ÁREAS DE FIGURAS IRREGULARES Y CURVILÍNEAS A TRAVÉS DE CONJUNTOS ELEMENTALES: UNA INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL

Julio Cesar Barreto García
U. E "José Antonio Sosa Guillen". Palito Blanco. Estado Yaracuy, Venezuela.
juliocbarretog@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo se estudia el área de diferentes figuras geométricas poligonales, las cuales no son necesariamente regulares, a partir del uso del axioma para conjuntos elementales, teniendo en cuenta que podemos hacer divisiones a las figuras geométricas de estos polígonos irregulares en figuras geométricas tales como son el cuadrado, el rectángulo o el propio triángulo. Es de acotar que también se realiza un estudio de figuras geométricas curvilíneas, como es el caso de la circunferencia, tomando en cuenta que aquí el nombre de perímetro cambia por el de longitud, teniendo en cuenta que desde tiempos inmemoriales se dice que una circunferencia es un polígono de infinitos lados infinitamente pequeños, lo cual trasciende el pensamiento de continuidad e infinito que existe inclusive desde la época primitiva de los griegos. Así mismo, al círculo se le calcula su área por diversos métodos.

PALABRAS CLAVE: Polígonos irregulares. Conjunto elemental. Área. Cálculo integral.

INTRODUCCIÓN

Los polígonos irregulares constituyen las figuras geométricas que más se acercan al mundo real, y en este sentido debemos olvidarnos del pensamiento griego que creían que todo lo que rodeaba el mundo era un figura regular y por tanto perfecta, lo cual les condujo a la idea de cuadratura. Por tal motivo comparaban cualquier polígono con un cuadrado del cual ya se le conocía su área debido a que de acuerdo con su forma era fácilmente conocerla.

Así mismo, los griegos antiguos creían que el círculo era una figura curvilínea muy especial y pensar en otro tipo de figuras curvilíneas, que rigieran inclusive el movimiento de astros celestes, era considerado un sacrilegio que conllevaba hasta a la pena de muerte. En tal sentido se estudió el círculo en profundidad, encontrándose con la imposibilidad de cuadrarlo usando sólo regla y compás, los cuales eran sus instrumentos utilizados.

En este sentido es muy importante que nuestros estudiantes calculen las áreas de distintas figuras, bien sean estas regulares o no, tomando en cuenta que aparecen en el entorno y se usan en diversas disciplinas. Teniendo en cuenta una metodología didáctica a través de la cual pueden usar las fórmulas deducidas en (Barreto, 2008) para hallar a partir de las fórmulas del área de figuras elementales (cuadrado, rectángulo o el triángulo), el área de figuras irregulares usando el axioma de conjuntos elementales, sin necesidad de memorizar nada, ya que solo se requiere dividir dicha figura en otras más elementales. Debemos tener en cuenta que este artículo pretende además que nuestros estudiantes desarrollen su proceso cognitivo de *visualización* y lo coordinen con el *razonamiento*, lo que implica usar las configuraciones realizadas al hacer un *cambio configural* (colocando aunque sea una línea) o una *reconfiguración* (cuando tratamos nuestras figuras como piezas de un rompecabezas), según lo desarrollado en los artículos de (Duval, 1998) y (Torregrosa y Quesada, 2007).

ÁREAS DE POLÍGONOS IRREGULARES

Definición 1 (Polígono Irregular): Es un polígono cuyos lados y ángulos interiores no son iguales entre sí. Los polígonos irregulares no tienen todos sus lados iguales y sus vértices no están inscritos en una circunferencia. Debemos tener en cuenta que los polígonos irregulares, al igual que los polígonos regulares, se clasifican con el mismo nombre de acuerdo a la cantidad de lados que tengan: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc...

Definición 2 (Perímetro de un Polígono Irregular): Es igual a la suma de la longitud de cada lado del polígono irregular. Por lo que se hallan las longitudes y luego se suman.

