PROPUESTA DIDÁCTICA
VECTORES CON APLICACIONES A LA FÍSICA E INCLUSIÓN DE TIC COMO ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA PARA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Andrea Di Giulio, Natalia Leto, Marcela Medrano y M. Cecilia Pavicich
INES N°1. INSPT-UTN. UNQ. UBA. Colegio Carlos Pellegrini, Argentina.
a.digiulio@hotmail.com - natalialeto@gmail.com - mmedrano50@gmail.com - cpavicich@gmail.com

RESUMEN

A partir de una situación problemática, como es el abastecer de víveres a náufragos refugiados en una isla lejana, se diseñó y construyó un simulador en GeoGebra y una secuencia didáctica. En la misma, utilizando como recurso el applet, se plantea una situación inicial de distancia y velocidad, y luego se formula una serie de cuestiones vinculadas con el álgebra vectorial, donde esas variables se van modificando. Se propone una sucesión ordenada de actividades que pueden ser resueltas por medio del simulador para luego proceder a su validación en forma analítica, aplicando el Modelo Apropiativo, el trabajo colaborativo y por descubrimiento, con inclusión de las TIC, se favorece la construcción de aprendizajes significativos.

PALABRAS CLAVE: Algebra. Vectores. Aplicaciones a la física. GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

En el aprendizaje de matemática hay muchas controversias, algunas recurrentes. Por parte de los estudiantes, el cuestionamiento de la utilidad de los contenidos y, por parte de los docentes, la transferencia de los aprendizajes matemáticos a otros contextos donde resultan imprescindibles para la resolución de actividades, como ser física, química y biología, entre otros.

El Algebra es una de las asignaturas que presenta mayor dificultad. El Algebra Vectorial, en general, se dicta mediante la instrucción didáctica con resolución de fórmulas y ecuaciones. Los alumnos llegan a resolver las ecuaciones pero sin la construcción del sentido.

Orientados a trabajar en la transferencia de aprendizajes (Perkins, 1997) a posibles situaciones reales, propiciando su significatividad, se utilizó la riqueza que nos ofrecen las nuevas tecnologías, en especial, las del campo de la matemática educativa, como GeoGebra. Con esta herramienta, se diseñó un simulador como disparador de una secuencia didáctica con el propósito de estimular el aprendizaje por descubrimiento y su ubicuidad (Burbules, 2001). Esta secuencia didáctica fue elaborada en forma colaborativa por docentes, alumnos del Postítulo del Cepa (Escuela de capacitación docente del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires) Especialización Superior en la Enseñanza de la Matemática a cargo de Prof. Celia Fasce como coordinadora y Prof. Carlos Fuentes como docente.

CONTEXTUALIZACIÓN

Esta propuesta didáctica fue pensada para trabajar en conjunto las asignaturas de matemática y física, pudiendo ser utilizada en la modalidad de trabajo por medio de pareja pedagógica.
Nivel educativo: Tercer año de la ES.

Carga horaria aplicada: 6 horas cátedra: en las dos primeras se presenta el applet, y en el resto se resuelven las actividades incluidas en él, pasando del registro gráfico al analítico y viceversa, de manera de articular los saberes previos con los contenidos desarrollados, construyendo así aprendizajes significativos, para finalizar con la institucionalización de saberes.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Coordenadas cartesianas. Función cuadrática y su gráfica. Teorema de Pitágoras. Técnica de resolución de problemas. Unidades de medida de las magnitudes utilizadas, sus equivalencias y conversión. Vectores. Componentes y módulo de vectores. Suma de vectores. Trayectoria. Velocidad. Rapidez. Desplazamiento. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV). Caída libre. Simuladores. GeoGebra.

OBJETIVOS

- Aplicar el concepto matemático de suma de vectores para resolver problemas de física de tiro horizontal, vinculado con posibles situaciones reales, logrando su transferencia.
- Interpretar gráfica y analíticamente la información brindada por el simulador.
- Analizar las variables intervinientes en el modelo matemático para tiro horizontal.

PROPÓSITOS DOCENTES

Ubicarnos como mediadores entre el conocimiento y el estudiante de manera que éste logre aprendizajes significativos apropiándose de los contenidos, buscando impulsar su participación activa.

