LA NO ACEPTACIÓN DEL PRINCIPIO DEL TERCERO EXCLUIDO EN LA LÓGICA DESDE LA VISIÓN MATEMÁTICA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*".
Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico – Universidad Tecnológica Nacional.
Buenos Aires, Argentina.
crccrespo@gmail.com

RESUMEN

Entender a la argumentación matemática como una construcción sociocultural, lleva a comprender que las leyes lógicas pueden no ser aceptadas en determinados escenarios socioepistemológicos. El enfoque realizado corresponde al de la socioepistemología y el estudio, se ha focalizado en escenarios en los que no se aceptó el principio del tercero excluido, dando origen a la aparición de lógicas no clásicas. En ellas es posible analizar los significados que se construyen dentro de la matemática.

PALABRAS CLAVE: Socioepistemología. Matemática. Tercero excluido.

INTRODUCCIÓN

El surgimiento de las lógicas no clásicas se ha debido a la necesidad de modelizar situaciones de la vida real que escapan al análisis de la lógica clásica. El pensamiento del ser humano no siempre está regido por las leyes y principios enunciados por Aristóteles.

La matemática actual se sustenta en la lógica clásica, ya que sus propiedades han sido demostradas bajo esta lógica. Sin embargo, no siempre ha sido la lógica clásica capaz de dar una respuesta a la modelización de algunas situaciones cuyo surgimiento se dio aún dentro de la matemática que podríamos denominar "clásica". En la vida cotidiana, las afirmaciones que se realizan no corresponden en muchas oportunidades a propiedades bivalentes, ni los razonamientos tienen características aristotélicas.

Uno de los tipos de lógica no clásica que surgieron son las lógicas polivalentes, y dentro de ellas las más sencillas, pero que sirven de sustento a otras son las lógicas trivalentes. Resulta interesante analizar el aspecto semántico de los distintos conectivos definidos en las lógicas trivalentes desde la óptica de la matemática. Surgieron para ofrecer alternativas a la semántica bivalente de la lógica clásica.

Su aparición se originó desde la semántica y el tratamiento sintáctico fue posterior a su creación. Esta visión permite comprender que algunos aspectos de esta ciencia y su enseñanza pueden enfocarse desde el punto de vista de las lógicas no clásicas, tan utilizadas actualmente en campos de aplicación de la ciencia y la tecnología.

ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA CLÁSICA

La lógica clásica se ha formalizado a través de muchos sistemas lógicos formales a lo largo de la historia. Desde la época de Aristóteles, el hombre ha tratado de estudiar y sistematizar las formas correctas de pensar, de razonar, de inferir resultados y afirmaciones en las ciencias. Tanto la lógica simbólica, como la lógica clásica se refieren a los principios generales del razonamiento. La diferencia básica entre ellas es que la lógica clásica, sistematizada por Aristóteles, elaborada por los pensadores medievales y enseñada durante siglos en la educación media y superior, utiliza como símbolos, palabras; mientras que la lógica simbólica utiliza un conjunto de signos especiales. A causa de esta notación especial y precisa y del consiguiente cuerpo de reglas para operar con esta notación, se llama frecuentemente a la lógica simbólica: lógica matemática, pero uno de sus principios es la generalidad, sus principios no pertenecen de modo exclusivo a esta ciencia, sino que se los ha entendido como principios propios del pensamiento humano. Esta visión tiene indudable influencia de la visión aristotélica del hombre.

La lógica ha sido siempre un intento de modelizar matemáticamente el comportamiento de ciertas clases de objetos y las leyes que rigen sus relaciones, para así seguir mejorando su conocimiento y el de las leyes que rigen sus relaciones.

La lógica clásica tiene ciertas propiedades representativas que la caracterizan y que fueron sustentadas por Aristóteles y sus seguidores y, que se han mantenido vigentes desde él hasta nuestros días en el pensamiento occidental. La lógica clásica es:

- *Apofántica*: Deja fuera enunciados de los que no quepa preguntar si son verdaderos o falsos.

- *Bivalente*: Sólo admite dos valores de verdad: verdadero y falso.

- *Asertórica*: Excluye la existencia de modalidades de verdad. No existen graduaciones de los valores, como podría ser: muy verdadero, algo verdadero, muy falso, casi falso, etc.

- *Extensional*: Opera sólo en términos de la verdad global de sus expresiones. Cada proposición mantiene en todo el discurso su valor de verdad, no es posible que por alguna causa ésta cambie de valor de verdad en medio del discurso.

Se dice que un sistema es *divergente* de otra si incorpora el vocabulario del primer, pero tiene un conjunto diferente de teoremas o inferencias válidas. Un sistema es *extensión* de otro si contiene nuevo vocabulario, además del compartido y tiene nuevas inferencias que esencialmente se refieren al nuevo vocabulario. A partir de estas definiciones, se considera que una lógica divergente es un sistema que difiere de la lógica clásica una lógica es una extensión si extiende a ésta.

Una lógica puede ser a la vez una extensión y una divergencia de la lógica clásica: puede añadir nuevo vocabulario y por lo tanto nuevos teoremas y al mismo tiempo diferir de la lógica clásica en lo que respecta a inferencias que contienen esencialmente sólo el vocabulario incorporado. Las lógicas polivalentes son divergentes: si bien incorporan nuevos términos e inferencias a la clásica, carecen de ciertos principios y teoremas de la misma, como es el caso del principio del tercero excluido.