Para calcular el área de polígonos irregulares los descomponemos en otros polígonos cuyas áreas la calculamos por separado y luego las sumamos de acuerdo con el **Axioma 1** para hallar el área total, según (Barreto 2008, 2014). Demos primero la siguiente definición:

Definición 3 (Conjunto Elemental): Un conjunto se llama elemental si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos. Cualquier polígono, regular o irregular, es un buen ejemplo de un conjunto elemental, como lo veremos en la siguiente **Figura 1**:

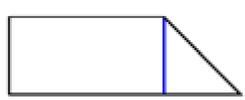


Figura 1: Representación geométrica de un conjunto elemental, polígono irregular, que al ser dividido por la línea azul, nos da un rectángulo y un triángulo.

Axioma[1] **1:** El área de un conjunto elemental es aditiva.

Observación: Lo anteriormente planteado en el **Axioma 1** quiere decir que: Si A y B son conjuntos elementales tal que A intersecado con B es vacio, es un punto o un segmento, entonces el área de A unión B es igual a la suma del área de A más el área de B.

Ejemplo 1: Calcular el área del polígono irregular (Hexágono irregular) en la **Figura 2**:

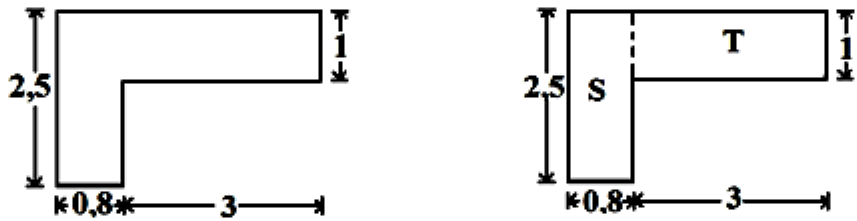


Figura 2: A la izquierda se muestra en el polígono las medidas que están dadas en centímetros. Mientras que a la derecha la configuración muestra los rectángulos, aplicando a la figura original una *aprehensión operativa de cambio figural*[2].

Solución: Descomponemos el polígono en dos rectángulos S y T, que como sabemos son figuras denominadas conjunto elemental, según lo mostrado en la **Figura 2** a la derecha. Así de acuerdo con el **Axioma 1**, el cual es precisamente un axioma de aditividad para hallar el área de figuras elementales, tenemos que el área total de este polígono irregular es:

$$A = A(S) + A(T)$$

Donde la fórmula para calcular el área del rectángulo según (Barreto, 2008) se realiza haciendo el producto de sus lados, por lo tanto tenemos que se cumple que sus áreas son:

$$A(S) = 2{,}5\ cm\ x\ 0{,}8\ cm = 2\ cm^2$$
$$A(T) = 3\ cm\ x\ 1\ cm = 3\ cm^2$$

Por tanto: $A = A(S) + A(T) = 2cm^2 + 3cm^2 = 5cm^2$

[1] Los axiomas son las proposiciones que se consideran “evidentes” y no requieren una demostración previa.

[2] Que se refiere a añadir (o quitar) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones, como por ejemplo al colocar una línea de división a una figura elemental para dividirla en rectángulos y triángulos, para luego utilizar el **Axioma 1**, según lo desarrollado por (Duval, 1998).

Ejemplo 2: Calcular el área del polígono irregular (Pentágono irregular) de la **Figura 3:**

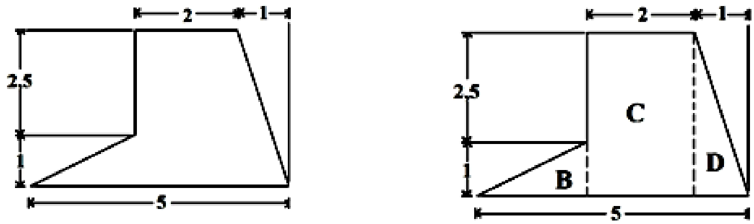


Figura 3: A la izquierda en el polígono las medidas están dadas en centímetros. A la derecha la configuración muestra la división en rectángulos y triángulos, aplicando de nuevo en la figura original una *aprehensión operativa de cambio figural*.

