ANÁLISIS DE LOS ERRORES COMETIDOS EN EL ELEMENTO MATEMÁTICO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2

Analía Edith Bozzalla y Silvina Aída García Serrano
Universidad Argentina de la Empresa (UADE), Argentina.
abozzalla@uade.edu.ar - sgarcia@uade.edu.ar

RESUMEN

Este trabajo que nos convoca surge de la preocupación, que como docentes, experimentamos con nuestros alumnos en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre determinadas unidades temáticas.
La indagación de dichos procesos nos hizo participes de la aparición sistemática de una variedad de errores que limita y dificulta los logros en el aprendizaje;
La unidad temática seleccionada: sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, pone de manifiesto los estados de comprensión de los alumnos para con algunos temas ya planteados y evaluados en la materia.
El protagonismo que en este trabajo proponemos darle al error pretende abrir un espacio de reflexión sobre nuestras prácticas docentes.

PALABRAS CLAVE: Error. Sistemas. Ecuaciones. Recorridos Didácticos. Reflexión.

INTRODUCCIÓN. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El interés que nos convoca a realizar este trabajo, radica en la necesidad de abordar las dificultades que presentan los alumnos en la unidad temática: sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. El propósito fundamental implica abordar dichas dificultades desde el análisis de los procedimientos y procesos de pensamiento puestos en marcha por nuestros alumnos en la resolución de una práctica adicional.

La diversidad de contenidos que presenta la temática, nos pareció indispensable para el estudio de las prácticas habituales en sus diferentes registros de representación: verbales, algebraicos y gráficos. La circulación, a la cual invitamos que el alumno transite, generara la exposición de interpretaciones, razonamientos y verbalizaciones indispensables para cumplir con el objetivo del trabajo. Según Duval (1999), las representaciones en los diferentes registros, no solo son necesarias para comunicar, sino esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

La puesta en marcha de una secuencia didáctica que deje ver los elementos expuestos anteriormente, Serra el punto de partida para una actividad centrada en el error como organizador del currícula.

OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo de este trabajo consiste en el análisis de los errores y dificultades en la resolución de tareas referidas a sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 por alumnos de primer año de diferentes carreras de la Facultad de Ciencias Económicas de UADE.

Este propósito se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1- Analizar el rendimiento de los alumnos en términos de procedimientos acertados
2- Describir, de acuerdo a una clasificación propuesta, los errores que cometen los alumnos en la ejecución de las tareas propuestas

FUNDAMENTACIÓN. CLASIFICACIÓN DE ERRORES

La identificación de los distintos tipos de error permite un análisis minucioso de las producciones de los alumnos para un posterior diagnostico de las dificultades que presentan los mismos en la temática planteada.

La clasificación propuesta surge de los aportes de los siguientes autores:
Davis (1984), quien estandarizo los errores más comunes de los alumnos en el aprendizaje de la matemática: reversiones binarias, errores inducidos por la notación, errores por recuperación de un esquema previo, errores por una presentación inadecuada y normas que producen normas.

Rico (1995) señala la investigación de Mosvshovitz- Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) quienes presentan una clasificación de errores basada en un análisis constructivo de las soluciones de un grupo de alumnos realizadas por expertos.

Por su parte Socas (1997) considera tres ejes en el análisis del error: los obstáculos, la ausencia de sentido y las actitudes efectivas y emocionales. Por su parte Astolfi (1999) realizan categorizaciones similares.

Como resultado del aporte de los autores mencionados surge la siguiente clasificación de errores cometidos en el objeto matemático estudiado. Al analizar las respuestas a la prueba planteada, se establecieron las siguientes categorías para los errores:

E1- Errores al realizar operaciones aritméticas y/o algebraicas: se refiere a los errores de cuentas o aquellos que surgen en el manejo algebraico de los datos debido al empleo incorrecto de propiedades o definiciones.

E2- Uso incorrecto del lenguaje simbólico: se refiere a los errores generados por la falta de comprensión o especificación de los significados de los símbolos, de forma de poder operar con ellos, poder interpretar los resultados obtenidos y traducir dichos resultados a los diferentes contextos.

E3- Falta de verificación de los resultados parciales o totales: se refiere a aquellos errores generados por falta de correspondencia entre las soluciones brindadas y las consignas planteadas, por la desconexión entre las respuestas brindadas en los distintos contextos que llevan a respuestas incoherentes entre si y por la no comprobación de los resultados obtenidos en las ecuaciones planteadas.