METODOLOGÍA

Aplicando el Modelo Apropiativo (Charnay, 1994), donde el rol del docente es proponer y organizar una serie de situaciones con distintas problemáticas a resolver, las actividades docentes son proyectar y coordinar la gestión de la clase, previendo la hipótesis de trabajo, intervenciones y problematizaciones. El rol del estudiante es ensayar, buscar, proponer soluciones, confrontar ideas y defender las propias para construir el conocimiento. En este modelo, la resolución de problemas es fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber.

En la secuencia didáctica se proponen situaciones con un orden preestablecido, propiciando el trabajo espiralado de los contenidos matemáticos involucrados. La secuenciación será en una primera fase de acción por parte de los estudiantes, en la segunda fase de formulación y validación, y por último de institucionalización de saberes, por parte del docente, favoreciendo así el proceso de síntesis. Se propondrá resolver las actividades en grupos de tres alumnos promoviendo el aprendizaje colaborativo, valorando las inteligencias múltiples (Gardner, 1995) y orientados por el principio que los estudiantes no solo conozcan, sino que piensen a partir de lo que conocen (Perkins, 1997).

RECURSOS

Pizarra, papel, lápiz, calculadora, notebooks y applet disponible en:

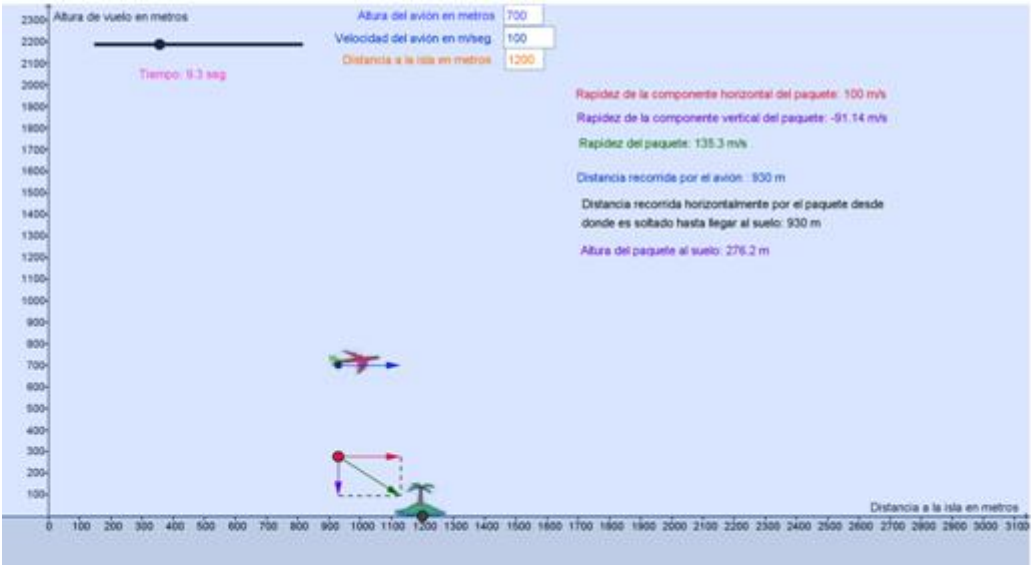
http://tube.geogebra.org/student/mgvlA5LaQ

Importante: El texto en **negrita** corresponde a la actividad propuesta (incluida en el applet).

SECUENCIA DIDÁCTICA

Situación problemática: Consideremos un avión que vuela a determinada velocidad (módulo) y a cierta altura, y quiere lanzar un paquete de víveres a unos náufragos refugiados en una isla lejana. (Ubicaremos el eje de referencia en el suelo, a nivel del mar, y debajo del lugar de lanzamiento).

En el simulador de GeoGebra disponible en http://tube.geogebra.org/student/mgvlA5LaQ podrán cambiar, en las casillas de entrada, altura de vuelo del avión, velocidad de vuelo y distancia entre el lugar desde que se lanza al paquete hasta la isla (medida a nivel del mar). Recuerden que con el deslizador pueden controlar el avance del tiempo desde que es lanzado el paquete.