Solución: Descomponemos el polígono en tres figuras elementales B, C y D según la parte derecha de la **Figura 3**. Así de acuerdo con el axioma para hallar el área de figuras elementales tenemos el área total la calculamos usando el nuevo **Axioma 1:**

$$A = A(B) + A(C) + A(D)$$

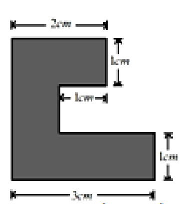
Donde según las fórmulas para calcular las áreas del rectángulo y del triángulo ampliamente deducido en (Barreto, 2008), tenemos que se cumple que:

$$A(B) = \frac{2\ cm\ x\ 1\ cm}{2} = 1\ cm^2$$
$$A(C) = 2\ cm\ x\ 3{,}5\ cm = 7\ cm^2$$
$$A(D) = \frac{1\ cm\ x\ 3{,}5\ cm}{2} = 1{,}75\ cm^2$$

Por lo tanto: $A = A(B) + A(C) + A(D) = 1\ cm^2 + 7\ cm^2 + \ 1{,}75\ cm^2 = 9{,}75\ cm^2$

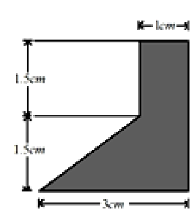
ACTIVIDAD 1: Calcule el área de los siguientes polígonos irregulares:

1.



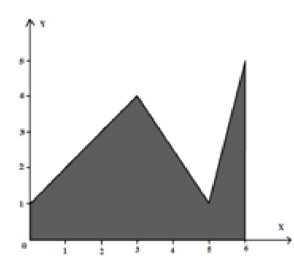
Octágono irregular

2.



Pentágono irregular

3.



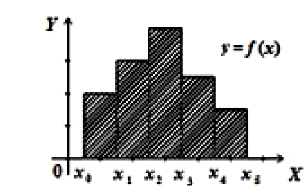
El ejercicio 3 es un polígono muy usual en los diagramas de frecuencias usados en probabilidad.

Definición 4 (Área de un Polígono Irregular): La Triangulación de un polígono o área poligonal es una partición de dicha área en un conjunto de triángulos, la cual se utiliza para calcular el área de cualquier polígono irregular. Entonces, debemos utilizar los métodos de triangulación para descomponer el polígono irregular en unos triángulos o cuadriláteros conocidos pequeños, sin perder la forma del polígono irregular original. Por lo tanto, el área se obtiene triangulando el polígono y sumando el área de dichos triángulos o cuadriláteros, lo cual es usado como en (Barreto, 2009). Se calcula a través de: $ATP = \sum_{i=1}^{n} T_n$, en donde:

- ATP = Área Total del Polígono Irregular.
- T_n = El área del triángulo n disyunto del polígono original.
- n = La cantidad máxima de triángulos que pueden resultar de ese polígono irregular.

UN USO DE CONJUNTOS ELEMENTALES EN FUNCIONES ESCALONADAS

Las funciones más fáciles de integrar son las funciones escalonadas que ahora definimos como: Una función $f: [a, b] \to R$ es una función escalonada si existen unos números $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ tales que la función $f(x)$ es constante en cada uno de los intervalos abiertos $(x_{i-1}; x_i)$. Además, diremos que los puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ definen una partición para la función escalonada $f(x)$. Observe que la definición también nos dice que en los intervalos abiertos $(x_{i-1}; x_i)$ de la partición, f tiene un valor constante, c_i pero no dice nada sobre los valores en los puntos extremos. Por tanto, el valor de f en los puntos x_{i-1} y x_i puede o no puede ser igual al c_i. Sin embargo, cuando definimos la integral esto no importará porque los puntos finales forman un conjunto finito.



Gráfica de la función escalonada.

En tal sentido tenemos que el área será igual a la suma dada por: $\sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$, la cual es por definición, la integral definida de una función escalonada f en $[a, b]$.

