EL INFINITO: PROBLEMAS PARA EL APRENDIZAJE EN UN TEMA DE CÁLCULO

Mario Garelik
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Universidad Nacional del Litoral
Santa Fe. Argentina.
mgarelik@gmail.com

RESUMEN

En este artículo se analizan las concepciones del infinito que prevalecen en estudiantes del primer año de carreras de ingeniería al enfrentarse a procesos infinitos.
En particular, cómo en ellas inciden, por un lado, los obstáculos didácticos y epistemológicos y, por otro, las distintas representaciones semióticas del concepto de infinito, a través del análisis de respuestas a cuestiones formuladas en contextos diferentes.
Un posterior análisis permitió valorar el aporte de la visualización para comprender tanto nociones de convergencia como el concepto de infinito actual, de mayor problematicidad para la asimilación por parte de los alumnos.

PALABRAS CLAVE: Aprendizaje. Infinito actual. Infinito potencial. Obstáculos. Comprensión.

INTRODUCCIÓN

En la matemática actual, el concepto de infinito resulta esencial y está presente directa o indirectamente (por ejemplo en temas que se apoyan en la noción de límites que, a su vez, involucran procesos infinitos), en la gran mayoría de sus ramas.

El problema de la comprensión cabal de su noción posee, entonces, una magnitud tal que trasciende el contenido de un tema específico.

Sin embargo, se advierte que en la enseñanza en los distintos cursos de matemática muchas veces no se prioriza la comprensión del concepto, y sí la implementación de procedimientos mecánicos destinados a encarar los problemas y ejercitación estándar. Se relega así a un segundo plano la definición y análisis del concepto, al que se asume como conocido y comprendido por los alumnos, que lo aceptan pero no llegan a entender su significación en los temas que lo involucran.

En consecuencia, cuestiones como la construcción formal del concepto, su significación y percepción ocupan desde hace ya tiempo a la Didáctica de la Matemática, lo cual se plasma en un sinnúmero de investigaciones y trabajos que estudian la dificultad que representa para los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El presente estudio aborda esta situación circunscripta al ámbito de los alumnos del primer año de las asignaturas de matemática de las distintas carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral.

Más específicamente, se sitúa en un momento en donde se manifiesta la conflictividad con la conceptualización del infinito, como lo es el estudio de series numéricas: las concepciones erróneas debidas a la trasferencia de nociones, procedimientos y propiedades de las sumas finitas a las series infinitas, se constituyen en obstáculos para la cabal comprensión de cuestiones relacionadas con convergencia y divergencia.

Atendiendo a esta situación, el estudio se inicia con un marco de referencia teórico enfocado en la noción de obstáculo desde las concepciones de Bachelard (obstáculo epistemológico) y de Brousseau poniendo especial énfasis en los aspectos didácticos y epistemológicos referidos al aprendizaje.

Esta línea de investigación se justifica en la consideración del carácter de obstáculo que presenta la noción de infinito en su acepción actual, tanto desde el punto de vista histórico-epistemológico como desde las dificultades que se manifiestan en su aprendizaje.

Seguidamente, se aborda la noción de infinito en sus dos acepciones: el infinito potencial, concebido como un proceso sin fin, que no tiene límites y el infinito actual, asociado a la idea de unidad, de proceso acabado, de límites alcanzados.

Sobre la base de estos lineamientos, y luego de una breve descripción del diseño metodológico empleado, se describe en el punto siguiente la experiencia que constituye un núcleo fundamental del trabajo. En la misma, se exhiben algunos de los errores típicos cometidos por los alumnos en distintas evaluaciones y coloquios y, a la vez, se exponen algunas estrategias didácticas para abordar el problema.

Por último, se presentan algunas conclusiones que refieren a la relación de los inconvenientes detectados con los lineamientos de la teoría de representaciones semióticas del profesor Raymond Duval y la importancia de la influencia de las mismas en el proceso de aprendizaje.

LAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DEL INFINITO

En las materias iniciales de ingeniería, son muy frecuentes los problemas referidos a la construcción de significados en aquellos contenidos que se apoyan en el infinito como tema central.

