

TIPOS DE REPRESENTACIONES EXTERNALIZADAS DURANTE EL PROCESO DE MODELACIÓN: EL CASO DEL CICLO DE MODELACIÓN BLUM-BORRROMEO

Jaime Huincahue Arcos
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Universidad de Playa Ancha - Campus San Felipe, Chile
jaime.huincahue@upla.cl

RESUMEN

Actualmente, la Modelación Matemática adquiere el estatus de línea de investigación para matemáticos educativos, generando importancia a los procesos de modelación desde el ciclo de modelación Blum-Borrromeo. Sin embargo, una problemática se presenta cuando la evaluación que realiza el profesor es observable solamente teniendo el desarrollo de una tarea en papel. Este trabajo pretende indagar en el proceso de modelación que realizan los estudiantes al interpretar y validar sus resultados desde las representaciones externalizadas representadas en un papel; se reflexiona sobre posibles dificultades, elementos del proceso de modelación no observables y propuestas en la elaboración de tareas de modelación matemática.

PALABRAS CLAVE: Modelación Matemática. Ciclo de modelación. Validación.

POSICIONAMIENTO TEÓRICO Y VISIÓN DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

Las relaciones existentes entre la realidad y las matemática tienen un constante registro desde los primeros escritos matemáticos de la humanidad, un ejemplo de aquello son los problemas expuestos en el clásico Papiro de Rhind, relacionado con problemas que resolvían situaciones de reparto de cantidades de onzas de pan, entre otros (Robins y Shote, 1987).

En el presente, es posible encontrar tal relación en actividades de modelización o resolución de problemas, siendo preferentemente promovidas a través de la mayoría de los currículos educativos latinoamericanos.

En la última década, se ha reflejado que en pruebas internacionales como Programme for International Student Assessment (PISA) o Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), que el desarrollo del conocimiento desde dimensiones epistemológicas, didácticas y cognitivas ha sido una herramienta ya inserta en el currículum nacional chileno para la enseñanza y el aprendizaje de las diversas disciplinas que éste incluye, no siendo la excepción en Matemáticas.

En Chile, los Objetivos de Aprendizaje desde el año 2012 consideran transversalmente cuatro habilidades para Matemáticas: modelar, representar, resolver problemas y argumentar y comunicar; quedando como un constante desafío para la comunidad académica considerar en la formación inicial y continua de profesores la inclusión del desarrollo de las habilidades y destrezas, y la integración de los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios (MINEDUC, 2012).

En los últimos 30 años, la Modelación Matemática ha adquirido un rol cada vez más protagónico en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, el desarrollo del conocimiento educacional e investigativo.

El progreso teórico ha llevado a enriquecer las metodologías de enseñanza, líneas de investigación y desarrollo de múltiples programas de estudio en todos los niveles educacionales.

En 1979, Henry Pollak considera a la Modelación Matemática como una manera de enlazar a la Matemática con “el resto del mundo”, estableciendo un primer significado del devenir de progresivas posturas asociadas a la Modelación Matemática, entendimientos diferenciados dependientes del uso y contexto disciplinar que se le pueda asignar a una tarea de modelación (Barbosa, 2003); a partir de esto es que investigadores en el área han definido distintos ciclos de modelación que describen los procesos de modelación.

En el trabajo de Borromeo (2006) se reportan algunos ciclos de modelación, destacando sus diferencias y similitudes epistemológicas. Además, las distintas funcionalidades que caracterizan a las tareas de modelación, han definido y aclarado categorizaciones descritas por la comunidad científica, principalmente Kaiser y Sriraman (2006) y Blomhøj (2009), nombradas como Perspectivas de Modelación Matemática, cuyos usos apuntan principalmente a la investigación y a la formación inicial y continua de profesores de Matemáticas.

Esta investigación presta atención a la Perspectiva Cognitiva, ya que tiene como interés principal el entender cuáles funciones cognitivas son activadas en un individuo al realizar una tarea de Modelación Matemática.

Por otro lado, es importante saber la conceptualización del concepto de Competencia para un mejor entendimiento de las competencias y subcompetencias de Modelación Matemática. Desde la definición de Frey (1999, citado en Jäger, 2001), una competencia “es la capacidad de una persona... de verificar y juzgar personalmente la corrección fáctica con respecto a la adecuación de enunciados y tareas, respectivamente, para transferirlos a la acción” (traducción personal).

