 58)

C3.4. *Indican la diferencia entre probabilidad simple y condicional, pero son imprecisas.* Hace referencia a la independencia o dependencia de los eventos en el caso de probabilidad simple y condicional respectivamente.

No se observaron en el estudio.

C3.5. En lugar de dar una definición, da un ejemplo.

“Probabilidad simple es obtener una ficha azul de una caja con 4 fichas azules y dos rojas, la condicional es la probabilidad de sacar una ficha azul condicionado a que la primera ficha es roja” (Sujeto 3)

C4. *Define correcta y de manera precisa las dos probabilidades.* Contreras et al (2013) definen dos grupos:

C4.1. Definir ambas probabilidades verbalmente.

“Probabilidad simple es obtener probabilidad de ocurrencia de un evento A, en cambio, probabilidad condicional es obtener la probabilidad de A si se tiene información de otro suceso B” (Sujeto 78)

C4.2. *Usar fórmulas para definir ambas probabilidades.*

No se observaron en el estudio.

En la Tabla 1 se presentan las frecuencias y porcentajes de las categorías mencionadas anteriormente. Apenas el 11.6% de los alumnos define correctamente probabilidad condicional.

		Alumnos de Ingeniería (n=86)	
		<i>Frec.</i>	<i>Porcentaje</i>
C.0. Error en ambas definiciones.	C.0.1. Confunde conceptos, incluye términos que desea definir (circularidad).	22	25,6%
	C.0.2. Confunde conceptos que intervienen en la definición.	11	14,0%
	C.0.3. Confunde fórmulas.	0	0%
C.1. Definición imprecisa de probabilidad condicional.	C.1.1. Falacia temporal.	6	7,0%
	C.1.2. Confunde condicionalidad con causalidad.	8	9,3%
C.2. Define correctamente solo probabilidad condicional.	C.2.1. Olvida probabilidad simple y define verbalmente probabilidad condicional.	0	0%
	C.2.2. Olvida probabilidad simple y define con fórmula probabilidad condicional.	0	0%
	C.2.3. Define probabilidad condicional.	1	1,2%
C.3. Definición imprecisa de las dos probabilidades.	C.3.1. Falacia temporal para las dos definiciones.	1	1,2%
	C.3.2. Usa concepto de dependencia (causalidad) para las dos definiciones.	21	24,4%
	C.3.3. Fórmula imprecisa.	1	1,2%
	C.3.4. Indica diferencias en forma imprecisa.	0	0%
	C.3.5. Usa ejemplos.	1	1,2%
C.4. Define correctamente las dos probabilidades.	C.4.1. Definición Verbal.	10	11,6%
	C.4.2. Entrega fórmulas correctas.	0	0%
	En blanco	3	3,5%

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en definiciones

De la tabla 1, se observa un gran porcentaje de individuos que definen erróneamente ambas probabilidades (39,6%), dentro de este grupo, el 23,5% de los alumnos confunde el concepto de condicional con experimento aleatorio complejo, esto puede deberse a un sesgo que se produciría al pedir previamente la definición de probabilidad simple y el estudiante al desconocer el concepto de condicional lo asimilaría en consecuencia a lo contrario de simple, es decir, complejo.

No se observaron casos de confusión de probabilidad condicional con probabilidad conjunta mencionados en los estudios de Einhorn y Hogarth (1986). Se observa además que sobre el 30% de los estudiantes asume la dependencia de eventos en la probabilidad condicional (C.1.2 y C.3.2) citada por Falk (1986), en cambio, la falacia temporal solo se observa en el 8,2% de las definiciones (C.1.1 y C.3.1).

En la tabla 2 se realizan comparaciones con los estudios realizados en futuros profesores por Contreras *et al* (2013) y en alumnos de psicología por Díaz (2007) respecto a las cinco categorías principales.

	Alumnos de Ingeniería (n=86)		Futuros profesores (n=196). Contreras <i>et al</i> (2013)		Alumnos Psicología (n=414) Díaz (2007)	
	Frec.	Porcentaje	Frec.	Porcentaje	Frec.	Porcentaje
C.0. Error en ambas definiciones.	37	43,0%	36	18,3%	119	28,7%
C.1. Definición imprecisa de probabilidad condicional.	14	16,3%	6	3,1%	28	6,8%
C.2. Define correctamente solo probabilidad condicional.	1	1,2%	12	6,0%	90	21,7%
C.3. Definición imprecisa de las dos probabilidades.	24	27,9%	111	56,7%	50	12,1%
C.4. Define correctamente las dos probabilidades.	10	11,6%	31	15,9%	127	30,7%

Tabla 2. Comparación de resultados globales de alumnos de ingeniería con estudios similares.