Tal es el caso de los límites infinitos y en el infinito, las rectas asintóticas a una función, las formas indeterminadas, la construcción del concepto de integral definida como límite de sumas de Riemann, sus aplicaciones, como el modelo de cálculo de la longitud del arco de una curva representativa de una función continuamente diferenciable en un intervalo cerrado, el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, el concepto de integral impropia, sucesiones, series numéricas, entre otros.

De manera transversal, en todos ellos surge el conflicto de la significación del aprendizaje, en este caso referido al concepto de infinito actual, tal como se lo concibe en la matemática contemporánea.

En el marco de la Teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 2002) puede pensarse que el alumno aloja en su estructura cognitiva al infinito potencial asociándolo con un proceso que se puede continuar indefinidamente, sin límites y que no ofrece, en general, grandes problemas para su comprensión. “Este infinito aparece muy pronto en el decurso del desarrollo conceptual sin que se manifiesten conflictos graves con la intuición y permanece largo tiempo sin evolucionar” (Waldegg, 1996, p. 108).

La incorporación de una nueva visión, en cambio, vinculada a la idea de unidad o totalidad que implica el infinito actual, no resulta tan natural. Esto no debería resultar sorprendente si se tiende una mirada a los históricos inconvenientes por los que el controvertido concepto de infinito tuvo que atravesar.

La historia de la matemática muestra, en efecto, que tampoco resultó sencillo el aceptar la noción del infinito como totalidad. En efecto, el curso histórico del concepto, que se inicia con la visión aristotélica del infinito potencial para luego dar paso a los primeros intentos de matematizar la infinitud a cargo de Bolzano y concluir con la concreción de la noción de infinito actual debida a George Cantor, no transitó, precisamente, un camino sin controversias.

Los históricos problemas epistemológicos que presentó el desarrollo del concepto de infinito parecen reproducirse a escala en los procesos de aprendizaje, en forma de obstáculos didácticos, que se abordarán, más adelante, en términos de las concepciones de Bachelard (1938) y Brousseau (1983, 1986).

Esta problemática de cómo las dificultades en torno a la noción de infinito interfieren en la comprensión de los conceptos en Matemática se aborda en diversos trabajos sobre el tema, tales como Moreno y Waldegg (1991), Waldegg (1996), Penalva (1996), Sacristán Rock (2003), Tirosh (1991), Tall (2001), Garbin y Azcárate (2002), entre otros.

Sin embargo, la posibilidad de alcanzar aprendizajes satisfactorios en matemática depende también, entre otros factores, del entorno, de estrategias didácticas, y del tipo de tareas y de discurso en los que participan.

En este sentido, el problema radica en encontrar el modo en que los nuevos aprendizajes -infinito actual- ensamblen con la estructura posiblemente preexistente –finitismo[1], infinitismo potencial[2]- que el alumno posee, en pos de alcanzar significado.

LOS OBSTÁCULOS

Según Bachelard (1938), un obstáculo surge por la naturaleza misma del conocimiento científico, esto es, se conoce en contra de un conocimiento previamente adquirido.

El avance del conocimiento científico se explicita por medio de continuas rupturas epistemológicas, o sea, de graduales rectificaciones de errores precedentes superando los esquemas teóricos convencionalmente aceptados.

La dificultad se presenta en el hecho de que dichas rupturas no son pasos fáciles de dar: surgen resistencias o reacciones que impiden el avance científico: los obstáculos epistemológicos, esto es, ideas que obstaculizan el surgimiento de nuevas ideas: hábitos intelectuales arraigados, teorías científicas que funcionan como dogmas, y sobre todo, fundamentos ideológicos que dominan a las diferentes ciencias, además de opiniones altamente aceptadas.

Brousseau (1983) precisa las condiciones que debería satisfacer un conocimiento para poder ser declarado un obstáculo en el sentido dado por Bachelard: tener un dominio de validez, resistir y reaparecer y ser constitutivo del saber.

---

[1] *Finitismo:* negación de toda posibilidad de continuar una operación indefinidamente, o sólo aceptar consideraciones sobre conjuntos finitos.

[2] *Infinitismo potencial:* argumentación siempre bajo la idea de un proceso que se puede repetir o continuar indefinidamente, pero no reconociendo la idea de completez o unidad de tales procesos.