Luis Rico (2006), conceptualiza una competencia para la Matemática desde el estudio PISA, declarando que la competencia matemática es: “...la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano”.

Para Niss (2004) una competencia matemática es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar matemática en una variedad de intra y extra contextos matemáticos y situaciones en las cuales la matemática juega o podría jugar un rol (citado en Maaß, 2006).

Niss acepta la fuerza de un ambiente matemático puro, en el cual se incluyan habilidades y destrezas, junto con la voluntad para ponerlas en acción desde evidencias cognitivas o de hechos.

Para Rico, una competencia es desarrollada en su plenitud en la vida individual de ciudadano, además de tener mayor cercanía con la definición de Frey, ya que los hechos pueden ser mejor observados en la vida cotidiana, aceptando que los fundamentos teóricos de la resolución de una tarea son de un ambiente matemático.

Necesariamente, la Modelación Matemática posee características cognitivas que trascienden de elementos fácticos y que son desarrollados en ambientes tanto matemáticos como del cotidiano, en donde no son suficientemente abordados por los conceptos de competencia y competencia matemática de Frey y Rico respectivamente; no así en la definición de Niss, ya que existe una valoración en cuanto a las actividades que son realizadas en un ambiente puramente matemático.

Para Maaß (2006), las Competencias y subcompetencias de Modelación (Blum y Kaiser 1997, citado en Maaß, (2006)) incluyen destrezas y habilidades para realizar procesos de modelación apropiadamente, orientado a objetivos y poseer la voluntad de poner éstos en acción. Es decir, las competencias de modelación dependerán de lo que entienda por un ciclo de modelación y su respectivo proceso.

Tal entendimiento tiene que ver con múltiples factores, desde saber cuál es el ciclo de modelación a considerar por el investigador hasta si las tareas utilizadas fueron o no consideradas complejas por los estudiantes, pudiéndose describir distintos procesos de modelación a partir de estos supuestos (Borromeo, 2006).

En este trabajo, se entenderá como Modelación Matemática al proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones (Blum y Borromeo, 2009), bajo una dimensión cognitiva desde el ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo, 2006). Además, las competencias de modelación asociadas son las referidas en Blum y Kaiser (1997).

DIMENSIÓN COGNITIVA

Desde el necesario conocimiento del investigador en Educación Matemática, es que las preferencias que tiene una persona al realizar una tarea de modelación son importantes de conocer, ya que se transforman en una herramienta predictiva para el investigador y el profesor de las posibles rutas a considerar en el abordaje de la tarea.

De esta manera, el estatus de las preferencias de las personas y/o los gustos dentro del proceso de modelación deben tener cierta significancia en el fortalecimiento del aprendizaje de las Matemáticas.

La Teoría del Autogobierno Mental (Sternberg, 1999) genera directrices para conocer las preferencias y gustos de los estudiantes, clarificando diferencias entre los gustos y aptitudes para definir los estilos de pensamiento de las personas. Un estilo para Sternberg (1999) es:

...una manera de pensar. No es una aptitud, sino más bien una forma preferida de emplear las aptitudes que uno posee... Aptitud se refiere a lo bien que alguien puede hacer algo. Estilo se refiere a cómo le gusta a alguien hacer algo (p. 24).

Estos estilos de pensamiento incluyen variables como el entorno, la cultura, la escolaridad, la crianza y el género, en donde todas ellas podrán definir un lineamiento en las rutas del pensamiento de un estudiante.

Existen ejemplos en Educación Matemática que han utilizado esta teoría para el levantamiento de marcos teóricos como son los artículos de Borromeo y los Estilos de Pensamiento Matemático (Borromeo, 2006, 2010) al resolver tareas de Modelación Matemática. La Teoría del Autogobierno Mental asume como idea básica que:

...las formas de gobierno que tenemos en el mundo no son fortuitas, sino que son reflejos externos de lo que piensan las personas. Representan sistemas alternativos de organizar nuestro pensamiento. Por tanto, las formas de gobierno que vemos son reflejos de nuestra mente (Sternberg, 1999, p. 39).