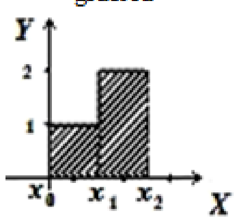
Definimos ahora la integral de una función escalonada así:

$$A=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)\ (\mathrm{I})$$

Puesto que el área bajo el gráfico de una función positiva escalonada es una unión finita de rectángulos, es bastante obvia que debe existir la integral. El i^{mo} de estos rectángulos tiene anchura (x_i-x_{i-1}) y altura c_i, así que debemos resumir el valor de las áreas por $c_i\cdot(x_i-x_{i-1})$.

Además tenemos que si algún c_i es negativo, entonces el correspondiente $c_i\cdot(x_i-x_{i-1})$ es negativo en este caso, pero esta propiedad lo que dirá es que en el caso de ser positiva lo que calcularemos es simplemente el área bajo el gráfico de f y del correspondiente rectángulo para $x_{i-1}<x<x_i$. Por ejemplo, tenemos que para la función escalonada dada por $f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } 0<x<1\\ 2, & \text{si } 1<x<2\end{cases}$ ocurre que:

Representación gráfica



$x_0=0, x_1=1$ y $x_2=2$

Usando Axioma 1

Las áreas en los rectángulos son:

$A_{R1}=(1u)^2=1u^2$,

$A_{R2}=1u\cdot 2u=2u^2$,

así usando el **Axioma 1** tenemos que:

$A_T=A_{R1}+A_{R2}$

$A_T=1u^2+2u^2=3u$

Usando Cálculo Integral

Usando la fórmula (I) además con $c_0=1, c_1=2$ tenemos que:

$$A=\sum_0^1 c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$$

$$A=c_0(x_1-x_0)+c_1(x_2-x_1)$$

$$A=1(1-0)+2(2-1)=1(1)\cdot$$

$$A=1+2=3\Rightarrow A=3u^2$$

FE DE ERRATAS: En el artículo publicado en la revista Números en al año 2008 llamado: **Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de proceso cognitivos,** me escribió hace tiempo Elvira Meneses y se permito hacerle la siguiente observación la cual le agradezco mucho: En un pentágono regular los triángulos que formamos con los dos radios consecutivos no son equiláteros sólo son isósceles, como veremos en la **Figura 4:**

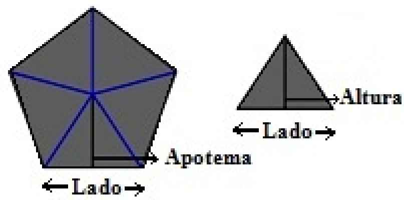


Figura 4: A la izquierda mostramos el polígono regular llamado pentágono regular dividido en 5 triángulos isósceles[3] con sus respectivas longitudes que cambian de nombres al extraer el triángulo del pentágono (lado=base y apotema= altura). Además, efectivamente el ángulo central de este pentágono regular es de 72º

En general, la fórmula para calcular el área de un *polígono regular* esta área viene dada por: $A_p = \frac{perímetro \ \ x \ apotema}{2}$ (1) En donde A_{p} denota el área del polígono regular.

Este procedimiento lo podemos realizar inductivamente desde un pentágono regular, un hexágono regular (donde a este si lo podemos dividirlos en 6 triángulos equiláteros o en dos trapecios isósceles), un heptágono regular y así sucesivamente y así podemos deducir la fórmula para calcular el área de un polígono regular cualquiera mediante la fórmula (1) que está dada arriba.

NOTA: El único polígono regular en el que se forman triángulos equiláteros con los radios consecutivos es en el hexágono regular, cuando le aplicamos una *aprehensión operativa de reconfiguración*[4]. El ángulo central de un hexágono regular es de 60º y como los ángulos de su base son congruentes, pues miden 60º cada uno, por lo tanto ahí si se forma un triángulo equilátero.

APROXIMACIÓN DE LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS

Definición 5 (La Circunferencia[5]): Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro en una cantidad constante llamada radio. La circunferencia es una línea curva la cual es a la vez plana y cerrada. Veamos la **Figura 5:**

[3] En el artículo dice que son 5 triángulos equiláteros y en realidad estos triángulos son isósceles.
[4] Se refiere a la manipulación de las subconfiguraciones iniciales como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas plana según el (Diccionario de la Real Academia Española, 2001), aunque esto puede ser generalizable a figuras sólidas según (Barreto, 2014).
[5] La circunferencia de centro en el origen de coordenadas y que tiene radio unida (radio=1) se denomina circunferencia unidad o más precisamente, según algunos autores como una circunferencia goniométrica.