A su vez, propone una clasificación de los obstáculos, según sus orígenes: ontogenéticos o psicogenéticos (relacionados con posibles limitaciones de las capacidades cognitivas del sujeto en algún momento de su desarrollo intelectual), epistemológicos (relacionados con el propio concepto y su desarrollo histórico) y didácticos (se adquieren y detectan en la práctica pedagógica, resultan de las elecciones didácticas diseñadas para establecer la situación de enseñanza).

Para este trabajo, y dada su vinculación con el contexto, resultan de interés las dos últimas categorías de obstáculos en relación con la noción de infinito.

BREVE HISTORIA: LOS DOS INFINITOS

El concepto de infinito, tan rico como de complejo tratamiento, exige una mirada histórica a sus orígenes que dé cuenta de su importancia en la matemática actual.

Siempre de manera crítica, ya la noción era concebida, en la cultura griega, desde la intuición que, a su vez, se apoyaba en razonamientos finitistas que producían situaciones contradictorias, entre las cuales la Paradoja de Zenón de Elea es la más conocida.

En la época aristotélica, el infinito carecía de medida y se asociaba a lo sin fin, la continuación indefinida, lo que no tiene límites, lo que no puede determinarse y, por lo tanto, no existe en sí mismo. Este enfoque, de lo que siempre se puede continuar, da origen a la noción de infinito potencial, un proceso que no se deja de recorrer.

Esta visión, de aparición tan temprana tanto en el desarrollo de las ideas como del intelecto del hombre, asociada al conteo y la permanente recursividad, reinó hasta fines del siglo XIX.
Es recién a fines del siglo XIX cuando cobra relevancia una nueva acepción del infinito, ahora como totalidad completa, de unidad, de un proceso ya finalizado. Esta nueva mirada del concepto, denominada infinito actual, cumple un rol de absoluto protagonismo en la matemática moderna a partir de la teoría de conjuntos de Cantor.

A diferencia del potencial, el actual, en tanto no apoyado en la intuición, resulta de dificultosa comprensión puesto que exige una concientización simultánea de todos los elementos de un conjunto infinito. De hecho, el sentido común no indica que una operación con infinitas etapas pueda verse como un proceso finalizado.

Por largos períodos de tiempo, la comunidad científica estuvo inmersa en profundas discusiones y enfrentamientos como consecuencia de las especulaciones en torno a uno y otro infinito.

Para una mayor profundización de los aspectos históricos, resultan de interés los aportes de Ortiz (1994) y Waldegg (1996), entre otros.

Sobre la base de estos lineamientos, se describe en el punto siguiente la experiencia que constituye un núcleo fundamental del trabajo.

DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA DE LA EXPERIENCIA

Consideraciones generales

La experiencia se llevó a cabo en un curso introductorio de Cálculo, que se imparte para estudiantes del primer año de diversas carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. En cada año, la matrícula incluye alumnos de edades que oscilan entre los 18 y 20 años, siendo éstos cursantes por primera vez o recursantes de la materia.

Estuvo compuesta por dos fases, realizadas en momentos diferentes y adoptando una metodología combinada entre cualitativa (centrada en comprender concepciones de los alumnos y posibles modificaciones de las mismas desde su propia reflexión) y cuantitativa, en tanto contempla el procesamiento de cuestionarios con el correspondiente conteo de datos sobre los resultados de su puesta en acción.

Primera fase. Indagación preliminar.

En esta primera fase, el estudio apuntó a conocer las dificultades en la concepción del infinito a partir del estudio de evaluaciones de distintos años de cursado de la asignatura.
Para tal fin, se recolectaron y analizaron 220 exámenes de la asignatura Cálculo I correspondientes a las instancias de evaluación del primer turno de diciembre de tres ciclos lectivos pasados.

Los contenidos de la citada materia son los típicos del cálculo diferencial e integral, sucesiones, series numéricas y de potencias.

En lo que respecta a la elección de la instancia de evaluación se basó en que corresponda a la primera oportunidad luego de finalizada la cursada de la asignatura.

Para el tratamiento, se tuvieron en cuenta los problemas que se manifiestan con mayor frecuencia y la tipología de las dificultades evidenciadas, siempre referidas a los conceptos matemáticos que se sustentan en procesos infinitos y, en particular, los concernientes a sucesiones y series numéricas.

La revisión de las producciones de los estudiantes permitió corroborar las distintas facetas de la intrincada relación que el alumno entabla con la concepción de infinito.