EL SURGIMIENTO DE LAS LÓGICAS NO CLÁSICAS

Aristóteles en la *Metafísica* enunció el principio del tercero excluido de la siguiente manera: *"Tampoco puede haber un término medio entre afirmaciones contrarias, y respecto a una cosa debemos afirmar o negar algo, cualquiera que sea"* (Citado por Guétmanova, 1986, p.124.)

Este principio se basa claramente en que para Aristóteles cada proposición puede tener sólo uno de dos valores de verdad: verdadero o falso. A pesar de que todo el desarrollo de la lógica en Occidente se basa fuertemente en la afirmación de que toda proposición es verdadera o falsa, ya sustentada por Aristóteles, podría decirse que el primero en detectar la existencia de enunciados a los que es imposible asignar uno de estos dos valores, fue el mismo Aristóteles, que analiza, el enunciado: "*Mañana habrá una batalla naval*"

Si se quiere determinar si se trata de una proposición verdadera o falsa, será necesario esperar al día de mañana. Sólo entonces y cotejando con la realidad, se podrá estar en condiciones de saber si es una proposición verdadera o falsa. Sin embargo, se trata de una proposición pues tiene un valor de verdad: es verdadera o es falsa, lo que ocurre es que no se puede saber su valor de verdad hasta que pase el tiempo propuesto.

Si es verdadera la proposición, sería necesaria la batalla naval, entonces el futuro está determinado. Lo mismo ocurre si es falsa. Aristóteles dio a este tipo de enunciados el nombre de *futuros contingentes*. Para salvar el escollo de determinar su valor de verdad, las excluyó del conjunto de enunciados con los que trabaja la lógica, no les dio el status de proposición.

Se basó para hacerlo en la consideración de que como la lógica es para Aristóteles el sustento de las ciencias y los enunciados de las ciencias son verdaderos o falsos más allá del tiempo, las ciencias no trabajan con futuros contingentes y por ello la lógica no necesita dar una respuesta a su valor de verdad.

Los epicúreos, que tenían una visión no determinista del mundo, en la que no tenía cabida la bivalencia y por lo tanto el principio del tercero excluido. Para ellos los futuros contingentes no debían ser descartados. Sin embargo, los estoicos mantuvieron una visión rígidamente determinista y apoyaron la posición de necesidad de la bivalencia.

La idea de otros valores de verdad, además de los dos valores verdadero y falso clásicos, es central para las lógicas polivalentes. El primer paso es la consideración de un valor de verdad de cierta manera intermedio entre el verdadero y el falso. Desde el punto de vista histórico, en la Edad Media el problema de los futuros contingentes y sus posibles valores de verdad fue abordado por tanto lógicos europeos como islámicos (Rescher, 1969). Guillermo de Occam (1298-1349), en la *Summa Teológica*, al comentar esta obra aristotélica, parece llegar a un sistema trivalente, en el que el valor de verdad de estos enunciados es tratado a través de un valor neutro al esbozar tablas de verdad.

La concepción de modalidad de valores de verdad para las proposiciones también dio origen a otro tipo de lógicas no clásicas denominadas lógicas modales, en las cuales algo no es sólo verdadero o falso, sino que aparecen modos de verdad o falsedad para cada proposición (necesariamente verdadero, posiblemente verdadero, necesariamente falso, posiblemente falso). Otras lógicas no clásicas que surgieron son las denominadas lógicas probabilísticas, en las que los valores de verdad toman valores que son regidos por las leyes de la teoría de las probabilidades.

LAS LÓGICAS POLIVALENTES

Un sistema es n-valente si n es el menor número de valores que tiene cualquier tabla de verdad característica de dicho sistema. En las lógicas polivalentes se mantiene n es mayor estricto que 2 por lo que las bivalentes no se designan como polivalentes, por lo general. Aunque solamente hay un sistema de lógica bivalente en el sentido amplio del término, surgen para las lógicas polivalentes, sistemas alternativos que llevan a valores distintos para las fórmulas compuestas.

Esto significa que los conectivos en la lógica bivalente tienen una sola definición posible, mientras que en las lógicas polivalentes, hay distintas definiciones posibles, dependientes de la interpretación de los valores de verdad intermedios.

Estas interpretaciones dependerán de los significados que se otorguen a los valores intermedios de verdad. Las lógicas polivalentes son divergentes; si bien incorporan el vocabulario de la lógica clásica, carecen de ciertos teoremas de la misma, tales como el principio del tercero excluido. Algunas añaden también nuevo vocabulario entrando entonces en la categoría de extensiones.

LOS SIGNIFICADOS DEL TERCER VALOR DE VERDAD EN LAS LÓGICAS TRIVALENTES

A continuación presentamos algunas de las lógicas trivalentes que surgieron dando algún fundamento epistemológico que sustenta la interpretación semántica del tercer valor de verdad. Cada una de ellas debió definir los conectivos lógicos a partir de esa interpretación.

a. Lógica trivalente de Łukasiewicz

Jan Łukasiewicz fue el primero en publicar su propuesta de tratamiento de una lógica trivalente (Rescher, 1969). Este matemático polaco centró su trabajo en la lógica matemática y reportó en 1920 una manifestación de supremacía de la lógica trivalente por encima de la lógica bivalente, proponiendo su generalización a lógicas polivalentes con incluso una cantidad infinita de valores de verdad, basada en trabajos suyos anteriores. Para Jan Łukasiewicz, la disputa acerca de la bivalencia de la lógica tiene un trasfondo metafísico: los que la afirman son decididos deterministas, los que no, tienen una visión indeterminista del mundo. En su escenario científico, tuvo influencia de las ideas de Russell, en cuanto a las contradicciones que introducía la lógica y a los estudios de las vaguedades del lenguaje.