Reconocimiento del simulador diseñado en GeoGebra.
Sabiendo que el avión vuela en forma horizontal a la tierra, ¿a qué altura y a qué velocidad tendría que hacerlo, para que el paquete cayera dentro del territorio de la isla que está a 2 km del lugar donde el avión deja caer el paquete?
¿Hay una única posibilidad? Explora con el simulador y encuentra, si es posible, distintos pares de altura y velocidades.
¿La cantidad de alternativas tiene que ver con la velocidad? ¿La rapidez es la misma? ¿Por qué cuando cambia la altura cambia la rapidez? ¿Cuáles son sus variables?
¿Qué unidades se usan generalmente?
Cuando el paquete llega al nivel del mar, ¿qué distancia recorrió el avión que lo lanzó? Compárala con la distancia horizontal recorrida por el paquete.

Propondremos a los alumnos que observen en las casillas de entradas las unidades. ¿Es necesario modificar algún dato? Presten especial atención a las unidades que utiliza el simulador.

Al comenzar a trabajar con el applet, seguramente notarán que las unidades no corresponden a las expresadas en la pregunta, debiendo proceder a convertirlas.

Se espera que los alumnos ingresen diferentes combinaciones de variables de alturas y velocidades, para lograr que el paquete caiga a 2000 m del lugar desde donde fue lanzado. En el applet, el texto en color negro indica la distancia recorrida horizontalmente por el paquete desde donde es soltado hasta impactar con el suelo. Una alternativa viable para que el paquete llegue a destino, es seleccionar una altura de 700 m y una velocidad de 167,4 m/s. También pueden seleccionar otras combinaciones de variables y observar que no siempre cae sobre la isla. Por ejemplo, si el avión volara a 900 m de altura, y su velocidad fuera la misma, es decir 167,4 m/s, observarán que el paquete caería fuera de la isla.

Los alumnos podrán observar que si modifican la altura deberán variar también la velocidad para el paquete siga cayendo sobre la isla.

1) Una vez que el paquete es lanzado, ¿Cuál es su velocidad? ¿Cuáles son sus componentes? ¿Con qué dirección se mueve, es decir, cuál es su trayectoria? ¿Por qué?

Con esta pregunta se busca que reflexionen sobre las componentes de la velocidad que actúan sobre el paquete, observando las direcciones y sentidos de las mismas y la de la resultante, y además los tipos de movimientos.

El paquete de víveres experimenta un movimiento de bajada a lo largo del eje “y” y un movimiento de avance a lo largo del eje “x”.

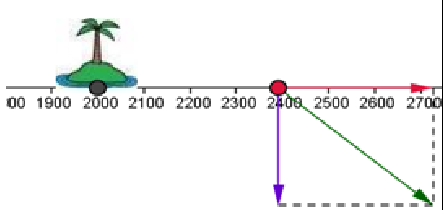
La velocidad del paquete tiene una componente de velocidad horizontal constante, que es la que traía con el avión (MRU) y otra componente de velocidad vertical originado por la caída libre. Entonces, la velocidad final del paquete es la suma vectorial de estas dos velocidades.

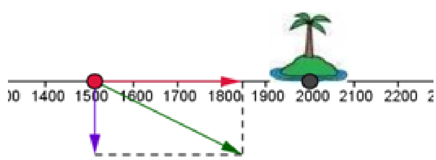
Así, todo cuerpo lanzado horizontalmente desde un punto elevado, describe una trayectoria parabólica cuyo vértice se ubica en su punto de partida y su pendiente es negativa.

2) a) Si volara a 1000 m con la misma velocidad, ¿recibirían los náufragos el paquete en la isla? Si no la recibieran, ¿dónde caería?
b) ¿Y si volara a 400 m de altura?
En ambos casos, ¿cuál será la velocidad del paquete (dirección y rapidez) al llegar al suelo y cuánto tardará en caer?

c) Después de experimentar la situación en el simulador, verifica analíticamente la rapidez del paquete.