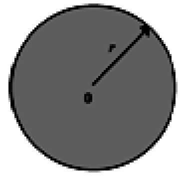


Figura 5: La circunferencia sólo posee longitud. Se distingue del círculo en que éste es el lugar geométrico de los puntos contenidos en una circunferencia determinada; es decir, que la circunferencia es el perímetro del círculo cuya superficie la contiene.

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

Existen varios puntos, rectas y segmentos, singulares en la circunferencia:

- **CENTRO**: Es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.
- **RADIO**: Es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- **DIÁMETRO**: Es el mayor segmento que une dos puntos de la circunferencia (necesariamente pasa por el centro), y está conformado por dos radios.
- **CUERDA**: Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia; además precisamos que las cuerdas de longitud máxima son los diámetros.
- **RECTA SECANTE**: Es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
- **RECTA TANGENTE O SIMPLEMENTE TANGENTE**: Es la recta que toca a la circunferencia en un sólo punto.
- **PUNTO DE TANGENCIA**: Es el punto de contacto de la recta tangente con la circunferencia.
- **ARCO**: Es el segmento curvilíneo de puntos pertenecientes a la circunferencia.
- **SEMICIRCUNFERENCIA**: Es cada uno de los dos arcos delimitados por los extremos de un diámetro.

Veamos varios de los elementos longitudinales de la circunferencia en la **Figura 6:**

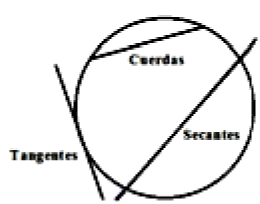


Figura 6: Algunos elementos rectilíneos de la circunferencia.

En las actividades deduciremos que la longitud (perímetro) l de una circunferencia es: $l = 2 \cdot \pi \cdot r$ Donde r es la longitud del radio. De donde se tiene que π (número pi), por definición, es el cociente entre la longitud de la circunferencia (medida con una cinta métrica) y el diámetro (medido con una regla), lo cual nos da la siguiente relación: $\pi = \frac{l}{2r}$. Además, se deducirá el área del círculo delimitado por la circunferencia la cual nos dará por supuesto la fórmula dada por: $A = \pi \cdot r^2$.

ACTIVIDADES PARA LA DEDUCCIÓN DE LA LONGITUD Y EL ÁREA

ACTIVIDAD 1: Sea el círculo $D(0, r)$, al cual le determinar el área a través de un método:

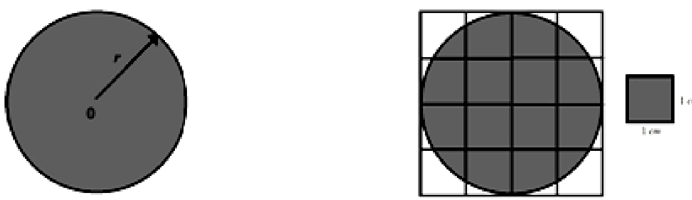
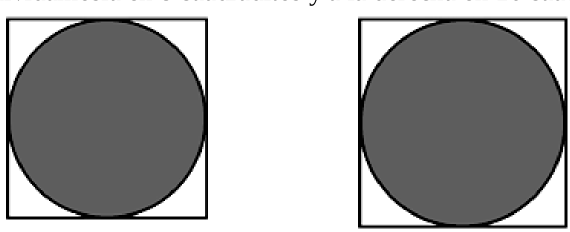


Figura 7: A la izquierda un círculo centrado en 0 y de radio r, denotado $D(0,r)$.
Y a la derecha elijamos cuadrados todos de lado en 1 cm de unidades, es decir, de área 1 cm^2.