Se muestran a continuación algunos de los errores observados, de diversa índole, entre los cuales pueden consignarse, por ejemplo:

- *La extrapolación de propiedades de los conjuntos finitos a conjuntos infinitos* como uno de las falencias más frecuentes y de importancia relevante.

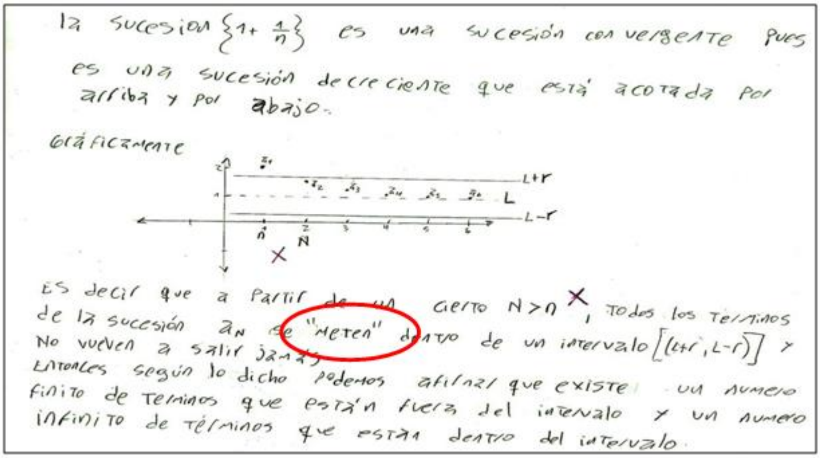
  Por ejemplo, ante la pregunta ¿Es convergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$?, 95 de los 220 estudiantes brindó respuestas basadas en una errónea extrapolación al campo infinito de propiedades como la asociación y cancelación de términos, válidas para un número finito de sumandos, al omitir la consideración de la suma parcial correspondiente.

  El origen del inconveniente podría fundamentarse en la noción de obstáculo didáctico en términos de Brousseau: en su primer contacto con los conjuntos infinitos, el alumno explicita su esquema intelectual en el arraigo a la experiencia anterior que lo lleva a generalizar a sumas infinitas propiedades válidas para sumas finitas.

- *La interpretación "potencial" de la noción de convergencia de una sucesión.*
  En consignas que tenían como objetivo apreciar el modo en que los alumnos incorporaban el concepto de convergencia de una sucesión de números reales, surgieron, también, cuestiones de interés para este estudio.
  Por ejemplo, ante el enunciado…

Sabemos que la sucesión $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ es una sucesión convergente. Más aún, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$. Explica con tus propias palabras cómo interpretas esa convergencia.

…resultó común encontrarse con respuestas del tipo:


la sucesión $\{1+\frac{1}{n}\}$ es una sucesión convergente pues es una sucesión decreciente que está acotada por arriba y por abajo.

Gráficamente

Es decir que a partir de un cierto $N>n$, todos los términos de la sucesión a_N se "meten" dentro de un intervalo $[(L+r, L-r)]$ y entonces según lo dicho podemos afirmar que existe un numero finito de términos que están fuera del intervalo y un numero infinito de términos que están dentro del intervalo.

Se aprecia cómo, aún sin expresar aproximación al límite L, utilizan, en referencia al entorno de L, términos tales como *caen*, *se meten*, *entran*, en clara postura potencial. Así, en un 48% de los casos, recurrieron a argumentaciones propias del infinitismo potencial para explicar el actualismo.

Los problemas y errores observados en las distintas evaluaciones finales respecto de temas relacionados con el infinito en sucesiones y series numéricas, motivaron el consecuente diseño, implementación y posterior procesamiento de los cuestionarios, con el fin de estudiar en los alumnos de cursos previos al de Cálculo I la persistencia como obstáculo de sus concepciones finitistas e infinitistas potenciales. Así se dio cabida a la segunda fase del diseño metodológico.

Segunda fase. Los cuestionarios

La implementación de los cuestionarios tuvo como objetivo la obtención de producciones estudiantiles que, a su vez, confirmaran las primeras impresiones y orientaran acerca de posibles estrategias que se enfocaran, desde la enseñanza, en atacar las falencias detectadas. Se adoptó como modalidad al tipo mixto (incluyen tanto preguntas abiertas como cerradas), en las cuales, además de ofrecer las alternativas de respuesta a los estudiantes, se les solicitaba que argumentaran su elección.