Esto podría indicar por qué un estudiante hace o no hace alguna actividad a partir de una metodología específica de enseñanza dada por el profesor, pero por otro lado, también deja ver que se puede formar un gusto con procesos sociales, es decir, los estilos de pensamientos son dinámicos a través del tiempo, tienen múltiples variables que producen el desarrollo y evolución de éstos, que pueden inferir en las actividades internas y externas de un proceso educativo.

Sin embargo, es una definición no lo suficientemente cercana para estimar lo que sucede en el aula cuando un alumno aborda una tarea, ya que el conocimiento previo, y la preferencia en la construcción de conocimiento personal forman parte en la decisión del estudiante al abordar una tarea de modelación.

Borromeo (2006) define los Estilos de Pensamiento Matemático: “El término estilo de pensamiento matemático denota el camino en el cual un individuo prefiere presentar, entender y pensar a través de hechos matemáticos y conexiones usando ciertas imaginaciones internas y/o representaciones externalizadas” (p. 105, traducción personal).

De esta postura, la clasificación de estilos permite mostrar las preferencias de cómo son usadas las habilidades matemáticas de los estudiantes. Borromeo (2010) define tres estilos de pensamiento matemático para estudiantes de 9º y 10º grado:

Estilo de pensamiento visual: Los pensadores visuales muestran preferencias para distintivas imaginaciones pictóricas internas y representaciones pictóricas externalizadas, así como las preferencias para el entendimiento de hechos matemáticos y conexiones a través de representaciones holísticas. Las imaginaciones internas son principalmente afectadas por fuertes asociaciones con situaciones vividas.

Estilo de pensamiento analítico: Los pensadores analíticos muestran preferencias por imaginaciones formales internas y por representaciones formales externalizadas. Son viables a comprender hechos matemáticos preferiblemente a través del simbolismo existente o representaciones verbales y prefieren proceder a través de una sucesión de pasos.

Estilo de pensamiento integrado: Estas personas combinan caminos de pensamiento visual y analítico y son viables a cambiar con flexibilidad entre diferentes representaciones o caminos de proceder.

Al tomar conocimiento el profesor de los distintos estilos de pensamiento matemático en sus estudiantes (estilo predominante y/o singularidades en un curso), permitiría una mejor comunicación en el aula y sería una potente herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

EL CICLO DE BLUM-BORROMEIO

Borromeo (2006) integra aspectos cognitivos al ciclo de Blum y Leiß (2006), estableciendo un tipo de validación en la fase representación mental de la situación. El año 2010 incluye una doble validación hacia la fase modelo real, como es descrito en la figura 1:

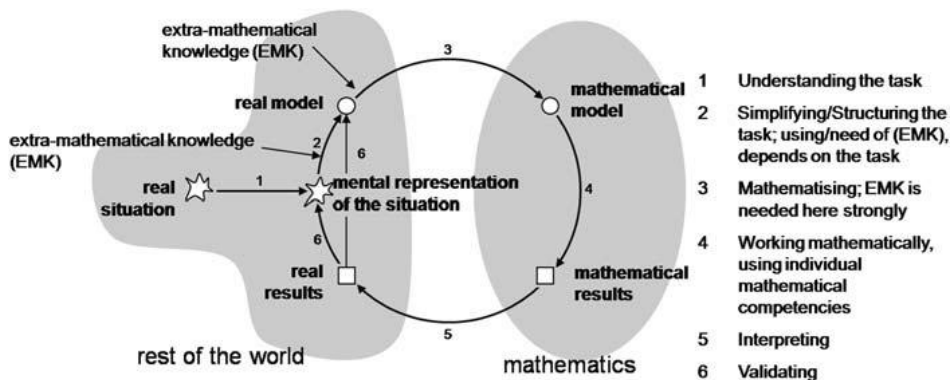


Figura 1. Ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo, 2010).

El ciclo es iniciado con una situación dada en el mundo real (RS), la que puede ser dada por una imagen, un texto o ambos, luego existe una transición, que es el entendimiento parcial del problema, el cual puede ser a nivel implícito e inconsciente para el modelador, la siguiente fase es la representación mental de la situación (MRS), en donde toma decisiones y filtra información del problema, acá depende el estilo de pensamiento matemático del individuo ya que en esta fase es en donde se define cómo tratar el problema en los próximos procesos de modelamiento, la siguiente transición es la idealización y simplificación del problema, siendo un proceso mucho más consciente que los anteriores.

