PROPUESTA PARA EL CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA USANDO EL MÉTODO DE CUADRAR RECTÁNGULOS

Pedro L. Peña, Laura del C. Méndez
Universidad de Los Andes – NURR. L. B. “Rafael Quevedo Urbina”. U. E. Colegio “Madre Rafols”, Estado Trujillo, Venezuela.
pedrop@ula.ve, lauramendez@ula.ve

RESUMEN

La raíz cuadrada de un número, es un tema que se ha dejado de impartir en la asignatura de matemática de Educación Media. En este trabajo se propone el algoritmo Babilónico para el cálculo de la raíz cuadrada. Las aproximaciones de raíces cuadradas fueron encontradas en tablillas babilónicas alrededor de 1700 a.C. Con ésta propuesta se desea que el aprendizaje de la raíz cuadrada sea significativo y no memorístico como lo es el algoritmo tradicional. Esta herramienta permite abordar el concepto de raíz cuadrada asociada a la geometría y la aritmética, además de incentivar el aprendizaje algorítmico que es de vital importancia para el entendimiento de los conocimientos matemáticos. La estrategia para hallar la raíz cuadrada podría verse como la aproximación del área de un cuadrado por medio del área de rectángulos cuya longitud de sus lados se aproximan a la raíz buscada.

PALABRAS CLAVE: Aproximación. Algoritmo babilónico. Raíz cuadrada.

INTRODUCCIÓN

El cálculo de la raíz cuadrada de un número ha estado presente desde los antiguos egipcios, babilonios y chinos hasta nuestros días. Es probable que el uso de la raíz cuadrada por parte de los egipcios haya tenido su origen en aplicaciones prácticas relacionadas a su economía al igual que en las otras antiguas culturas mencionadas anteriormente (Ortiz, 2008). Se han reportado a lo largo de documentos históricos encontrados, varias maneras de hallar la raíz cuadrada Millares y Deulofeu (2005), la mayoría de ellas son algoritmos iterativos.

De todos estos métodos, se hará énfasis en el algoritmo babilónico, ya que representa una manera elegante y elemental de calcular la raíz cuadrada. El método babilónico se usaba aproximadamente hace más de 3500 años y representa un gran hallazgo histórico para el mundo de las matemáticas. En tal sentido la historia de las matemáticas, en especial la relacionada al tema de la raíz cuadrada representa un gran reforzador para afianzar los contenidos matemáticos en el estudiante.

Una famosa anécdota transcurre en los tiempos de Pitágoras, Filósofo y matemático griego, que al descubrir la imposibilidad de una solución en los números racionales para la ecuación $x^2 = 2$, causó una gran conmoción en el mundo griego, ya que ellos pensaban que todos los números eran racionales. La solución de la ecuación anterior es lo que llamamos la raíz cuadrada de **2** y representa en la historia el inicio de los números irracionales.

El algoritmo tradicional que se enseñaba en nuestras aulas con cierta regularidad hasta hace algún tiempo y en nuestros días por algunos profesores “aventureros”, tiene sus inicios en la antigua cultura china, se cree que hace aproximadamente 2500 años (Fernández, 1991). La desaparición progresiva de este algoritmo se debe posiblemente a la gran cantidad de pasos y operaciones involucradas que lo hacen más difícil incluso que el algoritmo de división, algoritmo que también es olvidado con frecuencia en un número importante de estudiantes. Aunado a todo esto, la calculadora surge como una herramienta tecnológica que nos permite en muchos casos sustituir el análisis y la comprensión de las ideas matemáticas cuando se está iniciando en el estudiante el proceso de aprendizaje. La calculadora debe ser usada como un instrumento que acompañe al afianzamiento de conocimientos matemáticos fundamentales y no para sustituirlos.

De esta manera, la máquina calculadora es la que de manera desconocida nos responde en pocos segundos el cálculo de la raíz cuadrada, escondiendo el verdadero significado, lleno de muchos conceptos matemáticos que deben ser comprendidos por los estudiantes ¿Será este uso indiscriminado de la calculadora, el inicio de la no enseñanza de los algoritmos tradicionales de operaciones matemáticas? Esta interrogante nos plantea también preguntarnos por la pertinencia de la enseñanza de algoritmos tradicionales para la suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Por lo pronto luce difícil conseguir un algoritmo que reemplace a la suma y la multiplicación que se enseña en nuestra escuela primaria, aunque existen algoritmos antiguos (egipcios, chinos) que se podrían enseñar para contrastar los tradicionales (Pérez, 2005).