Se confeccionaron dos tipos de cuestionarios., que se implementaron en dos momentos distintos (con una semana de diferencia), distribuyéndose a todos los alumnos asistentes a las clases teóricas (215 estudiantes para el cuestionario analítico y 208 para el geométrico), que cursan la asignatura Cálculo I en las carreras de ingeniería de la Facultad. Se les otorgó un tiempo prudencial para responder cada cuestionario, al cabo del cual, el mismo docente se encargó de la recolección.

El primero de ellos (Cuestionario analítico) estuvo compuesto por preguntas presentadas con una formulación puramente algorítmica. Por su parte, el Cuestionario geométrico incluyó las mismas preguntas, pero esta vez realizadas mediante una formulación gráfica.

En ambos se incluyeron cuestiones vinculadas tanto al infinito actual como al potencial.
Los cuestionarios fueron elaborados respondiendo a las siguientes pautas generales:

- Las preguntas giraban alrededor de los conceptos de convergencia y divergencia de series.
- Los cuestionarios se estructuraron en base a preguntas que, planteadas en dos contextos distintos (uno analítico y otro geométrico), proponían situaciones problemáticas, interrogantes y opciones de respuesta que coincidían en su significado en ambos registros.
- En algunos casos, las respuestas podían ser afirmativas o negativas, en otros admitían y requerían respuestas libres. En todos los casos se pedían justificaciones de las mismas.
- El concepto de infinito no se definió previamente, dejando de este modo que se manifestara libremente la noción intuitiva de los estudiantes en las respuestas.
- Se prescindió de otorgar definición matemática precisa a las expresiones incluidas en las preguntas tales como "$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$", de forma tal que la significación fuera otorgada por los alumnos, de acuerdo con sus ideas previas.

Tanto las preguntas formuladas en los cuestionarios analítico y geométrico como el conteo de datos y la posterior comparación de las respuestas a una misma pregunta, según la misma estuviera formulada en un lenguaje analítico o gráfico, se describen en los apartados que siguen.

CUESTIONARIO ANALÍTICO

Se transcribe a continuación el primer cuestionario que se distribuyó a los alumnos.

Responde las siguientes preguntas explicando tus respuestas:

1) Considera la expresión $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

a) Siguiendo el mismo patrón ¿Puedes agregar dos términos más?

b) ¿Podrías seguir agregando términos indefinidamente?

c) ¿Puede $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ tener un resultado finito?

☐ Si ☐ No ☐ NS/NC

2) Considera la expresión $1-1+1-1+1-1+\cdots$

a) Siguiendo el mismo patrón ¿Puedes agregar dos términos más?

b) ¿Podrías seguir agregando términos indefinidamente?

c) ¿Qué resultado adjudicas a $1-1+1-1+1-1+\cdots$?

☐ 1 ☐ 0 ☐ Otro

3) Considera la expresión:

$$\underbrace{\left(1-\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{término 1}}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)}_{\text{término 2}}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right)}_{\text{término 3}}+\underbrace{\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\right)}_{\text{término 4}\ldots}+\cdots$$

a) Siguiendo el mismo patrón ¿Puedes agregar dos términos más?

b) ¿Podrías seguir agregando términos indefinidamente?

c) ¿Qué signo tiene cada término agregado?

d) ¿Puede $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$ tener un resultado finito?

☐ Sí ☐ No ☐ NS/NC

RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO ANALÍTICO

Se observa que, de aquellos alumnos que respondieron a la pregunta, el 94% consideró la posibilidad de seguir agregando términos indefinidamente. Aún en términos absolutos, el 67% revela que en su mayoría, los estudiantes manifiestan la admisión de la concepción potencial del infinito.

Sí	144	66,98%
No	9	4,18%
N/ C	62	28,84%
Total	215	100%

Tabla 1. Respuestas al Ejercicio 1 b

Sólo un 18% de los estudiantes acepta la posibilidad de un resultado finito. El resto o bien no la admite, o bien no contesta, lo cual indica que la actualidad de la noción de infinito no está instalada en la mayoría de los alumnos. El 45% de respuestas "No" muestra que casi la mitad de los estudiantes asume que la adición de términos positivos incrementa de manera indefinida el resultado.