Con esta secuencia de preguntas se busca que puedan observar y analizar la rapidez, la velocidad y sus componentes y como varían a medida que transcurre el tiempo, quedando constante la velocidad horizontal. Es interesante que noten que manteniendo la misma velocidad horizontal, cuanto más alto vuela el avión, el paquete impacta con mayor velocidad.

<table>
<tr>
<td>a) Si el avión volara a 1000 m de altura, con la misma velocidad (167.4m/s) el paquete caería a 2391,31m del lugar donde fue lanzado (si hubieran utilizado otra velocidad, la distancia sería distinta). De esta manera, no caería en la isla, sino que, lo haría 391 metros “después”. El módulo de la velocidad (rapidez) del paquete en ese instante, será de 218,22 m/seg, demorando en llegar al suelo 14,29seg.


</td>
<td>b) Si volara a 400m de altura (siempre con la misma velocidad, 167.4m/s) caería a 1512m, es decir, 488 metros “antes” de la isla, y el paquete tendría una rapidez, al momento de tocar el agua, de 189,37nm/s demorando 9,04 segundos en llegar al agua.


</td>
</tr>
</table>

Como se puede apreciar, la velocidad del paquete es mayor en el primer caso. Esto ocurre porque la velocidad horizontal, en ambos casos, es la misma (en uno y otro caso, el paquete es arrojado desde un avión que vuela a distinta altura pero con la misma velocidad), pero la velocidad vertical, medida en el instante en que el paquete impacta con el suelo, es menor al ser lanzado desde los 400 metros que desde los 1000 metros, debido a que demora menos tiempo en llegar. Al sumar ambas componente de la velocidad del paquete vemos que la resultante (velocidad del paquete) también es menor. Considerando ambas situaciones, si el paquete es arrojado desde el avión volando a la misma velocidad, *la velocidad que tenga el paquete al llegar al suelo y la distancia que recorra horizontalmente, dependerá de la altura desde la que se deje caer.*

c) Dado que el movimiento es un MRUV en la dirección vertical, las ecuaciones de movimiento del cuerpo están dadas por las siguientes expresiones:

$$v_f = v_0 + a\,.\,t \quad \text{y} \quad a = -g \quad (1)$$

$$v_f = v_0 - g.t$$

Donde $v_0 = 0$ por lo que nos queda $v_f = -g.t$

$$h_f = h_0 + v_0.t - \frac{1}{2}\,.g\,.t^2$$

Como $v_0 = 0$

Obtenemos $h_f = h_0 - \frac{1}{2}\,.g\,.t^2$

(1) La aceleración está dirigida hacia abajo en el sentido negativo del eje y, por lo tanto a= -g (Sears-Zemansky, 1963).

Para verificar analíticamente la rapidez del paquete debemos aplicar el teorema de Pitágoras ya que al trabajar con un sistema de referencia ortogonal, las componentes del vector velocidad del objeto son perpendiculares.

$$v_p = \sqrt{{v_v}^2 + {v_h}^2}$$

Siendo v_p la velocidad resultante del paquete, v_h la velocidad del avión al arrojar el paquete (velocidad horizontal) y, v_v la velocidad en la dirección vertical, determinada por la aceleración de la gravedad.

Primero necesitamos averiguar la velocidad vertical en el momento del llegar al nivel del mar, y para ello debemos calcular el tiempo.

Partiendo de $h_f = h_0 - \frac{1}{2}\,.g\,.t^2$ y sabiendo que $h_f = 0$ y h_0 = 1000, obtenemos:

$$t = \sqrt{2\,h_o/g}$$

Reemplazando, hallamos los tiempos.
Para los 1000 metros

$$t = \sqrt{\frac{2\,.\,1000m}{9{,}8\,m/s^2}} = 14{,}29\ s$$

$$v_h = 167{,}4\ m/s$$

$v_v = -9{,}8\,m/s^2.\ 14{,}29\ s = -140\ m/s$ (2)

$$v_p = \sqrt{(-140\,m/s)^2 + (167{,}4\,m/s)^2} = 218{,}22\,m/s$$

Para los 400 metros:

$$t = \sqrt{\frac{2\,.\,400m}{9{,}8\,m/s^2}} = 9{,}04\,s$$

$$v_h = 167{,}4\,m/s$$

$$v_v = -9{,}8\ m/s^2 .\, 9{,}04\ s = -88{,}55\,m/s$$

$$v_p = \sqrt{(-88{,}55\,m/s)^2 + (167{,}4\,m/s)^2} = 189{,}37\,m/s$$

(2) Nótese que el resultado es negativo debido a la ubicación del eje de referencia.