Notemos a la derecha que elegimos una unidad de área y dibujamos el círculo dentro de un cuadrado y luego dividimos cada lado en cuatro partes o unidades iguales, en el cual cada cuadradito corresponda con la unidad elegida. Ahora, contando el número de cuadrados que cubren al círculo notamos que el área de este es aproximadamente de 12 cm^2. Divídase el cuadrado en partes cada vez más pequeñas, logrando que aparezcan aun más cuadraditos:

a) A la izquierda divídámosla en 8 cuadraditos y a la derecha en 16 cuadraditos:



Área aproximada: Área aproximada:

NOTA: Es claro que el método anterior no es generalmente muy práctico y es de difícil su aplicación para determinar, por ejemplo, el área de un terreno circular cualquiera.

ACTIVIDAD 2: Deducción del área del círculo conocido el radio *r* según la **Figura 8**:

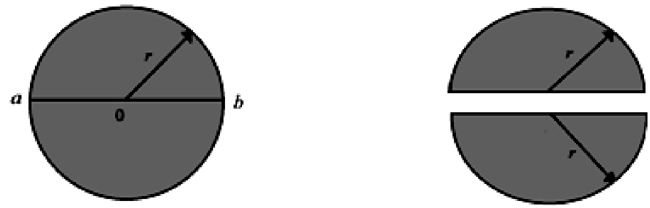
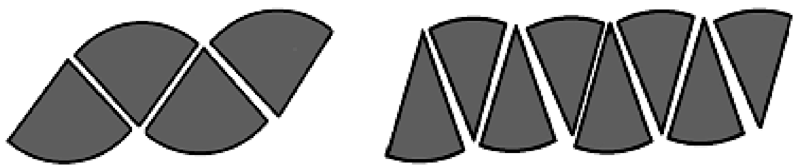


Figura 8: Se divide el círculo en dos mitades (es decir, en dos semicírculos.). En la derecha cortamos el círculo en dos mitades a lo largo del diámetro $\overline{ab}$.

Cortemos cada semicírculo sucesivamente en sectores iguales y encajémoslos según las figuras a la izquierda en dos sectores iguales y a la derecha en cuatro sectores iguales:



Cuatro partes iguales y en ocho partes iguales.

Y así sucesivamente tenemos que si lo aplicamos para ocho sectores iguales y además para dieciséis sectores iguales, y sucesivamente si seguimos dividiendo cada semicírculo en un número mayor de sectores circulares iguales, el conjunto de los dos semicírculos desarrollados formara, con mucha aproximación, un rectángulo de base igual a la longitud de la semicircunferencia y cuya altura es el radio. Como lo veremos en la **Figura 9:**

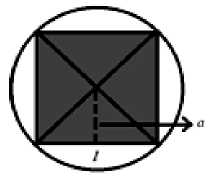
Figura 9: En la figura se muestra que los lados opuestos de la longitud de este rectángulo es precisamente la longitud de la circunferencia, es decir, $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.

En la semicircunferencia la longitud es la mitad que la anterior, esto es, $L_{SC} = \pi . r.$ Ahora bien, como el área de un rectángulo es el producto de sus lados según (Barreto, 2008), así:

$$A = r.\pi.r = \pi.r^2$$

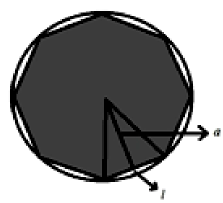
NOTA: Para que el proceso anterior tenga validez es necesario dividir el círculo en un número muy grande de partes, lo cual produce el paso del infinito potencial al actual.

ACTIVIDAD 3 [Método de Exhaución]: Inscripción y circunscripción de polígonos en la circunferencia: Primero inscribimos un polígono regular de cuatro lados (Cuadrado):



En la figura hay cuatro triángulos de base *l* y la altura es el apotema a.

Su área es: $A = \frac{4 \cdot l \cdot a}{2}$. Como el polígono inscrito es un cuadrado, su perímetro es $p = 4 \cdot l$. Luego, el área será: $A = \frac{p \cdot a}{2}$. Doblemos ahora el número de lados del polígono regular:



En la figura se muestra que precisamente en el Octógono regular hay ocho triángulos que tienen como base a *l* y la altura en este caso es el apotema a.