Sí	39	18,14%
No	97	45,12%
NS/ NC	79	36,74%
Total	215	100%

Tabla 2. Respuestas al Ejercicio 1 c

En esta pregunta se manifiesta más claramente (94%) la percepción de la posibilidad de continuación de un proceso infinito con el agregado sin fin de términos.

Sí	202	93,92%
No	4	1,74%
NS/ NC	9	4,34%
Total	215	100%

Tabla 3. Respuestas al Ejercicio 2 b

Si se consideran las respuestas que otorgan un valor determinado a la serie, y, por tanto, no manifiestan idea de ausencia de límite, el porcentaje es 69,77%.

En las respuestas a esta pregunta se podría asumir que la respuesta ambigua que aceptaba dos resultados está indicando la ausencia de un valor límite. Incluso, se puede considerar la opción N/C como una expresión de perplejidad por no poder aceptar ninguna de las alternativas propuestas.

"0"	138	64,19%
"1"	11	5,58%
"0" o "1"	65	30,23%
Total	215	100%

Tabla 4. Respuestas al Ejercicio 2 c

Caben, por la similitud de los porcentajes, consideraciones similares a las expresadas en los comentarios de 2 b).

Sí	196	91,16%
No	0	0,00%
NS/ NC	19	8,84%
Total	215	100%

Tabla 5. Respuestas al Ejercicio 3 b

Comparada con las respuestas a 1 c), en esta pregunta se observa una disminución del porcentaje de alumnos que contestan que la suma carece de resultado finito. Sin embargo, hay que notar que casi un 41% responde de esa manera y que el porcentaje de falta de respuestas es más alto que en las preguntas similares dadas en el ejercicio mencionado.

Sí	62	28,84%
No	88	40,93%
NS/ NC	65	30,23%
Total	215	100%

Tabla 6. Respuestas al ejercicio 3 d

CUESTIONARIO GEOMÉTRICO

Se transcribe a continuación el segundo cuestionario distribuido a los alumnos.

Dentro de un cuadrado de área $A = 1$ se sombrean, en etapas consecutivas, las superficies indicadas en cada una de las tres figuras. **En la parte inferior, se muestran las áreas** obtenidas en cada etapa del proceso (áreas parciales). En cada una de las situaciones correspondientes a cada ejercicio, responde explicando tus afirmaciones.

Ejercicio1. Si el sombreado se va realizando tal como se muestra en la Figura 1

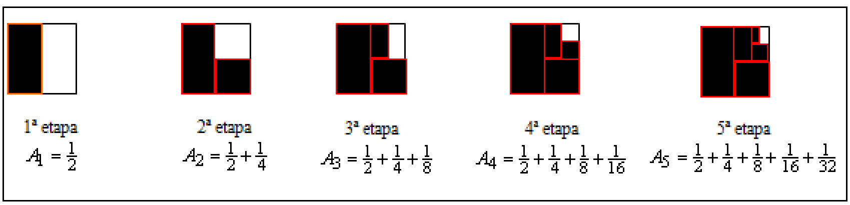


Figura 1

a) Calcula la magnitud de las áreas parciales que aparecen pintadas en cada etapa ¿cómo es cada una de ellas con respecto a la anterior?
b) Si pudieras seguir pintando áreas repitiendo el proceso indefinidamente ¿qué obtendrías? Indica con una cruz:

☐ Área finita ☐ Área infinita ☐ NS/NC

c) Si respondiste que el área es finita, ¿qué valor consideras que toma?

☐ Área=1 ☐ Área<1 ☐ Otra respuesta

Ejercicio 2) En el cuadrado de área 1, se pinta y se despinta, alternativamente, su superficie, tal como se representa en la Figura 2:

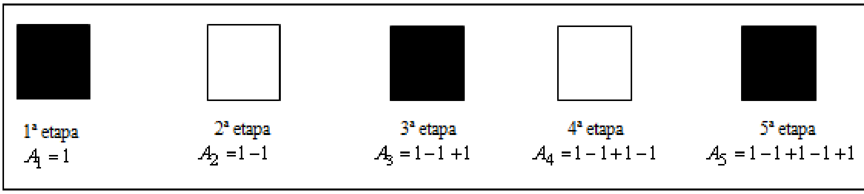


Figura 2

a) Calcula la magnitud de las áreas parciales que aparecen en cada etapa
b) Si pudieras seguir repitiendo el proceso indefinidamente ¿qué obtendrías?