3)

a) Si el avión volara a una velocidad de 360 km/h y a una altura de 800 m, ¿a qué distancia de la isla tendría que dejar caer el paquete para que lo haga dentro del territorio de la misma? ¿Hay alguna otra posibilidad? ¿Cuál será la rapidez con que el paquete llegaría al suelo?

b) Si se dejara caer el paquete desde la misma altura que en el punto anterior, pero a una velocidad de 450 km/h, ¿Cuánto tiempo demoraría en caer? ¿A qué distancia de la isla debería soltarlo? ¿Cuál será su rapidez al momento de tocar el suelo?

c) Si su velocidad fuera la mitad de la del punto 3 b y su altura la misma, ¿a qué distancia de la isla debería soltarlo, cuánto tiempo tardaría en caer y cuál sería su velocidad?

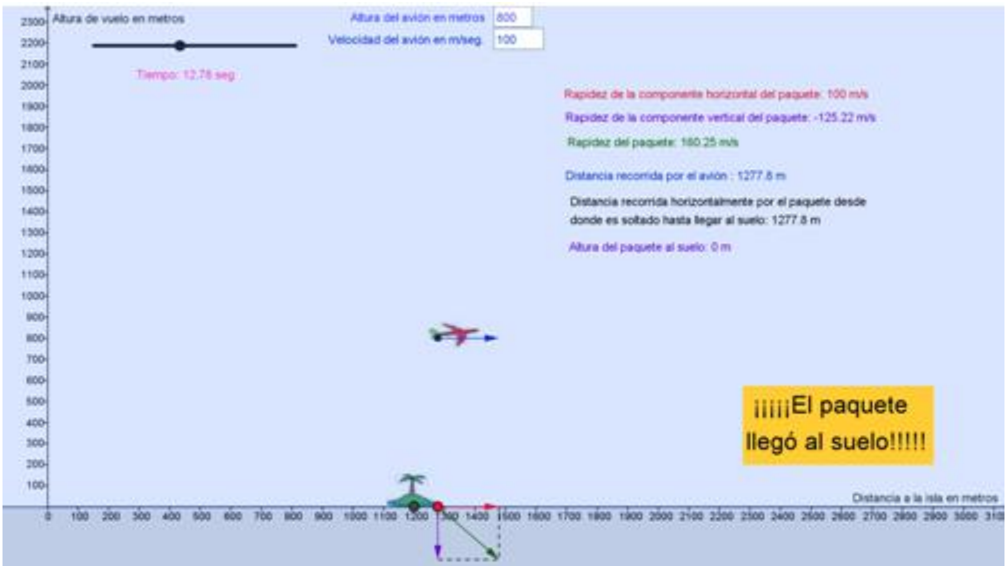
En los tres casos verifica analíticamente los resultados. (Con esta secuencia de preguntas se busca que puedan observar y analizar la rapidez, la velocidad y sus componentes y como varían a medida que transcurre el tiempo, quedando constante la altura. Es interesante que noten que teniendo la misma velocidad vertical, cuanto mayor sea la velocidad del avión, el paquete impactará con mayor velocidad, debido a que la velocidad horizontal es mayor por ser mayor la velocidad del avión, siendo así, mayor la resultante de la suma de ambas velocidades).

a) Por requisito del diseño del simulador será necesario convertir las unidades.

$$360\,\frac{km}{h} = \frac{360000m}{3600s} = 100\,\frac{m}{s}$$

Ingresando en el simulador, en las casillas de entrada, los valores de velocidad y altura, se puede observar que el paquete deberá ser arrojado cuando el avión se encuentre a 1278 m de la isla, para que el mismo llegue a destino, y lo hará con una rapidez de 160,25m/s.

Es la única ubicación para que desde esa altura y a esa velocidad el paquete caiga en el centro de la isla.