E4- Mecanización o repetición rutinaria de mecanismos: muchas veces la repetición rutinaria de ejercicios puede producir rigidez en el pensamiento, en el sentido de que los alumnos aplican mecanismos aun cuando las condiciones planteadas en el ejercicio no permitan su aplicación, no lleven a la solución buscada o bien exista otra forma más óptima para llegar a la solución buscada.

E5- Realización de inferencias no válidas lógicamente: se refiere a errores relacionados con fallas en el razonamiento o en las conclusiones obtenidas y no al contenido específico.

E6- Errores debido a las dificultades para obtener información espacial: se refiere a los errores ocasionados por la dificultad para pensar espacialmente a partir de la interpretación de gráficos y de su traducción a los distintos contextos, o bien, generados por la realización de representaciones inadecuadas de situaciones dadas en forma verbal o algebraica.

E7- El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en algebra. Muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica

E8: Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento. Resulta frecuente que los alumnos empleen su experiencia en la resolución de problemas para replicar dichas estrategias en la resolución de situaciones nuevas. Esto puede generar una rigidez en el modo habitual de pensamiento y en la falta de flexibilización para pasar de un sistema de representación a otro. Esto está relacionado con la importancia de abordar una temática desde diferentes sistemas de representación; según Duval (1999, p.46) “ la comprensión integral de un contenido conceptual está basado en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva”

E9: Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos En ellos incluimos a todos las deficiencias de conocimientos sobre contenidos y procedimientos para las tareas matemáticas aprendidos en instancias previas. Resulta bastante frecuente que los alumnos “arrastren” procedimientos o concepciones erróneas y construyan conocimientos nuevos sobre estas bases.

E10: Secuencias injustificadas de procesos. Son aquellos errores que se presentan cuando el alumno pone en marcha una secuencia incoherente de procesos, en la que no existe justificación o la justificación se da de manera incorrecta.

E11: Procedimientos inconclusos Este tipo de errores se dan cuando los alumnos no logran concluir procedimientos.

DESARROLLO. LOS DATOS

Los datos de esta investigación se obtuvieron de la aplicación de una práctica adicional puesta en marcha antes de la toma del primer parcial de la materia.

Para cumplir con la tarea de recolectar datos construimos un instrumento basándonos en la guía de estudio de la materia, en la bibliografía citada y en el aporte de docentes que dictan la materia hace ya muchos años en la universidad. Aplicamos el instrumento para recolectar datos y con ello nos referimos a observaciones de acontecimientos y contextos que resultan de nuestro interés.

Instrumento de medición

Con el objetivo de relevar los errores más significativos que cometían los alumnos al resolver sistemas de ecuaciones lineales, se confeccionó la siguiente prueba:

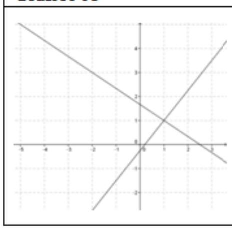
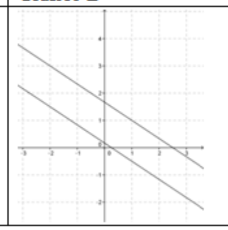
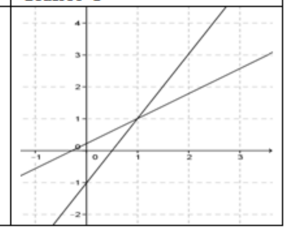
Actividad 1

Dadas las ecuaciones $\dfrac{-(2x+3y)}{5} = -1$; $x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}y$

a- ¿Existe algún par que sea solución de ambas ecuaciones? ¿Cómo y dónde lo buscaría?

b- ¿El punto (1,1) es solución de la ecuación $2x + 3y = 5$?

c- ¿Cuál de los gráficos se corresponde con el problema planteado? Justifique su elección.

Grafico A	Gráfico B	Gráfico C
		

Actividad 2

La dueña de una casa de té decide renovar la decoración de su local. Para ello compra telas para cortinas, las cuales cuestan $200 el metro, y otras para mantelería cuyo costo es $ 50 el metro. Si en total pagó $2500:

a) Escriba la ecuación que representa la situación planteada.