Este sistema empleado por los babilonios para aproximar las raíces cuadradas, fue transformado en algoritmo por Herón de Alejandría (50 d.C). Dicho algoritmo describe una sucesión para determinar la aproximación de la raíz cuadrada de un número. Esta sucesión, se determina buscando la media aritmética de los valores consecutivos entre los que se encuentra $\sqrt{\boldsymbol{a}}$, donde esta media aritmética representa la primera aproximación que llamaremos valor inicial, y a partir de esta, buscar otra que será más próxima a $\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Reiterando este proceso obtendremos aproximaciones más cercanas para $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ por defecto y por exceso alternativamente.

El objetivo de la presente investigación consiste en dar a conocer un algoritmo para la extracción de la raíz cuadrada que pudiese sustituir al algoritmo tradicional y que además, muestre sus ventajas con respecto al método tradicional.

MÉTODOS

El presente estudio se realiza desde el punto de vista histórico – epistemológico, en donde se describe una herramienta para el cálculo de la raíz cuadrada que no aparecía en los textos tradicionales de matemáticas y que se intenta rescatar por su gran valor histórico y sencillez. A diferencia del algoritmo tradicional, el método babilónico o algoritmo de Herón para hallar la raíz cuadrada, guarda vinculación con el concepto de área de rectángulos y cuadrados, lo cual conecta y armoniza con la geometría.

La aproximación de la raíz cuadrada de un número, de acuerdo a libros o textos de Matemática de tercer año plantea numerosos pasos, que efectivamente sugieren bastante complejidad y por ende dicha actividad no puede ser una realidad de abordaje sencillo para los alumnos, ya que al presentar este procedimiento, van a obviar el mismo, y simplemente preferirán emplear herramientas tecnológicas.

Los babilonios utilizaban el concepto matemático de raíz cuadrada para "cuadrar" rectángulos. Ellos asociaban la raíz cuadrada a la longitud del lado de un cuadrado, por lo que suponían que dicha raíz era positiva. Una de las tablas cuneiformes más conocidas es la llamada tabla de Yale (YBC7289), procedente de los babilonios y data del año 1700 antes de la era cristiana (figura 1)

Figura 1. Tabla de Yale (YBC7289)

En la figura 1 se observa un cuadrado con sus diagonales; la interpretación de esta tabla es un enigma de detectives matemáticos, los signos cuneiformes, una vez interpretados son números en el sistema sexagesimal. Sobre la diagonal de dicho cuadrado aparece el número: 1; 24; 51; 10 que al ser representado en el sistema decimal queda:

$$1;24;51;10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}414212963$$

Este valor representa la raíz cuadrada de **2** con cinco decimales exactos de aproximación. Aunque no se han encontrado evidencias contundentes de cómo los babilonios calculaban estas raíces, lo más probable es que estos manejaban algún tipo de algoritmo para hacerlo.

Proponemos para nuestra estrategia la siguiente definición de raíz cuadrada de un número $\boldsymbol{A}$ no negativo, como la longitud del lado de un cuadrado de área $\boldsymbol{A}$. En varios textos encontramos la siguiente definición para la raíz cuadrada; como "el número que multiplicado por sí mismo nos da como resultado el número original" (el número al que se le buscaba la raíz cuadrada) ver por ejemplo Acosta y Acosta (2012), Baldor (1983) y Suarez (2002). Esta definición resulta inconveniente, ya que por ejemplo la raíz cuadrada de **4** puede ser **2** y **-2**; solución que rompería con el carácter funcional de la operación raíz cuadrada, que deseamos sea un solo valor, en dicho caso 2. El símbolo que se utiliza para la raíz cuadrada es $\sqrt{\ }$**,** que se deriva de la $\boldsymbol{r}$ del latín ***radix***. Observe que $\sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2}$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los usos de la raíz cuadrada son presentados en la mayoría de los niveles y contenidos educativos, propuestos en los textos ya sea como algoritmo tradicional o como el método de Bakhshali (Rojas, 2012), por consiguiente son largos y engorrosos para el estudiante. En tal sentido son varios los métodos por los que se puede obtener el resultado exacto o aproximado de la raíz de un número, motivo por el cual dicho tema se deja a un lado por parte de los profesores, sin embargo se presenta empleando el uso de la tecnología, a través de calculadoras, donde simplemente se coloca la cantidad a calcular y arroja un resultado aproximado o exacto, y se ubica el mismo en la recta numérica en los casos que sea necesario.