Buscando que los alumnos relacionen las distintas variables, se puede realizar la siguiente intervención docente: ¿Es sólo mera coincidencia que el tiempo y la distancia sean números con los mismos dígitos y en idéntico orden (1278 m y 12.78 seg.)?

Validación analítica:
El movimiento horizontal es un MRU, siendo su ecuación

$x_f = x_0 + v\,.\,t$ en nuestro caso $x_0 = 0$ quedando $x_f = v\,.\,t$

Para averiguar dónde caería debemos hallar el tiempo que demorará en hacerlo, usando la fórmula del punto anterior:

$$t = \sqrt{\frac{2\,.\,800m}{9{,}8\,m/s^2}} = 12{,}78\;s$$

Ahora, conociendo el tiempo, podemos calcular la distancia horizontal que recorrerá, pues como dato tenemos la rapidez de vuelo del avión. Si vuela a 100 m/s, y demora 12,78 s, se desplazará 100 m/s . 12.78 s = 1278 m.

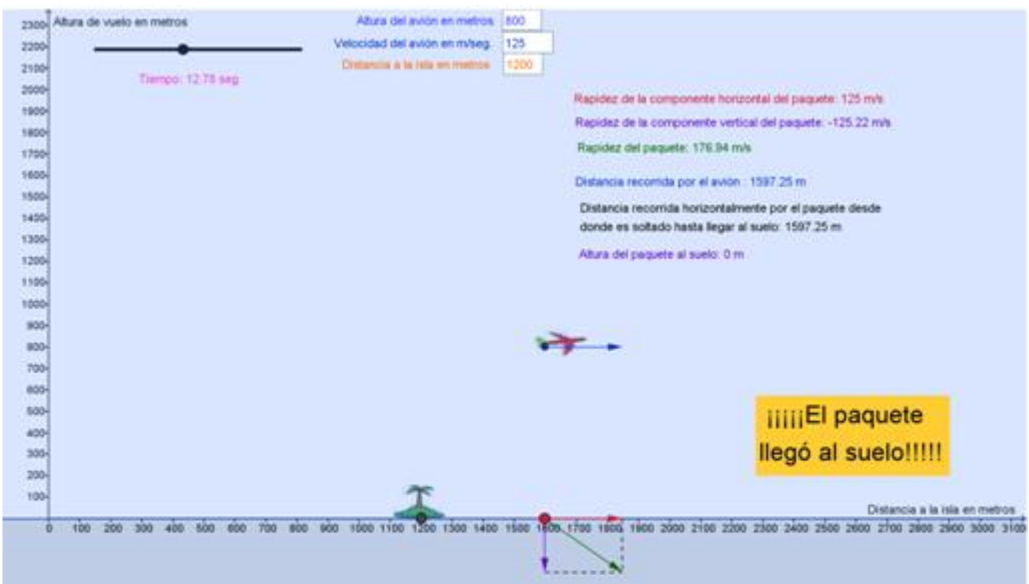
Para calcular la velocidad del paquete (velocidad resultante), estudiamos que debemos proceder a **sumar los vectores** de la velocidad horizontal y la vertical, para lo cual aplicamos Teorema de Pitágoras.

$$v_h = 100\ m/s$$

$$v_v = -\ 9{,}8 m/s^2 . 12{,}78 s = -125{,}24\ m/s$$

$$v_p = \sqrt{(100\ m/s)^2 + (-125{,}24\ m/s)^2} = 160{,}25\ m/s$$

b) La velocidad de 450 km/h expresada en las unidades que utiliza el simulador es de 125m/s. Ingresando los datos en el applet, podemos observar que el paquete tocaría el suelo/agua a 1597 metros del lugar de lanzamiento, demorando 12,78 segundos con una velocidad de 176,94 m/s.



El procedimiento para validar analíticamente todos los datos brindados por el simulador es análogo al 3a.