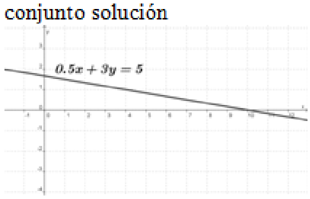
b) ¿podría determinar cuántos metros compró de cada tela?

c) ¿Es única la solución? Justifique.

d) Represente gráficamente el conjunto solución.

Actividad 3

El siguiente gráfico es la representación de una de las ecuaciones que integran un sistema, si la otra ecuación involucrada es $x+6y=10$. Determine si el mismo posee solución. Si la respuesta es afirmativa determine si la misma es única y escriba el conjunto solución



Descripción del alumnado

La población involucrada en este estudio está constituida por todos los alumnos de primer año de carreras como Licenciatura en RR.HH, Contador Público, Licenciatura en Administración, Licenciatura en Comercio Exterior, Licenciatura en Finanzas, Licenciatura en MKT y todos los programas conjuntos que ofrece la Universidad.

Para el estudio se considero una muestra de 50 alumnos cursantes de primer año de las carreras mencionadas.

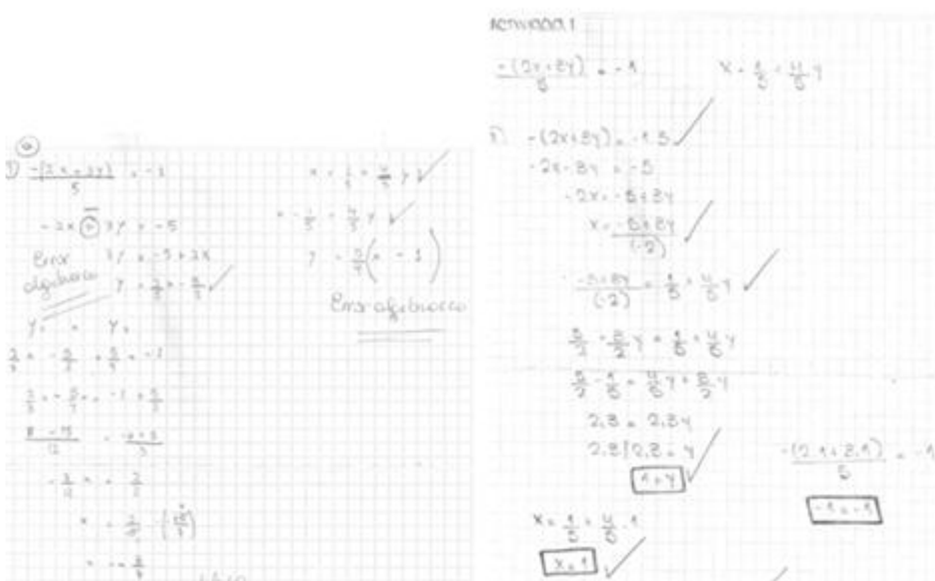
ANÁLISIS DE LOS ERRORES EN LA INTERPRETACIÓN DE LAS TAREAS

En este capítulo, en base a la clasificación de errores ya expuesta, detallaremos los errores que cometieron los alumnos en los distintos ítems de los ejercicios presentes en la prueba.

Detallamos a continuación los distintos errores encontrados:

Ejercicio 1:

En el ítem a) se encontraron los siguientes errores:

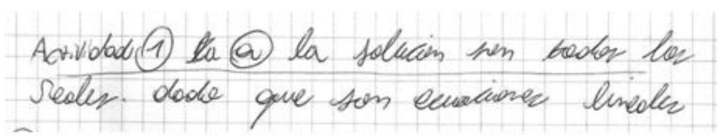


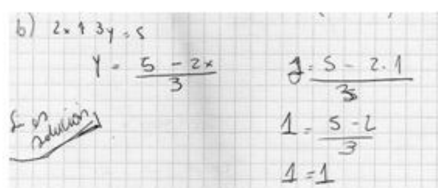
Errores al realizar operaciones aritméticas y/o algebraicas:
Uso incorrecto del lenguaje simbólico:

La imagen nos muestra que si bien el alumno puede encontrar la solución no la expresa como par ordenado. Esto nos muestra que la solución de un sistema de ecuaciones es percibida por los alumnos como un valor para x y otro para y pero no se interpreta como el punto de coordenadas (x,y).