Su área es: $A = \frac{8 \cdot l \cdot a}{2}$. Como el polígono inscrito es un octógono regular, su perímetro es $p = 8 \cdot l$. Luego, el área será: $A = \frac{p \cdot a}{2}$ Ahora, doblemos cada vez más el número de lados de los polígonos inscritos en la circunferencia: Un polígono de 16 lados y un polígono de 32 lados y observemos que si el proceso continúa indefinidamente tendremos que:

- El área del polígono *se aproxima* al área del círculo.
- El perímetro del polígono *se aproxima* a la longitud de la circunferencia.
- La apotema *se aproxima* al radio de la circunferencia.

Como en este caso la longitud de la circunferencia es igual a $2 \cdot \pi \cdot r$, se cumple que:

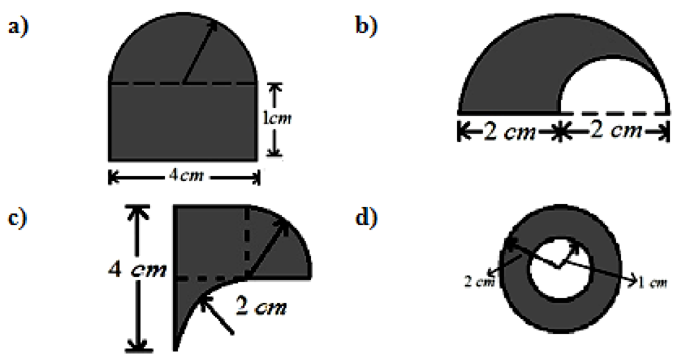
$$A = \frac{p.a}{2} = \frac{2.\pi.r.r}{2} = \pi.r^2$$

EJERCICIO: Use polígonos circunscritos en la circunferencia.

ACTIVIDAD 4 [Ejercicios Variados]: Usa $\pi \approx 3.1416$.

1. Calcula el área de un círculo de radio 10 *cm*.
2. Calcula el área de un círculo de diámetro 15 *cm*.
3. Calcula el radio de un círculo de área 314 *cm*.

ACTIVIDAD 5 [Áreas Generales]: Determina en cada caso, el área de la región.

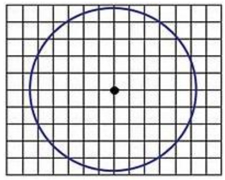


OTRAS FIGURAS CURVILÍNEAS

Definición 6 (La Elipse): Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante. Es una línea curva, cerrada y plana. Una elipse es la curva simétrica cerrada que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo al eje de simetría, con ángulo mayor que el de la generatriz respecto del eje de revolución. Una elipse que gira alrededor de su eje menor genera un esferoide achatado, mientras que una elipse que gira alrededor de su eje principal genera un esferoide alargado.

ANAMORFOSIS DE UNA CIRCUNFERENCIA EN UNA ELIPSE

Debemos tener en cuenta que determinada trasformación de la circunferencia (al deformar ortogonalmente el plano cartesiano asociado a ella), se denomina anamorfosis. Se corresponde con una perspectiva especial. El término anamorfosis proviene del idioma griego y significa trasformar.



Acá vemos una circunferencia en un plano cartesiano no deformado.

Esta circunferencia se transforma en una elipse mediante una anamorfosis, donde el eje *Y* se ha contraído y/o el *X* se ha dilatado.

Observación: En el caso de la circunferencia, si el plano cartesiano se divide en cuadrados, cuando dicho plano se «deforma» en sentido del eje *X*, el *Y*, o ambos, la circunferencia se transforma en una elipse y los cuadrados en rectángulos. Por eso la elipse es una circunferencia degenerada.

NOTA: Acotemos que la circunferencia puede ser considerada como una elipse de excentricidad nula, o una elipse cuyos semiejes son iguales. También se puede describir como la sección, perpendicular al eje, de una superficie cónica o cilíndrica, o como un polígono de infinitos lados, cuya apotema coincide con su radio, en tal sentido ¿qué descripción se le puede dar a la elipse?

