EL SOFTWARE GEOGEBRA: UN RECURSO HEURÍSTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Armando Morales Carballo, José Efrén Marmolejo Vega, Edgardo Locia Espinoza
Unidad Académica de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Guerrero, México.
armando280@hotmail.com, efrenmarmolejo@yahoo.com, lociae999@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo, se propone una estrategia para la resolución de problemas geométricos que favorece la asimilación y fijación del concepto de mediana. En particular se muestran las potencialidades que ofrece el software GeoGebra como recurso heurístico en este proceso. Los elementos teóricos y metodológicos que sustentan la estrategia son basados en los aportes sobre el proceso de resolución de problemas estudiados por: Locia, Mederos, Morales, Rodríguez y Sigarreta (2013) y Sigarreta, Locia, Bermudo (2011).

Con este trabajo, se contribuye en proponer un recurso didáctico para la resolución de problemas geométricos mediados por el uso de la tecnología: software GeoGebra para favorecer la asimilación y fijación de conceptos, en particular el de mediana.

PALABRAS CLAVE: Resolución de problemas. Estrategia didáctica. Recurso heurístico. Mediana.

INTRODUCCIÓN

Los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los distintos niveles, han motivado tanto a investigadores como a docentes hacia la búsqueda de nuevas herramientas para incidir favorablemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Las tendencias actuales sobre la enseñanza de la Matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como una herramienta que favorezca dichos procesos.

Investigadores como (Gamboa, 2007; Marmolejo y Campos, 2012) resaltan la importancia de incorporar el uso de las tecnologías de la información y comunicación en el trabajo en el aula, ya que estos recursos permiten a los alumnos explorar otros ambientes que favorecen la resolución a las actividades de enseñanza que se le proponen y que con sólo el uso del lápiz y papel, o la información de los libros de texto, notas de clase, entre otros, les sería difícil de obtenerlas.

Con el propósito de aportar herramientas que favorezcan los procesos de asimilación y fijación de los conceptos de la Geometría Plana, en particular del concepto de mediana, a partir de la resolución de problemas, se generan estrategias heurísticas con el uso del GeoGebra tales como analogías, reducción de un problema en otros, entre otros, para luego formalizar la conjetura obtenida.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

La resolución de problemas. Existen investigaciones como las que señalan (Polya, 1981; Labarrere, 1988; Rodríguez, 1991; Schoenfeld, 1991; Campistrous y Rizo, 1996; Sigarreta y Ruesga, 2004) que avalan la importancia de la resolución de problemas como uno de los aspectos fundamentales a los que debe estar orientado el trabajo del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Esta importancia que se le da a la resolución de problemas, exige clarificar cuáles deben ser los rasgos fundamentales que diferencian a este concepto, en la investigación se asume que el concepto problema tiene las siguientes características:

Existe una situación inicial o varias situaciones iniciales y una o varias situaciones finales, la vía de pasar de la situación o situaciones iniciales a la situación o situaciones finales debe ser desconocida o que no se pueda acceder a ellas de forma inmediata, debe existir la persona que quiera resolverla y la persona dispone de los elementos necesarios para buscar las relaciones que le permitan transformar la situación o situaciones planteadas.

Clasificación de los problemas. Investigadores como Locia, E., Mederos, O., Morales, A., Rodríguez, J. M, y Sigarreta, J. M. (2013) y Sigarreta, J.M., Locia, E., y Bermudo, S. (2011) hacen la siguiente clasificación de problemas:

Problemas estructurales. Son aquellos cuya similitud de estructura y forma, así como de solución nos permiten aplicar algunas de las siguientes analogías:

a) Analogía de estructura: Son aquellos problemas donde se evidencia similitud de cuerpo y forma, y al aplicar una analogía podemos llevar los problemas a situaciones donde se pueda evidenciar una solución en base a un problema que ya se conoce.

b) Analogía de solución: En este rubro, si un problema tiene semejanzas notables en su proceso de solución, entonces se estará en condiciones de elaborar una estrategia que lleve a la solución deseada.

Problemas reductivos: Son aquellos que tienen solución en problemas posiblemente de distinto carácter o dimensión. Se aplican los siguientes principios:

a) Principio de transformación: Aquellos problemas que se pueden llevar a otra dimensión mediante la transformación de alguno o todos sus componentes, teniendo la seguridad de que dándole respuesta al nuevo problema se le dará también al anterior.

b) Principio de reducción: Son aquellos problemas que se llevan a un rubro distinto donde al hacer una aplicación recursiva inmediata se le puede encontrar solución al problema original.