Las imágenes anteriores sirven como ejemplo de **errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento,** debido a que, aun cuando en la segunda ecuación ya estaba despejada la variable x, el alumno necesita despejar en ambas ecuaciones la variable y para poder igualar y resolver de esta forma el sistema dado.

Errores debido a la realización de inferencias no válidas lógicamente:
El alumno infiere que por tratarse de una ecuación lineal, la misma posee infinitas soluciones.



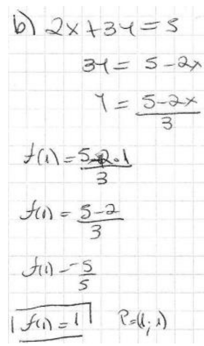


El alumno infiere que por tratarse de una ecuación lineal, la misma posee infinitas soluciones

En el ítem b) se encontraron los siguientes errores:
Errores por mecanización o repetición rutinaria de mecanismos y errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos

La imagen nos muestra cómo, si bien el alumno es capaz de verificar correctamente la solución no puede reconocer la ecuación dada como una de las ecuaciones del sistema anterior y por lo tanto no reconoce que el par (1,1) hallado en el ítem anterior es obviamente solución de la ecuación planteada.

Al mismo tiempo podríamos también pensar que el alumno comete un error de f**alta de verificación de los resultados parciales o totales,** debido a que considera al punto (1,1) como solución del sistema pero no ve a dicho par como un punto que es solución de cada una de las ecuaciones planteadas y en esto podemos también inferir que existen **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos** ya que los estudiantes consideran que el par (1,1) es solución de ambas ecuaciones y no de una de ellas, esta respuesta se relaciona con la concepción que mantienen los alumnos de que una ecuación con dos variables en un sistema es un objeto diferente de una ecuación con dos variables.



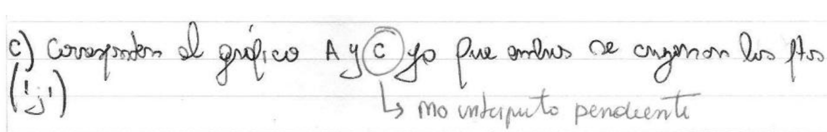
Uso incorrecto del lenguaje simbólico

La siguiente imagen muestra como el alumno realiza un **Uso incorrecto del lenguaje simbólico** al necesitar interpretar la ecuación como función para poder verificar la solución dada.

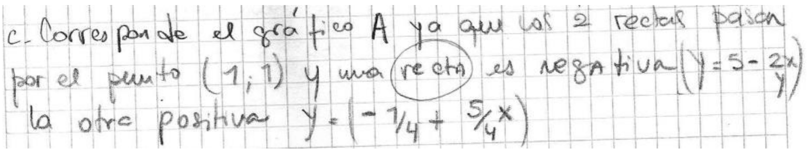
En el ítem c) se encontraron los siguientes errores:

Errores debido a las dificultades para obtener información espacial y errores debido a aprendizajes deficientes en lo que respecta al trabajo con rectas: la falta de trabajo en el registro gráfico hace que el alumno interprete mal las ecuaciones dadas en el contexto dado o bien necesite graficar las ecuaciones para hallar la opción correcta.

En la siguiente figura se muestra que el alumno sólo prioriza que las rectas pasen por (1,1) y no tiene en cuenta que las ecuaciones de las rectas dadas se correspondan con los gráficos.



Secuencias injustificadas de procesos
En muchos casos el alumno necesita graficar las rectas para seleccionar la opción correcta:
Uso incorrecto del lenguaje simbólico: En la siguiente figura se observa como el alumno confunde el concepto de recta con el de pendiente.


c- Corresponde el gráfico A ya que las 2 rectas pasan por el punto $(1;1)$ y una recta es negativa $\left(y = 5 - \frac{2x}{y}\right)$ la otra positiva $y = \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}x\right)$

<u>Errores detectados en el ejercicio 2 a</u>
En la mayoría de los casos los alumnos, si bien logran escribir la expresión pedida, en raras ocasiones pueden determinar a priori quien es el x y quien es el y empleado. Dan por sentado que x hace referencia a la primera de las expresiones citadas e y a la segunda.

Este tipo de error ha sido clasificado como: **Uso incorrecto del lenguaje simbólico.** Es indispensable que se trabaje este pasaje entre ambos contextos, para facilitar lecturas en escenarios distintos a los que se presenta el concepto por primera vez.