Es importante resaltar que, este tema está planteado en Tercer año de Educación Media y el cual debe ser desarrollado a través del uso de cualquier algoritmo, en tal sentido Núñez y Servat (1992), señalan "que todo profesor de Matemáticas sabe la complejidad que encierra para sus alumnos el aprendizaje del algoritmo usual de extracción de la raíz cuadrada" (p. 69), por lo que resulta demasiado engorroso y difícil para ser presentado al estudiante, que por lo general, se limita a memorizar el proceso sin comprenderlo.

La raíz cuadrada de un número entero positivo no cuadrado perfecto está comprendida entre dos números enteros consecutivos: $a < \sqrt{n} < a + 1$. Si elegimos un número racional p tal que $a < p < a + 1$ y encontramos otro número racional q, tal que $p.q = n$;

Herón demostró que la media aritmética $(p+q)/n$ es mejor aproximación a la raíz cuadrada de n que cualquiera de los otros dos números. El proceso se puede iterar, considerando a la media aritmética hallada como un nuevo racional y buscando otro de tal forma que su producto vuelva a ser n . El proceso se puede repetir indefinidamente. Ilustremos esto con un ejemplo:

Ejemplo: Hallar $\sqrt{2}$: Observemos que $1 < \sqrt{2} < 2$, luego la primera aproximación racional será la media $r_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ y elegimos $r_2 = \frac{4}{3}$ ya que $r_1 r_2 = 2$. Seguimos ahora con $r_3 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} \approx 1{,}4167$. Este último valor representa la raíz cuadrada de **2** con decimales exactos de aproximación.

Para generalizar el procedimiento anterior y generar el algoritmo, supongamos que queremos hallar la raíz cuadrada de un número positivo A y tenemos una primera aproximación $r_1 \approx \sqrt{A}$ y la otra será $r_2 = \frac{A}{r_1}$. Luego, tomando la media aritmética tenemos $r_3 = \frac{1}{2}(r_2 + A/r_2)$. Prosiguiendo de esta manera, se genera la sucesión $r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + A/r_n)$. A medida que n crece, el valor de r_n se hace más próximo al valor $\sqrt{A}$.

De este modo, el algoritmo consiste; primero en conseguir un valor inicial (primera aproximación) y luego aplicar dicho algoritmo cuantas veces se quiera. El resultado matemático que muestra la propuesta se resume en el siguiente Teorema, cuya demostración puede conseguirse en Bartle y Sherbert (2003, p. 244).

Teorema: *Sea $A > 0$ y $r_1 > 0$ (un número cualquiera). Entonces la sucesión definida por $r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + \frac{A}{r_n})$ converge a $\sqrt{A}$ si n tiende a ∞ ; y además, existe una constante $k >$ 0; $tal\ que$* $\left|r_{n+1} - \sqrt{A}\right| \leq k\left|r_n - \sqrt{A}\right|^2$. La última desigualdad significa que la convergencia es cuadrática; es decir, por cada iteración obtenemos dos decimales exactos de aproximación.

Para calcular la raíz cuadrada de un número positivo usaremos la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} r_1 & valor\ inicial \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(r_n + \dfrac{A}{r_n}\right) & para\ n\ \geq 2 \end{cases}$$

La propuesta consiste en ¿Cómo calcular $\sqrt{A}$, donde A es un número positivo?

Paso 1. Haciendo uso del tanteo buscamos un valor aproximado fácil de calcular de $\sqrt{A}$ que llamamos r_1. Si el número es grande podemos hacer uso de una calculadora para hallar el valor inicial. Recomendamos hacer una tabla de varios cuadrados perfectos para números pequeños.
Paso 2. Para calcular la siguiente aproximación, calculamos:

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + \frac{A}{r_1})$$

Si el valor inicial r_1 es bastante cercano a $\sqrt{A}$, el valor r_2 será suficiente. Ahora si queremos una mejor aproximación, calculamos $r_3 = \frac{1}{2}\left(r_2 + \frac{A}{r_2}\right)$. Este último valor tendrá por lo menos dos decimales exactos, lo cual satisface nuestro requerimiento.