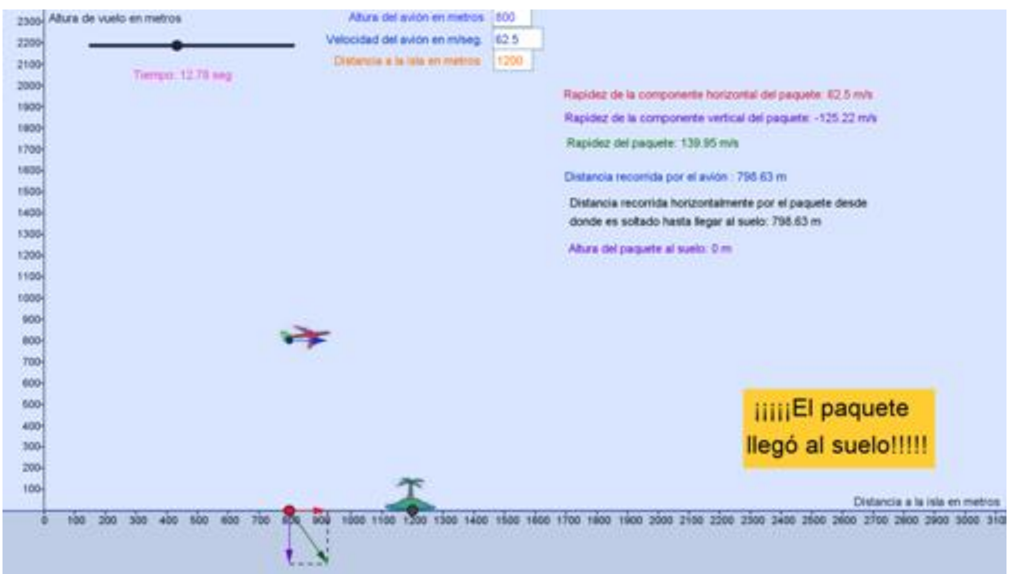
También se podría verificar analíticamente la velocidad resultante (o del paquete) aplicando nuevamente **suma de vectores**, es decir, el procedimiento que utiliza el Teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

$$v_h = 125\ m/s$$

$$v_v = -\,9{,}8\ m/s^2 . 12{,}78\ s = -\,125{,}24\ m/s$$

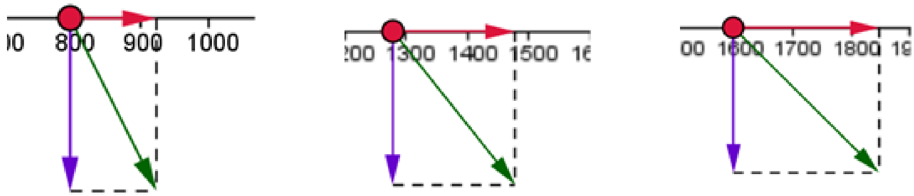
$$v_p = \sqrt{(-125{,}24\ m/s)^2 + (125\ m/s)^2} = 176{,}94\ m/s$$

c) La velocidad de vuelo del avión al momento inicial es 62,5m/s. Podemos verificar analíticamente que caerá a 798,63 metros de donde fue lanzado, con una velocidad de 139,95m/s a los 12,78 segundos, tal cual surge de la información brindada por el simulador.



Nuevamente, el procedimiento para validar analíticamente todos los datos brindados por el simulador es análogo al punto 3 a.

Entonces, podemos concluir:



A 225 km/h A 360 km/h A 450 km/h

Al lanzar el paquete desde una misma altura, la velocidad con la que llegue a destino y la distancia que recorrerá horizontalmente, antes de llegar al suelo/agua dependerá de la velocidad con que vuele el avión al momento de lanzarlo.

4) Observando el tiempo que demora el paquete en llegar al nivel del mar en los distintos casos del punto 3, ¿puedes sacar alguna conclusión relacionando el tiempo que demora en caer el paquete y la altura de vuelo del avión? Justifica. (Esta pregunta está orientada a que se advierta que el tiempo depende de la altura y del valor de la gravedad, y no de la velocidad que lleve el avión).

Como vimos, en los tres casos resulta el mismo tiempo.