En uno de los exámenes analizados vemos otra variante de este tipo de error; el alumno escribe: “F(x)= 200x+50y= 2500”

En esta resolución vemos otra especie de manifestación de este error o bien el denominado como: **Inferencias no validas lógicamente**. En este caso existe una incoherencia entre la variable que el mismo alumno define como independiente “escribe F(X)” y las verdaderas variables de las cuales depende la expresión que define en su escritura. Este error, no le genera problemas en la resolución, ya que llega a las mismas conclusiones que aquellos que no lo cometieron.

Otro aspecto importante a considerar que vale la pena mencionarlo, es otra manifestación del error: **Uso incorrecto del lenguaje simbólico**; en este caso el alumno no discrimina la variable cantidad de tela para cortinas y cantidad de tela para mantelería, llamando a la cantidad de tela con la variable m y generando 250m=2500, entonces m=10.

Este planteo conduce a la no respuesta de la pregunta planteada, ya que el alumno no puede encontrar cuanto necesita de cortinas y cuanto de mantelería.

Este error conduce a una falla en el razonamiento. Podemos analizar el caso de un alumno que no es capaz de escribir en símbolos la expresión pedida, ni siquiera puede reconocer las cantidades a comprar como variables, ya que hace el siguiente razonamiento: 1mt sale 200$, con lo cual 10mt 2000$, en forma análoga para la mantelería, le daría un total de 2500$, Con ello encuentra una solución particular

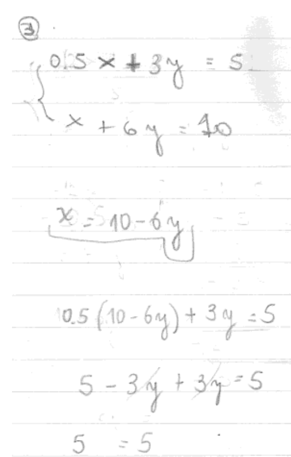
<u>Errores detectados en el ejercicio 2b) 2c)</u>

Los errores detectados en estos ítems están en su mayoría, relacionados con la necesidad del estudiante a encontrar una solución única y numérica a las cuestiones algebraicas (**E7).**

Si bien, son capaces de encontrar alguna solución al tanteo, no puede llegar a la solución correcta. Esta idea de tantear fue definida como un error relacionado con la **Secuencia injustificada de procesos (E10);** no nos resulta desmerecedor el poner en práctica el sentido común como primera estrategia, pero la necesidad de formalizar debe estar presente en esta instancia.

En muchos casos vemos que los alumnos se aproximan a la respuesta despejando y=f(x), sin embargo, no logran ver a los puntos de la recta en el primer cuadrante como solución al problema. Este hecho lo calificamos como **error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos (E9).**

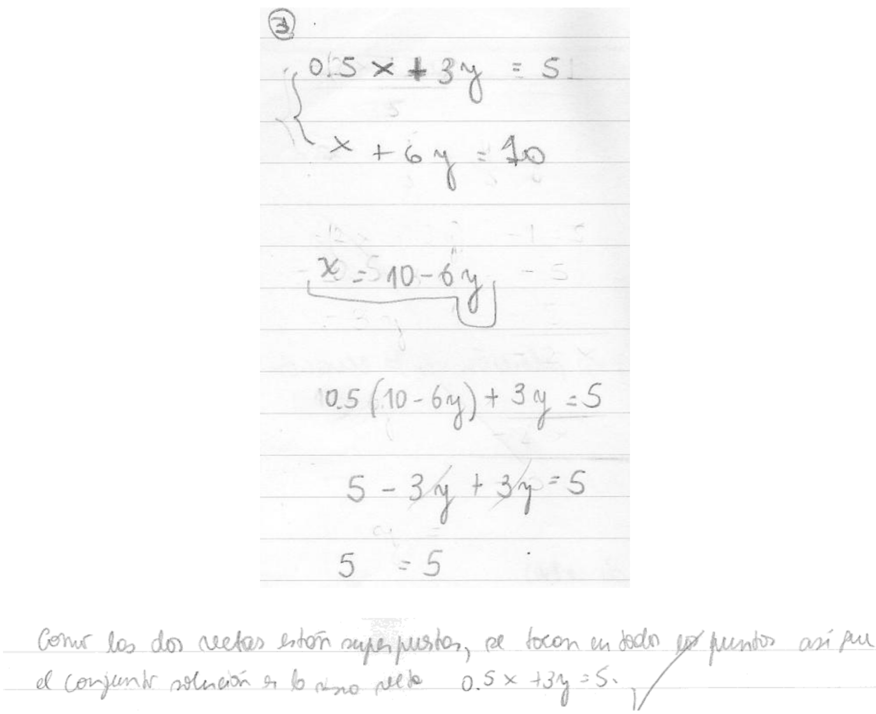
Nos resulto muy llamativo, que siendo presentado este trabajo en la etapa final de función lineal, los alumnos no hayan podido reconocer los pares ordenados como soluciones.