La visión de ciencia de Łukasiewicz, difiere de la aristotélica:

> "La creatividad poética no difiere de la creatividad científica en que encierre mayor cantidad de fantasía. Cualquiera que, como Copérnico, haya cambiado a la Tierra de posición y la haya enviado a hacer revoluciones en torno al Sol, o que, como Darwin, haya percibido en las nieblas del pasado las transformaciones genéticas de las especies, puede codearse con el mayor de los poetas. Pero el científico difiere del poeta en que, en todo tiempo y lugar, razona. No necesita ni puede justificarlo todo, pero todo lo que afirme tiene que ligarlo mediante lazos lógicos en un todo coherente. El fundamento de ese todo consiste en juicios acerca de hechos, y ello sostiene la teoría, que explica, organiza y predice hechos. Así es como se crea el poema de la ciencia."
>
> (Łukasiewicz, 1912, p.13)

Esta visión de ciencia, en la que se conjugan la creatividad y la razón, permitieron a Łukasiewicz imaginar más allá de la lógica clásica y dar una interpretación al valor de verdad de los futuros contingentes.

Él mismo reconoce que en su intento de modificar el concepto de ciencia basado en la lógica aristotélica, se vio obligado a forjar armas más poderosas que esa misma lógica, para poder vencer la "coerción de la lógica" que había sido impuesta por Aristóteles y por Euclides. (Łukasiewicz, 1918).

Interpretó el tercer valor como ***"indeterminado"*** o ***"posible"***, atribuible a los enunciados futuros contingentes descriptos por Aristóteles, y obtuvo un "*sistema tan coherente y consistente como la lógica aristotélica, pero más rico en leyes y fórmulas"* (Łukasiewicz, 1918, p.16). Según el criterio aristotélico, los enunciados sobre el futuro no son verdaderos ni falsos, bajo pena de verse empujado hacia el fatalismo.

El razonamiento de Łukasiewicz se puede esquematizar de la siguiente manera:

> "Yo puedo asumir sin contradicción que mi presencia en Varsovia en un cierto momento en el año próximo, por ejemplo en la noche del 21 de diciembre, está en el presente determinado de manera ni positiva ni negativa. Ya que es posible pero no necesario que yo esté presente en Varsovia en el tiempo dado. Sobre esta afirmación, la proposición 'Yo estaré en Varsovia en la noche del 21 de diciembre el año próximo', no puedo en el presente decir que es ni verdadera ni falsa. Porque si fuera verdadera hoy, mi futura presencia en Varsovia debería ser necesaria, que es contradictorio con la afirmación asumida. Si fuese falsa ahora, por otra parte, mi futura presencia en Varsovia debería ser imposible, que también es contradictorio con la afirmación asumida"
>
> (Łukasiewicz, citado por Rescher, 1969, p.23)

La única manera de evitar esta conclusión fatalista, argumenta Łukasiewicz es rechazar la bivalencia. Para cada interpretación de los valores de verdad intermedios en una lógica trivalente, será necesario definir las tablas de verdad para poder determinar la manera en la que se evalúan las proposiciones compuestas en esa lógica.

Las funciones de verdad correspondientes a las proposiciones compuestas en la lógica trivalente de Łukasiewicz, pueden explicitarse de la siguiente manera:

Negación:

$$v(\sim p) = 1 - v(p)$$

p	~p
0	1
1/2	1/2
1	0

Cuadro 1: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Łukasiewicz

Conjunción:

$$v(p \wedge q) = \text{mín}\,(v(p)\,,\,v(q))$$

p	q	p∧q
0	0	0
0	1/2	0
0	1	0
1/2	0	0
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Disyunción

$$v(p \vee q) = \text{máx}\,(v(p)\,,\,v(q))$$

p	q	p∨q
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1
1	0	1
1	1/2	1
1	1	1

Cuadro 2: Tablas de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Łukasiewicz

Implicación:

$$v(p \Rightarrow q) = \text{mín}\,(1,\ 1 - v(p) + v(q))$$

p	q	p⇒q
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 3: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Łukasiewicz

Ni el principio del tercero excluido ni el de no contradicción se cumplen, de forma que ninguna es una ley en esta lógica; "$p \vee \sim p$" y "$\sim(p \wedge \sim p)$" toman el valor 1/2 cuando p lo toma.

b. Lógica trivalente de Bochvar

El matemático ruso D. A. Bochvar propone en 1939 una lógica trivalente con el objeto de resolver el problema planteado por la existencia de paradojas semánticas, o sea de proposiciones que no tienen valor de verdad en la lógica clásica porque al ser verdaderas deben tomar el valor falso y por otra parte al suponérselas falsas, se conduce a tomar el valor verdadero. Un ejemplo de este tipo de proposiciones es la denominada Paradoja del mentiroso.

Si se afirma "Yo miento" y se supone que esta es una proposición verdadera, entonces la persona que la afirma miente, o sea que no dice la verdad y si "Yo miento" no es verdad, entonces es falsa, o sea que la proposición no puede ser verdadera. Supongamos ahora que "Yo miento" es falsa, en ese caso no es cierto que mienta, por lo que debe ser verdadera la proposición considerada. Como conclusión, la proposición "Yo miento" no puede ser verdadera ni falsa.