Para ello ilustraremos el teorema en los ejemplos 1 y 2 que se muestran a continuación:

Ejemplo 1. Hallar $\sqrt{47}$

Primero observemos que$6^2 = 36\ y\ \ 7^2 = 49$. De esta manera, elegimos como valor inicial $r_1 = 7$ (el más cercano). Ahora hallamos la siguiente aproximación con la fórmula anterior: $r_2 = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{47}{7}\right) \approx 6{,}8571$. Este valor aproxima a $\sqrt{47}$ con dos decimales exactos. El valor de nuestra raíz cuadrada haciendo uso de una calculadora tiene como resultado 6,8556546.

Ejemplo 2. Hallar $\sqrt{2648}$

Observemos primero que $2500 < 2648$; es decir, $50^2 < 2648$. Luego, $r_1 = 50$ pudiera ser el valor inicial, pero está un poco por debajo, que tal si se intenta con $r_1 = 51$ ya que $51^2 = 2601$ es más cercano. Entonces, se tiene que $r_2 = \frac{1}{2}\left(51 + \frac{2648}{51}\right) = 51{,}4608$. El valor de $\sqrt{2648}$ en una calculadora es $\sqrt{2648} = 51{,}45872132$, si redondeamos este valor a dos cifras nos queda 51,46 igual al valor conseguido. Si se considera otra iteración, $r_3 = \frac{1}{2}\left(r_2 + \frac{2648}{r_2}\right) = 51{,}45872134$. Se tendrían siete decimales exactos de aproximación.

Luego, se hace notar que mientras más cercano se elija el valor inicial, la raíz cuadrada que se busca tendrá una mejor aproximación. Cuando se tengan raíces de números grandes, se sugiere hacer uso de la calculadora para hallar el valor de inicio. Este uso de la calculadora se hace como un apoyo para el desarrollo de un conocimiento matemático, más no para sustituirlo.

Se puede decir que efectivamente el desarrollo de la propuesta permitirá a los docentes aplicar esta estrategia para estimular al estudiante utilizando algoritmos como estrategias, no solo para el cálculo de la raíz cuadrada, sino también en otros temas, empleando estos como conjunto de instrucciones o pasos a seguir para alcanzar un objetivo; por ende desarrollar el pensamiento al momento de resolver un problema matemático con situaciones cotidianas y lograr aprendizajes significativos en estos.

CONCLUSIONES

Introduce al estudiante, en el concepto de sucesión y de función, de los cuales el estudiante, ya debe tener por lo menos una noción vaga y además, refuerza el desarrollo del pensamiento algorítmico. Es notablemente más rápido que el método tradicional de extraer raíz cuadrada que se enseña en Tercer Año de Educación Básica. Además, se propone el uso de la calculadora para dar un valor inicial de la raíz buscada. Tiene un antecedente histórico importante del legado babilónico y de alguna manera este método se desarrolla de una forma más natural que el método tradicional. La convergencia del método es rápida, por tal razón el método tiene una gran ventaja.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, A y Acosta, P.(2012). *Un método para sacar raíces cuadradas exactas.* Recuperado el 18 de diciembre de 2013 de http://upcommons.upc.edu/eprints/bitstream/2117/2375/1/anupn.pdf

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural. S.A.

Bartle, R y Sherbert, D. (2003). *Introducción al análisis Matemático de una Variable*. México: Limusa.

Fernández, S. (1991). *La raíz cuadrada y la matemática china*. Volumen 8. España: SUMA.

Millares, J. y Deulofeu, J. (2005). Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas. *Educación Matemática 17*, 87-106.

Núñez, E. y Servat, S. (1992). *Los Algoritmos para el Cálculo de la Raíz Cuadrada y Sus Antecedentes en Textos Escolares Antiguos.* Departamento de Didáctica de las Ciencias. Experimentales de la Matemáticas. Universidad de Barcelona.

Ortiz, A. (2008). Matemáticas en los antiguos Egipto y Babilonia. *UNION 13*, 5-18.

Pérez, A. (2005). Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. *UNION 1*, 37-44.

Rojas, A. (2012). *Matemática para la Vida*. Caracas: MPPE.

Suarez, R. (2002). *Estrategias. La educación. Estrategias de enseñanza-aprendizaje*. México: Trillas.