☐ Área=1 ☐ Área=0 ☐ Otra respuesta

Ejercicio 3) En el cuadrado de área 1, el sombreado se va realizando ahora tal como se muestra en la Figura 3:

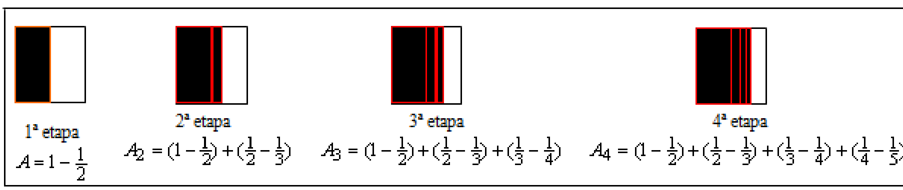


Figura 3

a) Calcula la magnitud de las áreas parciales que aparecen pintadas en cada etapa
b) Si pudieras seguir pintando áreas repitiendo el proceso indefinidamente ¿qué obtendrías?

☐ Área finita ☐ Área infinita ☐ NS/NC

c) Si respondiste que el área es finita, ¿qué valor consideras que toma?

☐ Área=1 ☐ Área<1 ☐ Otra respuesta

RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO GEOMÉTRICO.

Tal como en el anterior cuestionario, se presentan en tablas los porcentajes correspondientes a las alternativas elegidas por los alumnos y, a renglón seguido, los comentarios respectivos.

Se omiten las tablas de respuestas a las preguntas 1a), 2a) y 3a) de ambos cuestionarios, ya que sólo tenían por objeto corroborar que los alumnos comprendían el funcionamiento de los procesos involucrados, por lo que sus conteos no resultan de relevancia para este artículo.

Area infinita	63	30,29%
Area finita	139	66,83%
NS / NC	6	2,88%
Total	208	100%

Tabla 7. Respuestas al Ejercicio 1 b

Area igual a 1	91	65,63%
Area menor que 1	48	34,37%
Otra respuesta	0	0,00%
Total	139	100%

Tabla 8. Respuestas al Ejercicio 1 c

Aproximadamente dos tercios del total de alumnos (67%) parece advertir que la suma de las áreas llega a cubrir el cuadrado sin exceder sus límites. La tabla 8 muestra una clasificación de cómo respondieron esos 139 alumnos que aludieron a que el área al final del proceso resultaría finita.

Área 1	25	12,01%
Área 0	23	11,06%
Otra	160	76,93%
Total	208	100%

Tabla 9. Respuestas al Ejercicio 2 b

Menos de la tercera parte de los alumnos eligió una de las dos opciones taxativas (área 1 o área 0). La gran mayoría de los que contestaron “otra” (77%) aclararon, en las más variadas formas de expresión, que, en realidad, era “ninguna”, lo cual evidencia un acercamiento a la noción de divergencia.

Area infinita	54	25,96%
Area finita	125	60,10%
NS / NC	29	13,94%
Total	208	100%

Tabla 10. Respuestas al Ejercicio 3 b

Area igual a 1	93	74,4%
Area menor que 1	30	24%
Otra respuesta	2	1,60%
Total	125	100%

Tabla 11. Respuestas al Ejercicio 3 c

Tal como ocurre en el Ejercicio 1, también la mayor parte de los alumnos (60%) responde que la suma es 1. Asimismo, es similar, aunque inferior (25.96%), la cantidad de alumnos que consideran que puede llegar a obtenerse un área infinita. Igual que antes, la tabla 11 desagrega cómo respondieron los 125 alumnos que aludieron a que el área al final del proceso resultaría finita.

ANÁLISIS COMPARATIVO

La comparación se realizó entre las respuestas a las preguntas del primer cuestionario con las que se dieron a las mismas preguntas, formuladas en el Cuestionario geométrico. La similitud de resultados parece indicar que los alumnos reconocen procesos potencialmente infinitos, independientemente de los contextos en que los mismos son presentados.