Retomando las formulas de la ecuación de movimiento, vistas en 3 a) y $v_0 = 0$
tenemos que $h_f = h_0 - \frac{1}{2} . g . t^2$

Si se desea determinar la velocidad en el momento en que el paquete llega al nivel del mar:

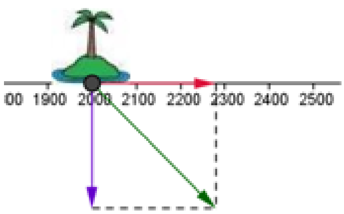
$0 = h_0 - \frac{1}{2} . g . t^2$, donde h_0 es la altura desde donde se deja caer el paquete.

$$t = \sqrt{2 \frac{h_0}{g}}$$

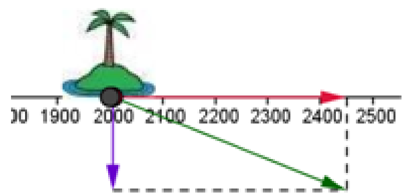
De esta fórmula se puede observar que el ***tiempo*** *es función de la altura y del valor de la gravedad, y que en él no tiene ninguna incidencia la velocidad de vuelo del avión.*

5) Volviendo al punto 2, es decir, altura de vuelo 1000 m y 400 m, distancia a la que se suelta el paquete 2000 m y tiempos 14,29 s y 9,04 s, ¿qué se deberá modificar y cuál sería el valor si desde esas alturas se dejara caer el paquete y este cayera en la isla?¿Cuál será la rapidez del paquete en el instante en que llega al nivel del mar? (Con esta pregunta se busca modificar la velocidad resultante del paquete, a través de sus dos componentes, la velocidad vertical, variando la altura de vuelo, y la horizontal o de vuelo del avión).

Para que el paquete caiga en la isla se debe modificar la velocidad de vuelo del avión según la altura. Para los 1000 m la rapidez de vuelo del avión debe ser de 140 m/s y para los 400 m de 221 m/s.



Desde 1000 metros



Desde 400 metros

Se puede observar que la velocidad vertical del paquete cuando es lanzado desde los1000 m es mayor que la de los 400 m, en todo el recorrido que comparten, porque ésta última lo hace en menos tiempo y como se expresó anteriormente, a igual gravedad, la velocidad instantánea vertical depende del tiempo.

Para 1000m

$$v_v = -\,9{,}8\,m/s^2 . 14{,}29\ s = -\,140\ \ m/s$$

Para 400m

$$v_v = -\,9{,}8\ \ m/s^2 . 9{,}04\ s = \ -88{,}55\ \ m/s$$

Altura	Tiempo	Rapidez vertical	Rapidez horizontal	Velocidad del paquete (3)
1000 m	14,29 m/s	- 140 m/s	139.96 m/s	197.96 m/s
400 m	9,04 m/s	-88,55 m/s	221,24 m/s	238.30 m/s

(3) La velocidad del paquete será la suma vectorial de ambas componentes (horizontal y vertical).

REFLEXIONES FINALES

Ya Descartes en 1637 (Sala, 2012), en su Discurso del Método, proponía una ruptura con la escolástica más rancia y aludía a la libre difusión de las ideas y el conocimiento. GeoGebra, producto de la tesis doctoral de M Hohenwarter, es un recurso de acceso abierto, muy valioso para la enseñanza y el aprendizaje de matemática.

Esta secuencia didáctica basada en distintas estrategias y utilizando dicho software como recurso, intenta contribuir a que los alumnos logren conocimientos generadores. El deseo de compartirla, tuvo su origen en la inexistencia o al menos escasa divulgación de propuestas didácticas que integren algebra vectorial con aplicaciones a las ciencias mediante enfoques realistas y/o experimentales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Burbules, N. (2001). *Riesgos y Promesas de las nuevas tecnologías*. Buenos Aires: Granica.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Sainz (Comp.). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-63). Buenos Aires: Paidos

Gardner, H. (1995). *Siete Inteligencias. La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós.

Perkins, D. (1997). *La escuela inteligente*. Barcelona: Gedisa

Sala, H. (2012). *Origen, consolidación, expansión e implicancias del acceso Abierto (open access) en América Latina y el Caribe*. Recuperado en: http://ess.iesalc.unesco.org.ve/index.php/ess/article/viewFile/405/343.

Sears Zemansky (1963). *Física general*. Madrid: Aguilar.