La próxima fase es el modelo real (RM), el que muestra cómo es construido el modelo, dibujos o fórmulas pueden representar el modelo real, aunque depende de las declaraciones verbales el sustento de las representaciones externas, además, es incluido el conocimiento extramatemático que posea la persona y que relacione con el modelo real construido.

La siguiente transición es la matematización, en donde también es utilizado y requerido el conocimiento extramatemático para la construcción del modelo matemático (MM), en éste, aparecen representaciones externas por dibujos o fórmulas, pero las declaraciones son en un nivel matemático, luego hay que hacer trabajo matemático, necesitando las competencias matemáticas del modelador, para obtener los resultados matemáticos (MR), ellos después son interpretados, incluso de manera inconsciente, para obtener los resultados reales (RR), los cuales deben ser validados, discutiendo la correspondencia entre los resultados reales y la representación mental de la situación.

Existen dos tipos de validación, la primera es una validación intuitiva, el modelador enuncia que el resultado es o no el correcto sin ser capaz de justificar su respuesta, es una validación que no encaja en el marco de asociaciones; y la validación basada en el conocimiento, el cual se apoya fuertemente en la correspondencia del problema basado en su representación. Generalmente, estos tipos de validación son inconscientes y conscientes, respectivamente.

REPRESENTACIONES EXTERNALIZADAS

Un problema a considerar en el apoyo de la investigación desde una perspectiva de modelación cognitiva (Kaiser y Sriraman, 2006), es el reconocimiento de representaciones externalizadas en el tránsito del ciclo de modelación y saber si el tipo de tarea influye según los estilos de pensamiento matemático que puede tener el modelador para explicitar tal representación externalizada en un papel, de esta forma se pueden establecer diversidad de posturas y complejidades del modelador durante la tarea de modelación, además de las posibles elecciones en las rutas existentes.

El objeto de investigación de este trabajo es la fase de validación y bajo qué tipo de registro existe, ya que en Borromeo (2010) es documentado que la validación puede ser como se muestra en la figura 1, es decir, hacia la representación mental de la situación, o bien, hacia el modelo real.

Sin embargo, cuando es realizada la validación en esta última, no es claro para el profesor que evalúa observe tal validación, ya que para encontrar evidencia del fenómeno, es necesario crear alguna representación externalizada durante el desarrollo de la tarea que de alguna manera quede un registro, que no necesariamente se remita hacia acciones gesticulares o en la inclusión de procesos metacognitivos.

Borromeo indica la vaga representación externalizada existente en esta fase (2010). Generalmente estas representaciones son evidenciadas al entrevistar a los estudiantes o cuando son filmados, emanando representaciones gesticulares o pictóricas con rasgos de metacognición mediante el proceso de extracción de antecedentes para la investigación y no necesariamente dentro de una práctica docente.

EXPERIMENTACIÓN Y DISCUSIÓN

Se ha realizado una actividad a estudiantes de 2° medio (10° grado) del colegio chileno “Oscar Castro” en la ciudad de Rancagua, región de O’Higgins, para tomar evidencias acerca de qué representaciones externalizadas escritas son evidenciadas bajo el ciclo de modelación Blum-Borromeo (Borromeo, 2006).

Se les ha pedido a los estudiantes que se agrupen de 3 a 4 personas, de tal forma que la colectiva utilización del conocimiento extramatemático sea utilizada en la construcción de la solución a la tarea y como un facilitador del características metacognitivas al emerger discusiones con respecto al desarrollo de la tarea.

Se les entrega a cada integrante la siguiente tarea de modelación, teniendo cercanía hacia la perspectiva cognitiva y educacional-conceptual en el sentido de Kaiser y Sriraman (2006):

El Campeonato de Fútbol

En el primer trimestre, el Colegio Oscar Castro ha realizado un torneo de fútbol interno, en el cual cada curso tiene su propia selección. En este campeonato, el equipo de segundo medio tiene solo 10 aguerridos hinchas. Al finalizar el torneo el primero medio sorprendió quedándose con el primer lugar, esto llama la atención de los demás, consiguiendo así triplicar su barra y volviéndose el equipo sensación del colegio, por esto, han participado en otros tres torneos que se realizaron en cada trimestre; en el primero, obtienen el cuarto lugar quedándose con la mitad de lo que ya tenían; en el segundo, logran el tercer puesto, manteniendo sus seguidores; y en el tercer campeonato pierde la final, duplicando su barra. Realicen representaciones con la situación planteada. ¿Qué pasa si el equipo siempre sale primero, segundo, tercero o cuarto? ¿Existen regularidades en las representaciones? ¿Puede el equipo quedar sin hinchas? Explica tus respuestas.