Este tipo de afirmaciones eran conocidas en la lógica y en la matemática durante siglos. De ellas por no ser posible asignarles un valor de verdad en la lógica clásica, se dijo que eran paradojas y se las exceptuó de los posibles abordajes lógicos.

La lógica trivalente de Bochvar fue propuesta originalmente como una solución a las paradojas semánticas, y la interpretación que él dio para el tercer valor fue ***"paradójico"*** o ***"carente de significado"***. Esta interpretación de carencia de significado es herencia de la concepción bivalente de que las afirmaciones paradójicas tenían esa propiedad.

En la definición de los conectivos de esta lógica, se sustentó el principio de que una oración compuesta que contiene un componente paradójico es asimismo paradójica, algo así como que una proposición simple "infectaría" la proposición compuesta con esa carencia de significado. Los valores de verdad de las proposiciones compuestas para Bochvar son definidos a través de las siguientes expresiones y tablas de verdad:

Negación:

$$v(\sim p) = 1 - v(p)$$

p	~p
0	1
1/2	1/2
1	0

Cuadro 4: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Bochvar

Conjunción:

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } v(p) = 1/2 \text{ ó } v(q) = 1/2 \\ \text{mín}\,(v(p), v(q)) \end{cases}$$

p	q	p∧q
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	0
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Disyunción:

$$v(p \vee q) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } v(p) = 1/2 \text{ ó } v(q) = 1/2 \\ \text{máx}\,(v(p), v(q)) \end{cases}$$

p	q	p∨q
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	1
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 5: Tablas de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Bochvar

Implicación:

$$v(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } v(p) = 1/2 \text{ ó } v(q) = 1/2 \\ \text{máx}\,(1 - v(p), v(q)) \end{cases}$$

p	q	p⇒q
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 6: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Bochvar

Resulta importante hacer notar que con los conectivos definidos de esta manera no hay ninguna fórmula bien formada dentro de este cálculo que tome el valor verdadero para todas las asignaciones de sus componentes atómicas, o sea que en esta lógica no existen las tautologías y por lo tanto no hay leyes lógicas. Un 1/2 en la entrada siempre produce 1/2 a la salida.

Este hecho trae un conflicto, por lo que Bochvar añade con la finalidad de solucionar este problema, un operador con el significado de ***"es verdadero que"*** al que se denota **Vx** definido como verdadero si y sólo si la proposición x es verdadera, y falso en cualquier otro caso (Haack, 1991). De esta manera se recuperan las leyes lógicas a través de proposiciones denominadas cuasitautologías, a las que se les da un significado similar al que tienen las tautologías en la lógica clásica (Rescher, 1969).

Sin embargo estas leyes lógicas tienen distinta significación que las clásicas cuando intervienen en ellas proposiciones paradójicas. Esto le permite definir conectivos "externos" del siguiente modo:

$$v(p\wedge q) = V\,v(p) \wedge V\,v(q)$$
$$v(\sim p) = \;\sim V\,v(p)$$
$$v(p\vee q) = V\,v(p) \vee V\,v(q)$$
$$v(p\Rightarrow q) = V\,v(p) \Rightarrow V\,v(q)$$

Este conectivo externo actúa en cierta manera como un filtro; mediante la aplicación de este conectivo, sólo las tautologías bivalentes de la lógica se mantienen. El conectivo externo V actúa algo así como transformando tablas trivalentes para la lógica bivalente con 1/2 y 0 como tipo de falsedad.

c. Lógica trivalente de Kleene

Teniendo como antecedente el trabajo de Łukasiewicz, y otros realizados a partir de él acerca de la consideración de grados de verdad de las proposiciones, en 1938, Stephan Kleene introdujo una lógica trivalente diferente. La preocupación de Kleene no son las paradojas ni los futuros contingentes, sino ciertas proposiciones que se encuentran dentro de la matemática, cuyo valor de verdad es desconocido o indecidido. Por ejemplo, consideremos una proposición de la que no sabemos su valor de verdad pues recién la enunciamos y aún no hemos intentado demostrarla o refutarla. A ella se le aplicaría este valor de verdad al que Kleene denomina ***"indecidido",*** asignárselo a oraciones que, aunque verdaderas o falsas no son aún demostradas ni refutadas. Es decir que la asignación de este valor a una fórmula bien formada no se propone para indicar que no es ni verdadera ni falsa, sino solamente para indicar que no se puede decir qué es.

La lógica trivalente de Kleene difiere de la de Łukasiewicz con respecto a la implicación. La implicación de Kleene se construye de forma que, ahí donde la verdad o falsedad de un componente es suficiente para decidir la verdad o falsedad del compuesto, este toma el valor correspondiente, aunque el valor de otros componentes sea indecidible. En otro caso el compuesto en sí mismo es indecidible. Mientras Łukasiewicz preocupado por salvar la ley de identidad, asigna el valor de verdad 1 a: v(p⇒q) para v(p) = v(q) = 1/2, Kleene asigna al mismo el valor: 1/2 quedando la explicitación funcional de la implicación de Kleene como:

Implicación:

$$v(p \Rightarrow q) \qquad = \text{máx}\,(1 - v(p), v(q))$$

p	q	p⇒q
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 7: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Kleene

d. Lógica trivalente de Gödel - Brouwer

Suele considerarse que el primer intuicionista fue Krönecker, que expresó sus puntos de vista entre 1870 y 1890. Para él, el rigor impuesto en el análisis matemático por Weierstrass involucraba conceptos inaceptables y la obra de Cantor no era matemática sino misticismo. Estaba dispuesto a aceptar los números enteros porque eran claros a la intuición, obra de Dios, lo demás era obra del hombre y por lo tanto, sospechoso.