Hemos visto también, que los alumnos pueden reconocer que hay infinitas soluciones pero no las pueden escribir. Esto podría estar relacionado con dos tipo de errores: aquellos que en los cuales el alumno **usa incorrectamente el lenguaje simbólico (E2)** y aquellos que se derivan de la **necesidad que tiene el alumno a encontrar una única solución numérica al problema planteado (E7).**

Estas situaciones aparecen en reiteradas ocasiones, los alumnos suelen desorientarse cuando una ecuación o un sistema de ecuaciones tienen infinitas soluciones; en estos casos el alumno suele concluir que no hay solución.

En el caso particular de ejercicio analizado, los alumnos al situarse en un problema, concluyen que debería haber más de una solución, pero no pueden mencionarlas en su totalidad. Podemos observar el caso de un alumno que logra concluir que las soluciones son los puntos de una recta, y exhibe su ecuación, sólo que no puede indicar las restricciones para ambas variables.


3

$$\begin{cases} 0.5x + 3y = 5 \\ x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$x = 10 - 6y$$

$$0.5(10 - 6y) + 3y = 5$$

$$5 - \cancel{3y} + \cancel{3y} = 5$$

$$5 = 5$$

Como las dos rectas están superpuestas, se tocan en todos sus puntos así que el conjunto solución es la misma recta $0.5x + 3y = 5$.

Errores detectados en el ejercicio 2d)

Los errores detectados en este ítem, evidencian problemas en la lectura de una misma situación en diversos contextos abordados. De acuerdo a investigaciones consultadas (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999) los alumnos no son capaces de verificar soluciones obtenidas y en raras ocasiones pueden generar un recorrido en ambos sentidos por los registros verbales, gráficos y analíticos. Este tipo de error ha sido clasificado como **E6: Errores debidos a las dificultades para obtener información espacial.**

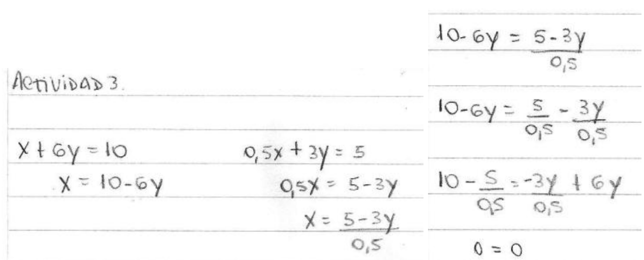
Errores detectados en el ejercicio 3

Este ejercicio, entre otras cosas, pretende identificar las dificultades existentes en lo alumnos en el trabajo con ecuaciones con infinitas soluciones. Los alumnos poseen la creencia de que todo sistema posee solución única y en la búsqueda de esa solución comenten errores algebraicos, de interpretación y muchas veces esto termina generando contradicciones en su propio razonamiento las cuales no son percibidas por los alumnos.

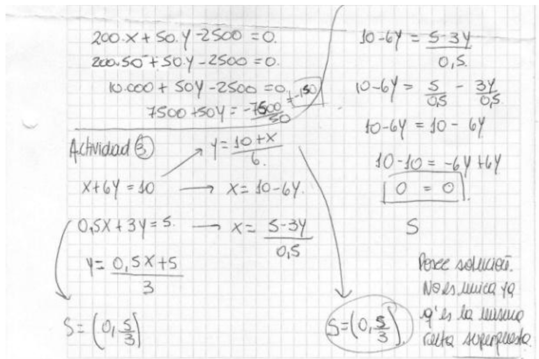
Por otro lado, si bien el ejercicio puede ser resuelto íntegramente en el registro gráfico, los alumnos en su mayoría recurren al registro algebraico para resolverlo puesto que se sienten más confiados en el trabajo en este registro.