En el transcurso se aprecia que los estudiantes discuten la actividad y empiezan a realizar propuestas a nivel grupal, y evidenciando que muchos transitan por el ciclo de modelación bajo distintos estilos de pensamiento matemático.

En la figura 2 hay evidencia de un desarrollo estructurado de la actividad, luego representan de dos formas, las que permanecen dentro de la matemática que ellos conocen desde el colegio, sin evidenciar el interés por otras representaciones; además muestran que la validación es basada en el conocimiento de la representación mental de la situación.

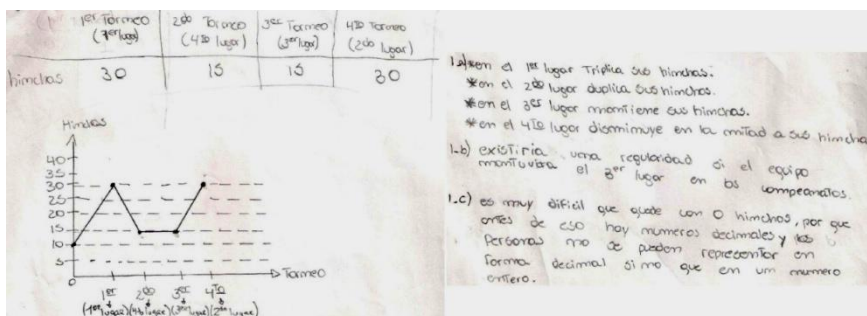


Figura 2. Estilo de pensamiento matemático analítico. Validación lógica hacia la representación mental de la situación.

En la figura 3, observamos que no utiliza los datos para responder, es en base a la experiencia del grupo la respuesta emanada, los estudiantes han preferido responder a través de la realidad, sin incluir a la matemática en su desarrollo.

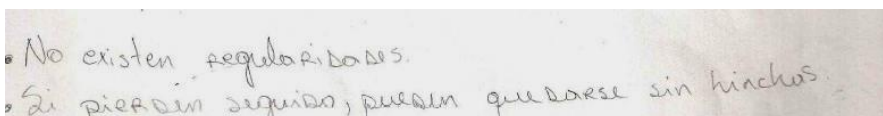


Figura 3. Validación intuitiva.

En la figura 4 existe una representación pictórica fuera de la matemática tradicional, en donde la validación ha sido realizada a través de la representación mental de la situación, ya que los resultados son validados hacia el entendimiento de la tarea, sin incluir características propias de la fase de modelo real. Existe evidencia para decir que es un estilo de pensamiento visual desde las representaciones externalizadas que el estudiante ha creado.

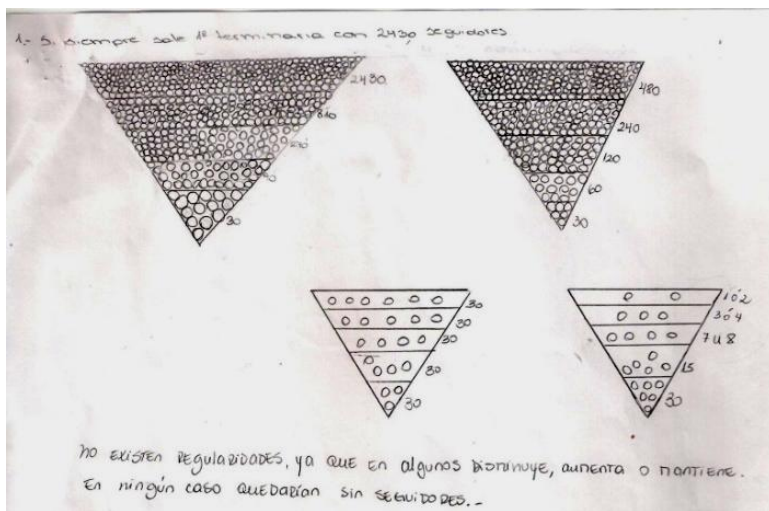


Figura 4. Estilo de pensamiento matemático visual. Validación intuitiva a través de la representación mental de la situación

CONCLUSIONES

La indagación en los procesos que realizan los estudiantes al estar frente a una tarea de modelación evidenció la mayoría de las fases que describe el ciclo de modelación Blum-Borromeo en el papel. Sin embargo, no existen evidencias reflejadas en el papel del tránsito por la fase de “modelo real”.