Rechaza todas las demostraciones y criterios no constructivos que no puedan determinar en un número finito de pasos los objetos que manejan. Propone prescindir de los irracionales al no aceptar el Principio del tercero excluido y las argumentaciones por reducción al absurdo. Como consecuencia de perder los irracionales, y por lo tanto los reales, debe carecer de las funciones continuas, En su época no encontró partidarios de su filosofía hasta veinticinco años después con Henri Poincaré.

En 1907 Luitzen Brouwer funda la escuela intuicionista. La intuición fundamental, según él es la "presencia de percepciones en una sucesión temporal" Concibe el pensamiento matemático como un proceso de construcción que edifica su propio universo independientemente de nuestra experiencia. Las ideas matemáticas están en nuestra mente previamente al lenguaje, la lógica y la experiencia.

Hacia 1930 Arend Heyting, formalizó las ideas de Brouwer al construir el cálculo proposicional intuicionista. En la lógica hay algunos principios y procedimientos claros, intuitivamente aceptables, pero no todos. Por ejemplo, se aplica demasiado libremente el principio del tercero excluido. Este principio afirma que toda proposición es verdadera o falsa, y es fundamental para el método de demostración indirecta. Históricamente surgió por la aplicación de razonamientos a subconjuntos de conjuntos finitos. Fue aceptado y se lo aplicó injustificadamente a conjuntos infinitos.

La idea de infinito de Brouwer coincide con la del infinito potencial de Aristóteles. Para Brouwer, el dogma de la validez universal del principio del tercero excluido es un fenómeno de la historia de la civilización.

El rechazo del principio del tercero excluido dio origen a una nueva posibilidad: la de las propiedades indecidibles: propiedades que no pueden ser refutadas ni demostradas. Por ejemplo: definamos k como el primer cero seguido de la secuencia 1, 2,... 9 en el desarrollo decimal de π .

La lógica clásica dice que existe o no existe. Brouwer, en cambio rechaza este razonamiento: dice que hay afirmaciones matemáticas que pueden no ser decididas nunca a partir de los axiomas de la matemática, estas cuestiones son indecidibles.

Por otra parte, en 1933, Kurt Gödel demostró el Teorema de Incompletitud de la Aritmética. Esto significa que existen realmente algunas afirmaciones indecidibles en la aritmética. Esto significa que existen proposiciones matemáticas cuya que no podrán ser nunca demostradas ni refutadas.

Si bien las bases de ambas teorías (la propuesta por los intuicionistas y por Gödel) son sustancialmente distintas, en ambos casos es posible interpretar el tercer valor de verdad de la lógica trivalente que proponen como **"indecidible".** No debe olvidarse en cada caso qué significa que algo sea indecidible.

Para los intuicionistas, por lo tanto, no es válida la ley del contrarrecíproco. Basado en esto Heyting elaboró su lógica proposicional trivalente. Es fundamental el concepto de implicación de los intuicionistas, así como el de la negación.

Aunque en las que las definiciones de la implicación y de la negación se distinguen en un sólo caso de las de Łukasiewicz, estas son fundamentales para rechazar las pruebas por simple reducción al absurdo:

Negación:

$$v(\sim p) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(p) = 0 \\ 0 & \text{si } v(p) \neq 0 \end{cases}$$

p	~p
0	1
1/2	0
1	0

Cuadro 8: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer

Implicación:

$$v(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(p) \leq v(q) \\ v(q) & \text{si } v(p) > v(q) \end{cases}$$

p	q	p⇒q
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	0
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 9: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer

En esta implicación si el valor de verdad del antecedente no supera al de consecuente, la implicación se considera verdadera, mientras que si lo supera resulta tan verdadera como lo sea el consecuente. La negación puede definirse como: $v(\sim p) = v(p \Rightarrow 0)$.

La conjunción y la disyunción se definen respectivamente como el mínimo y el máximo de los valores de los argumentos, tal como en el caso de Łukasiewicz y de Kleene.

Pese a que los cambios en las evaluaciones son pequeños, los cambios de los resultados son de consideración. En esta lógica no son tautologías las leyes del tercero excluido ni su negación. En cambio si los son: la ley de no contradicción, los dos modos del silogismo condicional categórico, la ley del contrarrecíproco, las leyes de De Morgan y la ley del cuarto excluido.En la lógica intuicionista, incoherencia implica contradicción, pero no al revés, tal como analizamos en el capítulo que corresponde a la descripción y fundamentación de las demostraciones por reducción al absurdo.

e. Lógica trivalente de Mamdani

Ebrahim Mamdani, ingeniero inglés que trabajó desde la década del 80 en el área de inteligencia artificial, refiriéndose a controladores, que periódicamente evalúan variables de estado y producen una variable de acción, propuso sobre la base de considerar el producto cartesiano de los universos del discurso del antecedente y del consecuente basado en la teoría de Lofti Zadeh para lógica difusa, la evaluación de la implicación como el mínimo entre los valores de verdad de ambas proposiciones. Por esta causa propuso la evaluación de la implicación como el mínimo de los valores de verdad de antecedente y consecuente. El escenario en el que realizó Mamdani sus desarrollos es radicalmente distinto de aquellos en los que se desempeñaron los matemáticos que anteriormente se han descrito; se trata de un ámbito característico de las aplicaciones de la ingeniería, correspondiente a una visión de la matemática en la que es fundamental el pragmatismo.