ÁREA INTERIOR DE UNA ELIPSE (O ÁREA DE UN OVALO) Y APROXIMACIÓN AL PERÍMETRO DE LA UNA ELIPSE

ÁREA INTERIOR DE UNA ELIPSE

$$Área = \pi.a.b$$

Siendo *a* y *b* los semiejes

PERÍMETRO DE UNA ELIPSE

Esta requiere del cálculo de integrales elípticas de segunda especie.

NOTA HISTÓRICA: El matemático Ramanujan dio una expresión sencilla que se aproxima razonablemente a la longitud de la elipse, pero en grado menor que la obtenida mediante integrales elípticas. Ramanujan, en su fórmula, utiliza el “semieje mayor” (*a*) y el “semieje menor” (*b*) de la elipse. Expresión aproximada del perímetro de una elipse:

$$P \approx \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

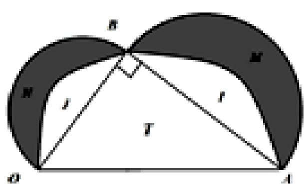
UN USO DE CONJUNTOS ELEMENTALES Y DE FUNCIONES ESCALONADAS PARA DEFINIR UNA INTEGRAL MÁS GENERAL (SEGÚN RIEMANN)

Los conjuntos elementales, junto a su axioma es lo que nos permite llegar a la definición de integral de funciones curvilíneas en general a través de funciones escalonadas que sean dadas por rectángulos inscritos y circunscritos (Mediante sumas inferiores y superiores).

De acá se concluye que: Sea f una función acotada en $[a,b]$ y sean g y h dos funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a,b]$ tales que para cada $x \in [a,b]$ se cumpla que: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)(*)$. Por tanto, si existe uno y sólo un número I, tal que $\int_a^b g(x)dx \leq I \leq \int_a^b h(x)dx$ para cada par de funciones escalonadas g y h, que cumplen (*) entonces diremos que I se denomina la integral definida de la función f en el intervalo $[a,b]$ y se denota al igual que en la funciones escalonadas con el símbolo $\int_a^b f(x)dx$.

Por tanto, cuando I existe se dice que f es integrable según Riemann en el intervalo $[a,b]$

EJERCICIO: Use esta definición para hallar el área del círculo y de la elipse.
Otro ejercicio muy particular lo vemos en las Lúnulas de Hipócrates mostradas en la **Figura 10**:



Demostrar que:

$$\acute{A}rea\ T = \acute{A}rea\ M + \acute{A}rea\ N.$$

Figura 10: En la figura se muestra que el área de la figura rectilínea como lo es el triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de las figuras curvilíneas.

CONCLUSIONES

En esta experiencia realizada con los estudiantes se evidenció que el trabajo en equipo es muy importante sobre todo cuando se construye el aprendizaje a partir de actividades realizadas en el ambiente de clase, los cuales le permite a los integrantes del grupo configurar y reconfigurar los procedimientos a través de *procesos cognitivos* llegando luego a *razonamientos* que les permiten crear un aprendizaje significativo.

Esto lo hacen, teniendo en cuenta la coordinación de los *procesos cognitivos en geometría* que según (Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996) describen a la *visualización* como "El acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos" (p. 441).

Pero debido a que este concepto es muy abstracto e implica el uso de todos los sentidos y no únicamente el de la vista, nos restringimos por el de *aprehensión*, en el cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar", según (Real Academia Española, 2001).

Con esta experiencia mejoraron la capacidad de representación visual los estudiantes, además de familiarizarse con el entorno social y de cultivo, aplicando los conjuntos elementales a los problemas geométricos, lo cuales les permiten obtener un aprendizaje con significado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barreto, J. (2008). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Revista Números*, 69.

Barreto, J. (2009). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. *Revista Unión, 17*.

Barreto, J. (2014). *Área y Volúmenes: Deducciones con diversas actividades y aplicaciones*. Colección de Secundaria. Amazon: Seattle, Estado de Washington.

Duval. R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers*, 37-51.

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 07 de diciembre de 2014 de http://www.rae.es/rae.html.

Torregrosa, G y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10 (2),* 273-300.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a student's understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematic Education 27 (4),* 435–457.