Desde la literatura citada, es posible decir que la tarea del Campeonato de Fútbol promueve tipos de representaciones externalizadas hacia un registro en papel, sin ser posible vislumbrar una relación con la fase “modelo real”.

Esto conlleva a reforzar la idea de que la fase de “modelo real” permanece fuertemente en un ambiente metacognitivo del ciclo de modelación de Blum-Borromeo, siendo la única fase del ciclo que ha quedado sin un registro gráfico en este trabajo.

Las consecuencias en el aula son variadas, ya que un profesor al evaluar una tarea de modelación le será más complejo establecer si el estudiante valida o no su respuesta cuando utilice la fase “modelo real” para tal propósito, debiendo conducir de manera más explícita la validación en la tarea si es que tiene como objetivo de aprendizaje el tránsito desde la matemática hacia la realidad en tareas de modelación.

Es sabido que no es suficiente conocer únicamente las representaciones externalizadas en papel para definir el Estilo de Pensamiento Matemático de un estudiante, ya que también se requiere el conocimiento de las imaginaciones internas, implicando otro tipo de estrategias metodológicas.

Sin embargo, la creación de ciertas tareas, como la creada para este trabajo, facilita la visualización para el investigador en la búsqueda de evidencias del proceso de modelación, especialmente cuando la investigación indaga en funciones cognitivas, que surgen al transitar durante el ciclo de modelación Blum-Borromeo y que las evidencias serán únicamente de las representaciones en papel.

Los aspectos motivacionales intrínsecos de la tarea pueden ser lo suficientemente potentes para el estudiante como para que sus validaciones se mantengan en una realidad que no necesita de Matemáticas para el desarrollo de las tareas.

Lo último es también reportado en el sentido de Competencias de Modelación (Maaß, 2006), cuando las características motivacionales logran distraer al estudiante de la tarea matemática que se pretende provocar.

Estudios doctorales del autor financiados por CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2015-21151169.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parder & K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: a way of life* (pp. 227-234). Chichester: Ellis Horwood.
- Blomhøj, M. (2009). Different Perspectives in Research on Teaching and Learning Mathematical Modelling. Categorizing the TSG21 Papers. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.). *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics*. Proceeding from topic study group 21 at the 11th International congress on Mathematical education in Monterrey, México, 2008. 1-17.
- Blum W. y Borromeo R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and application*. 1(1). 45-58.

- Blum, W. y Kaiser, G. (1997). *Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden*. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.
- Blum, W. y Leiß, D. (2006). "Filling up" - The Problem of Independence Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Task. En *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME4)*. Guixol: M. Bosch.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* vol 38 (2), 86-95.
- Borromeo, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik* vol 31 (1), 99-118.
- Jäger, R. (2001). *Von der Beobachtung zur Notengebung*. Landau in der Pfalz: Verlag Empirische Pädagogik.
- Kaiser G. y Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38(3). 302-310.
- Maaß K. (2006). What are modelling competences?. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (2) 113-142.
- MINEDUC. (2012). Curriculum en línea. Recuperado el 24 de Agosto de 2015, de http://curriculumenlinea.mineduc.cl/sphider/search.php?query&t_busca=1&results&search=1&dis=0&category=1.
- Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In A. Gagtsis & Papastavridis (eds): 3rd Mediterranean Conference on mathematical education, 3-5 January 2003, Athens, Greece. (pp. 115-124). Athens: The Hellenic mathematical society, 2003.
- Pollak, H. (1979). The interaccion between mathematics and other school subjects. Paris: UNESCO (Eds.), *New Trends in mathematics teaching IV*.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Robins, G. y Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus. An ancient Egyptian text*. British Museum Publications, London.
- Sternberg, R. (1999). *Estilos de Pensamiento*. Barcelona: Paidós.