Para la evaluación de negaciones, conjunciones y disyunciones, la propuesta de Mamdani no difiere de la de Łukasiewicz, la diferencia fundamental se encuentra en la definición de la implicación:

Implicación:

$$v(p \Rightarrow q) \qquad = \text{mín}\,(v(p)\,,\,v(q))$$

p	q	p⇒q
0	0	0
0	1/2	0
0	1	0
1/2	0	0
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 10: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Mamdani

La implicación de Mamdani no extiende los valores clásicos de la implicación, ya que si restringimos sus valores al caso bivalente, presenta diferencias en relación a la tabla de verdad de la implicación clásica.

Esta forma de evaluación no parece además en principio aceptable, ya que se trata de la misma utilizada en una conjunción. Restringiéndonos al caso trivalente diferiría solamente en la implicación respecto de la lógica de Łukasiewicz, en los casos en que el antecedente no es verdadero.

Este autor sustenta lo anterior remarcando su fácil implementación computacional y que los casos en los que difiere de la lógica de Łukasiewicz son justamente aquellos en los que un sistema de control no debe actuar.

Si se rastrea en el área de control, esta implicación es una de las más utilizadas por optimizar la cantidad de operaciones realizadas por el programa en su evaluación y por lo tanto la complejidad del algoritmo utilizado en la resolución del problema y por obtener resultados similares a los que corresponderían a la aplicación de los conectivos dl lógico polaco.

f. Lógica trivalente con aplicación computacional

En el ámbito computacional, es posible ver el valor intermedio de verdad bajo la interpretación de "**error computacional de evaluación"**. Esta interpretación, si bien no es explicitada muchas veces se encuentra implícita en las ideas que pone en juego un programador. Al evaluar un programa una expresión booleana, el resultado obtenido es verdadero o falso. Sin embargo, al producirse un error en la evaluación, el valor devuelto no es verdadero ni falso, sino un valor que, por ser un error, provoca un conflicto en el programa que conduce a terminación anormal.

El estudio de cómo evitar si es posible este tipo de paradas anormales, hace que quienes se dedican a la compilación de programas, analicen los órdenes de evaluación de los valores booleanos de las proposiciones involucradas.

Por ejemplo en el caso de la conjunción, la evaluación usual si se consideran los valores de ambas proposiciones en juego, dará error si al menos una de ellas es errónea. Si se evalúa el conectivo denominado *cand* o condicional and, en cuanto la primera proposición determina el resultado, no se sigue evaluando la segunda.

p	q	p∧q
0	0	0
0	1/2	1/2
0	1	0
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

p	q	pcandq
0	0	0
0	1/2	0
0	1	0
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Cuadro 11: Tabla de verdad de los conectivos and y cand según lógica trivalente con aplicación computacional

ACERCA DE LA COMPARACIÓN DE LAS LÓGICAS TRIVALENTES

Resulta interesante la conclusión que surgió en una investigación que se encargó de analizar y comparar las propiedades que cumplen los operadores de implicación antes definidos (Alberti, Abeucci y Crespo Crespo., 1995). De esta comparación surgió la comprensión de que ninguno es “mejor” o “peor” que otro, dependerá del contexto en el que se esté trabajando, de los significados que se le atribuyan a los valores de verdad intermedios de las proposiciones.

La única que recibió para los autores una explicación distinta es la lógica de Bochvar, ya que no es posible considerar para esta interpretación una extensión continua de valores de verdad al intervalo [0, 1] para la interpretación de las proposiciones paradójicas: una proposición no puede ser más o menos paradójica. En el resto de los casos es posible extender las distintas maneras de evaluar cada conectivo al intervalo [0, 1], logrando distintos grados de veracidad de las proposiciones.

La extensión cada uno de los conectivos de implicación da la posibilidad de obtener distintas maneras de evaluar las proposiciones en los sistemas que hacen uso de la lógica difusa y de definir los distintos valores de verdad en esta lógica (Klir, StChari y Yuan, 1997). Se trata, sin duda de un esbozo de enfoque socioepistemológico de la temática, que fuera abordada en aquella investigación desde la óptica de la ingeniería con la finalidad de decidir cuál de las implicaciones se debía elegir para programar ciertos sistemas de inferencia aplicables a inteligencia artificial.

Con la óptica de la socioepistemología, resulta claro que la interpretación de los valores de verdad intermedios de las lógicas polivalentes se halla fuertemente ligada al escenario en el que se definen y a la finalidad con el que se las va a aplicar.

No será lo mismo pensar en proposiciones indecidibles, indecididas, que en paradojas o futuros contingentes. No es lo mismo pensar en un escenario matemático o en un escenario de control. Cada escenario determina la conveniencia de una interpretación y por lo tanto, según sean las características de las proposiciones que se estén abordando, será más o menos correcta una interpretación y con ella irán ligadas las leyes lógicas que en esa lógica se verifican.