Solo el 11,6% de los alumnos de ingeniería define correctamente las dos probabilidades en comparación con el 15,9% observado en el estudio de Contreras *et al* (2013) y el 30,7% en alumnos de psicología del estudio de Díaz (2007). Respecto a la clasificación C.2 en el caso de estudiantes de ingeniería este porcentaje es prácticamente nulo (1,2%) a diferencia de los estudiantes de psicología donde este tipo de clasificación aparece en un 21,7% de ellos. Se tiene además que el 27,9% de los estudiantes de ingeniería define con imprecisión ambas probabilidad. Si se observa la tabla 1 en su mayoría (el 87,5% de este grupo) usa el concepto de dependencia en ambas definiciones. Finalmente, se observa un porcentaje superior en la Categoría C.1. (16,3%) respecto a la definición imprecisa de la probabilidad condicional en comparación con los estudios contrastados. Sobre el 50% de los estudiantes de este grupo menciona la dependencia causal.

CONCLUSIÓN

El estudio realizado en alumnos de ingeniería reflejó que las imprecisiones en la definición de probabilidad condicional detectadas en un principio en el artículo de Kahneman *et al* (1982) y verificadas en los estudio de Díaz (2007) y Contreras *et al* (2013) se dan en un porcentaje relevante en los alumnos que participaron en el estudio. La dependencia del evento condicionante mencionada por Falk (1986) es la imprecisión que más se observó en el estudio (más del 30% de los alumnos). La falacia temporal se observa en menor medida (8,2% de los estudiantes considerando las categorías C.1.1: Falacia temporal en la definición de probabilidad condicional y C.3.1: Falacia temporal en ambas definiciones de probabilidad)

en resumen, prácticamente el 40% de los estudiantes agrega una condición no necesaria a la definición de probabilidad condicional. Prácticamente no se observó uso de fórmulas para intentar explicar el concepto pedido (sólo 1,2% de los casos), esto último, puede deberse a que como la pregunta pedía explicar un concepto pudo entenderse que se refería a hacerlo sólo en forma verbal. También, se tiene que dentro del grupo de repuestas incorrectas, confundir el concepto de lo condicional con lo complejo (23,5% de los casos dentro del grupo de respuestas incorrectas), esto podría deberse a la falta de conocimiento de la palabra condicional por parte de los alumnos y deducir erróneamente del enunciado de la pregunta que condicional se contrapone a simple, por tanto, es complejo. Esto último, indicaría la falta en el manejo cotidiano de los términos que se utilizan en cursos de probabilidad (Londoño y Montoya, 2010).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Cádiz. España.
- Casar, G. (2009). Aplicación práctica e interdisciplinaria de la probabilidad y estadística en la Ingeniería. En *Memorias del 3er foro Nacional de Ciencias Básicas*, México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Contreras, J.M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática* (17), (pp. 237-244). Bilbao: Argitalpen Zerbitzua Servicio Editorial.
- Díaz, C. y Batanero, C. (2005). La probabilidad condicional en los textos de estadística para psicología. En *Acta del V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Portugal: FISEM.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada. España.
- Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin* 99, 3-19.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En: Davidson, R. Avidson, R. y Swift, J. (Eds.). *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 14(1), 43-54.
- Furina, G. (1994). Personal reconstruction of concept definitions: Limits. Challenges in mathematics education: constraints on construction. *Proceedings of the 17th Annual Conference of the Mathematics Education Research Association of Australasia*, (pp. 279-287). Lismore: Mathematics Education Research Association of Australasia.

- Gras, R., y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 15(1), 49 – 95.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Cambridge University Press*.
- Leikin, R. y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for profesional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, 62–73.
- Londoño, D. y Montoya, E. (2010). Azar, aleatoriedad y probabilidad: significados personales en estudiantes de educación media. *Presentación en VII Coloquio regional de Estadística, XII Seminario de Estadística Aplicada IASI y III escuela de verano CEAES*, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.
- Lonjedo, M. y Huerta, M.P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. En Castro, E y De la Torre, E.(eds.). Investigación en Educación Matemática. *Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp. 229–238). La Coruña: Universidad de la Coruña.
- Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education.
- Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. UNO. *Revista de didáctica de las matemáticas* 5, 37-55.
- Pollatsek, A., Well, A. D.; Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. Organization. *Behavior and Human Decision Processes, Seattle* 40(2), 255-269.
- Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 69(3), 217-233.
- Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis de Doctorado no publicada. Instituto de Formación de Profesores. Departamento de Matemáticas, Universidad de Rennes I. Francia.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En: Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* .(pp. 117-128). Cambridge, MA: *Cambridge University Press*.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: Tall, D. O. (Ed.). *Advanced mathematical thinking.Dordrecht: Kluwer*, 65–81.
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics* 69(2), 131–148.