La Tabla 12 facilita la comparación de las respuestas en ambos cuestionarios.

Consigna	Nociones involucradas	Cuest. Analítico	Cuest. Geométrico
1	Convergencia. Infinito actual	18,14% (1c)	66,83% (1b)
2	Divergencia	30,23% (2c)	76,93% (2b)
3	Convergencia. Infinito actual	28,70% (3d)	60,10% (3b)

Tabla 12. Comparación de respuestas

Puede notarse la magnitud de la diferencia entre las intuiciones certeras, según el problema se haya representado en uno u otro contexto.

La representación en el contexto analítico con sus correspondientes procedimientos algorítmicos, no hacen más que confirmar su intuición, y, a la vez, el rigor y la coherencia lógica que sostienen dichos procedimientos, le aseguran la validez de sus resultados.

Por otra parte, se advierte que la aproximación a nociones de convergencia y divergencia se realiza en mayor medida cuando se utiliza la representación visual en las cuestiones formuladas. Además, se puede apreciar, en el ámbito específico en que se realizó este estudio, y para las nociones asociadas al tema Series, el grado de influencia del tipo de representación en la aprehensión, por parte de los estudiantes, de la actualidad del infinito.

CONCLUSIONES

Las respuestas observadas en los alumnos en las dos fases de esta experiencia, proporcionaron indicadores acerca de la conveniencia del trabajo en diferentes contextos, en particular, en contextos geométricos y analíticos, para la construcción de conceptos sustentados en procesos infinitos.

Los primeros parecen favorecer los procesos intuitivos que son caminos básicos para la comprensión de las nociones y la realización de actividades en matemática. (Fischbein, 1982). Los últimos, ofrecen el real sustento de dichas actividades.

Tal como se expresó en las secciones correspondientes al tema objeto de este trabajo en su visión como obstáculo epistemológico y didáctico, los conflictos históricos parecen reproducirse a escala en el aula al momento de enfrentar a nuestros alumnos al tratamiento del tema. Mientras que el infinito potencial no ofreció problematicidad para su asimilación como proceso sin fin y no supuso una demanda de nueva significación, la visualización del infinito actual presentó, de manera clara, una natural resistencia para su incorporación significativa a la estructura cognitiva de los alumnos. Esta situación se condice, por otra parte, con las distintas investigaciones sobre el tema que en la actualidad conforman el estado del arte.

Se advierte, asimismo, la incidencia positiva del contexto gráfico para la captación de las mismas nociones mencionadas en el entorno analítico, ya que, bajo la órbita visual, se consiguieron indicadores de esclarecimiento en cuanto a la identificación del infinito actual. Aún en los casos más rebeldes (digamos, por ejemplo, en los que el alumno no divisó que, al final del proceso, el cuadrado quedaría totalmente sombreado) se alcanzaron consideraciones de valía como, por ejemplo, la identificación de que el proceso de sombreado no superaría el contorno del cuadrado propuesto. En este sentido, el entorno geométrico mostró indicadores que favorecen la conceptualización del infinito como un todo alcanzado; lo que está en armonía con investigaciones como las de Hiebert y Carpenter (1992), Janvier (1987), Kaput (1991), entre otros, acerca de la importancia de promover y considerar como indispensable la tarea de conversión entre representaciones de registros diferentes para completar una correcta formación del concepto, fortaleciendo la idea de que la estabilidad del conocimiento de un concepto se afirma en tanto quede al margen de contradicciones luego de atravesar los distintos registros de representación. (Duval, 1993).

En consecuencia, el objetivo principal será lograr que los estudiantes realicen el tránsito entre las concepciones intuitivas pero imprecisas y las nociones matemáticas rigurosas, comprendiendo que son estas últimas las que les ofrecen garantía de certeza en los resultados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Editorial Paidós.

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI Editores. Republicado en 1979.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. En: Wanhamme W., Wanhamme J. (editores) (1976). Republicado en. Recherches en didactique des mathématiques. 4, 2, 1983.

Brousseau, G. (1986). Fondements et methodes de la didactique des mathématiques. 7, 2, 33-115. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux - I. Talence: IREM de Bordeaux.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 5, 37-65.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Prof. *For the learning of Mathematics,* 3, 2, 9-19

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las ciencias,* 20 (1), 87-113.