LOS PRINCIPIOS ARISTOTÉLICOS Y LAS LÓGICAS TRIVALENTES

Nos interesa analizar si en cada una de las lógicas trivalentes que se han presentado anteriormente, son válidos o no los principios aristotélicos, en particular el Principio del tercero excluido y el Principio de no contradicción, por ser ellos los que sustentan las argumentaciones por reducción al absurdo.

Para mostrar que el Principio del tercero excluido no es válido en ninguna de las lógicas polivalentes anteriores, evaluemos su tabla de verdad para cada interpretación semántica. En todos los casos el Principio del tercero excluido falla para el caso en que el valor de verdad de la proposición en juego no es ni verdadero ni falso, cualquiera sea la interpretación semántica de los valores intermedios.

Sólo podemos considerar que se trata de una seudo tautología en el caso de Bochvar si se considera el conectivo externo.

Łukasiewicz

p	p∨~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Bochvar

p	p∨~p
0	1
1/2	1/2
1	1

p	Vp∨~Vp
0	1
1/2	1
1	1

Kleene

p	p∨~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Gödel - Brouwer

p	p∨~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Mamdani

p	p∨~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Aplicación computacional

p	p∨~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Cuadro 12: Principio del tercero excluido en lógicas trivalentes

En relación con el Principio de no contradicción, las tablas de verdad que se obtienen para esta ley aristotélica son:

Łukasiewicz

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Bochvar

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

p	Vp∧~Vp
0	1
1/2	1
1	1

Kleene

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Gödel - Brouwer

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Mamdani

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Aplicación computacional

p	p∧~p
0	1
1/2	1/2
1	1

Cuadro 13: Principio de no contradicción en lógicas trivalentes

La situación presentada es la misma que en el caso del Principio del tercero excluido. El Principio de no contradicción tampoco es válido para estas lógicas no clásicas. Estas lógicas son divergentes en relación con la lógica clásica.

Estas no son las únicas leyes de la lógica clásica que no se verifican en estas lógicas polivalentes (Alberti et al., 1995). Algunas de ellas se verifican en algunas lógicas y no en otras. No entramos en este análisis pues no se trata de leyes en las que se base la estrategia de argumentación de la que nos estamos ocupando en esta investigación.

¿Una matemática en Occidente que utilice lógicas no aristotélicas?

Resulta notorio encontrar estas palabras en un texto de un lógico clásico: "La lógica aristotélica es en realidad muy débil, y resulta insuficiente e ineficaz para las necesidades de la fundamentación matemática" (Klimovsky y Boido, 2005, p.137). En realidad, Klimovsky no se refiere a las lógicas que se acaban de presentar, sino a extensiones de la lógica aristotélica. Sin embargo, consideramos que valdría la pena pensar acerca de si es posible construir una matemática que tenga subyacente alguna de las lógicas que se describieron en este capítulo y cómo podrían influir en la matemática educativa.

¿O podemos considerar que en determinadas áreas de la matemática, como ser los fundamentos de la matemática ya las estamos utilizando? En realidad cada vez que se abordan paradojas, se está haciendo uso de la lógica de Bochvar. Al hablar de los fundamentos de la matemática y hacer referencia a proposiciones indecidibles o indecididas, se está utilizando la lógica de Kleene o de Gödel-Brouwer. Pero lo hacemos de manera inconsciente... nos cuesta manifestarlo y aceptarlo de manera explícita.

Pero, ¿los estudiantes aceptan estas lógicas? ¿Qué opinan de ellas? A continuación se transcriben algunas de las opiniones que han vertido en una clase de Fundamentos de la Matemática, del último año del profesorado de matemática, en la que se planteó el tema. Intervienen en el diálogo las alumnas A1, A2 y A3 y la profesora del curso (P):

> A1: "*Me parecen muy complicadas esas lógicas, no tienen la simplicidad de la lógica de Aristóteles*"
> P: *"¿Por qué 'complicadas"?*"
> Alumna 1: "*Las leyes son complicadas. No sé cómo podríamos tratar un razonamiento*."
> A2: "*Sí, ninguno de los métodos que vimos sirve, me parece*."
> P: "*Quizá haya que hallar otros métodos... No las trabajaríamos igual.*"
> A3: *"¿Más métodos? ¿No tenemos bastantes?"*
> P: "*Serían distintos. Por ejemplo cuando en inteligencia artificial se utilizan estos conectivos, y se trabaja con lógica difusa, las reglas de inferencia son distintas*."
> A1: *"¿Distintas? ¿Hay otro Modus Ponens?"*
> Prof: "*Sí, existe un Modus Ponens generalizado que se aplica cuando existen etiquetas lingüísticas y se trabaja con lógica difusa.*"
> A2: "*Eso es en inteligencia artificial. Pero, no en matemática. La matemática usa la lógica aristotélica*"
> P: *"¿Y el Teorema de Gödel? ¿Qué hacemos con las proposiciones indemostrables? ¿Qué pasa si tengo que razonar con una de ellas?*"
> A1: "*Las ignoramos, como se viene haciendo desde la década del '30*"
> P: "*O sea: lo que no me gusta o no sé cómo manejar, ¿lo ignoro? Pero ¡existe! Y alguna vez tendremos que aprender a trabajar con esos valores de verdad... Además si en otras áreas usan este tipo de lógicas porque la lógica clásica no funciona como quisiéramos, ¿qué hacemos los matemáticos?*"
> A2: "*Quizá existan, y como dijiste dentro de la matemática, pero no de la matemática que usamos en un aula*."
> P: *"¿Estás segura? ¿Realmente en el aula todas las maneras de razonar que encontramos son aristotélicas? ¿Todas son deductivas?*"
> A2: "*Sí, las que están bien son deductivas. Las otras para la matemática están mal."*
> A1: "*Las podemos estudiar, si hace falta, para resolver un problema, para ver cómo funciona, pero no creo que en el aula las podamos trabajar*."
> P: "*Y, ¿si encontraran que en el aula, en la escuela, los chicos usan formas de razonar no aristotélicas y pudiéramos ver cómo las aplican, por qué no llegan los alumnos a las conclusiones que queremos...? Y ¿si viéramos que hay patrones comunes de razonamiento, y que por eso les cuesta tanto la matemática que les enseñamos?"*
> A1: "*Entonces quizá me parecería que las tenemos que estudiar..."*