Veamos ahora ejemplos de los errores cometidos por los alumnos:

La imagen muestra como el alumno aún cuando percibe que las rectas se superponen, necesita realizar el pasaje al registro algebraico para elaborar la respuesta. Por otro lado menciona como conjunto solución la recta y no los puntos de la misma. Esto último muestra **una mecanización** en la resolución del ejercicio así como también un **aprendizaje deficiente del concepto de función lineal y de ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

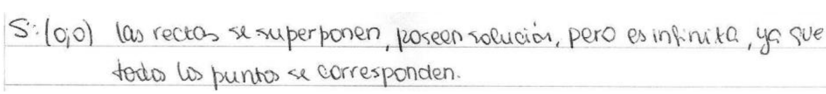


En la siguiente imagen también se muestra la necesidad de plantear las ecuaciones en el registro algebraico para llegar a la solución buscada, el reconocimiento de que la solución no es única, puesto que las rectas se superponen, pero, al mismo tiempo, se evidencia cómo la necesidad de proponer un conjunto solución lo lleva a proponer un único punto.



Esto puede llevarnos a pensar en dos alternativas, por un lado la creencia, ya mencionada de que los sistemas poseen solución única y por lo tanto debo dar un par como conjunto solución, o por el otro lado, la imposibilidad de reconocer a **todos** los puntos de la recta como solución del sistema planteado.

Algo similar sucede con el siguiente alumno con el agregado de que la necesidad de expresar el conjunto solución lo lleva a una mala interpretación de la expresión 0=0 considerando dichos valores como valores de x e y.



Esto muestra que no existe un trabajo integrado entre los registros sino que por el contrario en ambos casos se llega a resultados contrapuestos y esta contradicción no es percibida por los alumnos.

CONCLUSIONES

Nuestro trabajo con este grupo de alumnos de la materia matemática I nos invito a pensar el elemento matemático seleccionado: Sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, desde sus distintos contextos de representación; algebraico (ejercicio 1a, 1b), verbal (ejercicio 2) y grafico (1c, 3). Este recorrido por los registros señalados tuvo como propósito la actividad intelectual del alumno en su capacidad para validar y controlar sus procedimientos.

La propuesta de libre circulación del alumno sobre los contextos mencionados puso de manifiesto un conjunto de errores que imposibilito la conclusión, en muchos casos, de la tarea propuesta. Las principales dificultades que hemos visto en el desarrollo de la actividad están vinculadas con:

a) La construcción inadecuada de nociones algebraicas, construidas en etapas anteriores a la universitaria. Si bien, algunos de las actividades propuestas pretendían relativizar la estrategia algebraica como única, en otras era esta la única manera de llegar a la solución.
b) La incapacidad para controlar los propios procedimientos utilizando el recorrido por los distintos contextos en que aparecía el tema en cuestión. Hemos detectado, en casi todas las actividades, una falta de verificación de resultados obtenidos. Este hecho no sabemos está relacionado con las elecciones didácticas que realizamos los docentes, fraccionadas y con escasas posibilidades de circulación, o bien con la débil formación impartida en la escuela media.
c) La confusión entre ecuación lineal con dos incógnitas, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y función lineal. Los alumnos perciben dichos contenidos como elementos matemáticos iguales (Panizza *et al*, 1999) Ese hecho los conduce a la formación equivocada de los conceptos anteriores generando errores conceptuales graves.

Esta investigación ha dejado la puerta abierta para sucesivas investigaciones tendientes a desarrollar propuestas didácticas que consideren al objeto matemático en distintos contextos de representación, axial como el recorrido en sus distintos sentidos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para ensenar.* Colección: investigación y enseñanza, n 15. Sevilla, Editora Diada

Davis, R. B (1984). *Learning Mathematics:The cognitive science approach to mathematics education,* Norwood, NJ: Ablex.

Mosvshovitz- Hadar, N; Zaslazvsky, O y Inbar, S, (1987). An principal classification model for errors in high school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education,* 18, 1

Panizza, M, Sadovsky,P y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 17. (453-461)

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J; Rico, L. y Gómez, P. *Educacion Matemática*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Socas, M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (coord..) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). Barcelona: Horsori