De este diálogo es posible inferir algunas conclusiones que pueden ser de interés para la investigación que se está realizando:

- Los alumnos, futuros profesores, a pesar de que reconocen como correcta la posibilidad de existencia de lógicas no clásicas, no les reconocen su aplicabilidad en la matemática.

- Tienen una visión de la matemática como única y construida sobre la lógica aristotélica.

- Aunque aceptan la presencia de enunciados para los cuales no es válida la lógica bivalente, optan por la postura de negarlos, de ignorarlos a la hora de un razonamiento, o sea saben que existen, pero prefieren la posición de no considerarlos como proposiciones con las cuales pueden realizar un razonamiento.

- Ven a la matemática como una ciencia separada de sus aplicaciones.

- En primera instancia, rechazan la posibilidad de formas de razonamiento no deductivas en el aula, considerándolas incorrectas.

- Sólo aceptan la posibilidad de estudiar y analizar tales formas de razonamiento sobre la base de pensar que pueden resultar útiles para mejorar el aprendizaje de la matemática.

En estas conclusiones puede verse cómo la visión aristotélica se encuentra arraigada en la manera de ver la matemática de los futuros docentes de matemática, aún cuando hayan tenido acceso a la existencia y caracterización de lógicas no aristotélicas. Por momentos aplican estas lógicas y son conscientes de lo que significan para la matemática, sin embargo en el momento de reconocerlas, prefieren seguir asidos a la posición clásica.

Sin embargo, con la aparición de estas lógicas desde la matemática, que son consistentes dentro de ella misma, y con la posibilidad de extender los tres valores de verdad que hemos considerado, a una cantidad infinita de valores, se muestra que la lógica aristotélica, y en particular el Principio del tercero excluido, no están *"escritos en los cielos"* (Barrow, 1996, p.28).

Lo presentado hasta el momento, permite, comprender que la comunidad matemática ante la necesidad de validar sus resultados, generó una práctica social llamada demostración (Crespo Crespo, 2007). A partir de la misma, construyó argumentaciones que en el caso de la matemática construida en las culturas con influencia aristotélica, se basaron fuertemente en formas acordes a los principios aristotélicos.

La lógica de Aristóteles se constituyó en el paradigma del pensamiento en estas culturas. Otras culturas, sin influencia aristotélica, construyeron argumentaciones distintas que no respetan los principios mencionados.

Sin embargo, aún en escenarios de la matemática occidental, en escenarios académicos nacidos dentro de la tradición aristotélica, fue posible construir otras lógicas que generan argumentaciones que no respetan los principios aristotélicos (Crespo Crespo, Farfán y Lezama, 2010). Las aplicaciones de estas formas de argumentar en la ingeniería y en la técnica en general, son múltiples.

Una pregunta que surge es: la escuela ha intentado enseñar argumentaciones deductivas, hemos visto que los resultados no han sido satisfactorios pero, ¿es esa la forma de argumentar aplicada en la sociedad fuera de la escuela?, ¿realmente en escenarios no escolares se utilizan las argumentaciones que la escuela construye, o al menos intenta construir?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Guétmanova, A. (1986). *Lógica*. Moscú: Editorial Progreso.

Alberti, F.; Abeucci, E. y Crespo Crespo C. (1995). Comparación entre diversos operadores implicacionales. *Infocom 95*. (pp. 207-216). Buenos Aires.

Barrow, J. (1996). *La trama oculta del universo.* Barcelona: Crítica.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C., Farfán, R. y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13* (3), 129-158.

Haack, S. (1991). *Filosofía de las lógicas.* Madrid: Cátedra.

Klimovsky, G.; Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: Una introducción*. Buenos Aires: AZ.

Klir, G.; StChari, U. y Yuan, B. (1997). *Fuzzy Set Theory. Foundations and Applications.* Prentice Hall.

Łukasiewicz, J. (1912). *Elementos creativos en la ciencia.* Deaño, A. *(Ed.) Estudios de lógica y filosofía.* (pp.3-14). Recuperado el 07/12/06 de: www.philosophia.cl

Łukasiewicz, J. (1918). *Lección de despedida pronunciada por el profesor Jan Łukasiewicz en el aula magna de la universidad de Varsovia*. Deaño, A. *(Ed.) Estudios de lógica y filosofía.* (pp.15-17). Recuperado el 07/12/06 de: www.philosophia.cl

Rescher, N. (1969). *Many-valued Logic*. New York: McGrawHill.