Los problemas geométricos que involucran el concepto de mediana que se atienden en esta investigación, se clasifican en Problemas reductivos. Estos se caracterizan esencialmente por ser problemas cuya resolución requiere de la resolución de sub-problemas, el usar sub-problemas como solución del original es claramente la aplicación de una reducción del problema a otros ya conocidos.

Asimilación y Fijación de conceptos. Diremos que se ha asimilado y fijado un concepto, cuando se logra hacer la aproximación, formalización, identificación y aplicación del concepto a la resolución de problemas, Morales (2012). El trabajo se orienta en la identificación y aplicación del concepto de mediana, a través de la resolución de problemas.

El software GeoGebra y la visualización. El software GeoGebra favorece el desarrollo de la Geometría Dinámica y el proceso de visualización, entendida esta última como la asociación de imágenes – ideas, Cárdenas (2006). El software GeoGebra juega un papel fundamental como recurso heurístico en cada una de las etapas que estructuran la estrategia.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PARA FAVORECER LA ASIMILACIÓN Y FIJACIÓN DEL CONCEPTO MEDIANA

La estrategia consta de tres etapas, como se describe a continuación:

Etapa 1. **Aproximación al problema.** Las actividades que se realizan responden a las cuestiones. ¿Qué problema vas a enfrentar? ¿Has visto alguno formulado de manera parecida? ¿Qué relaciones se pueden establecer? ¿Puedes representar la situación usando GeoGebra? ¿Qué comportamientos observas? ¿Se puede determinar la vía de solución directamente de la situación planteada y representada con el uso del software?

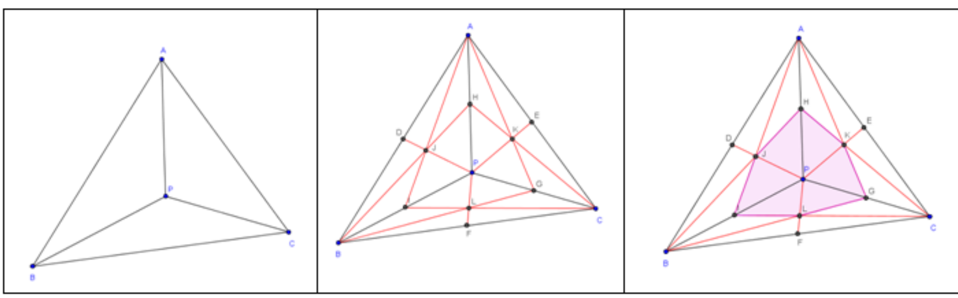
Etapa 2. **Orientación hacia la solución.** En esta etapa se clasifica el problema: estructurales o reductivos, en su debida sub clasificación, se elabora un esquema de solución, se identifica si son suficientes lo datos, si no hay contradicción, se delimita el conocimiento que se relaciona con los elementos del problema, se desarrolla la solución: los procesos de generalización son favorecidos a partir del trabajo con el software.

Etapa 3. **Control y valoración.** Se responden las siguientes cuestiones: ¿Todas las soluciones halladas son soluciones del problema? Describir cómo se llega a la solución y se responde si el método puede ser generalizado. En esta etapa, se formaliza el conocimiento matemático.

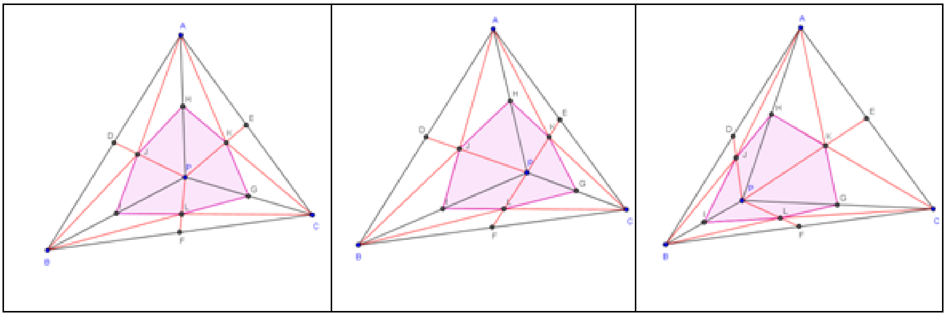
APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA

Problema: Si de un punto interior de un triángulo *ABC* cualquiera se trazan los segmentos a cada vértice, se forman tres triángulos. En cada triángulo así formado se trazan las medianas, se forma un polígono (hexágono) interior. Establezca la relación entre la medida del área del polígono (hexágono) y la medida del área del triángulo *ABC*.

1. En la siguiente figura se muestran las construcciones con GeoGebra, de la situación.



2. Según las condiciones dadas en la situación, el punto *P* interior del triángulo *ABC* no es fijo, así que al mover dicho punto, el hexágono cambia de forma pero la medida de su área se mantiene constante, esto se verifica en la vista gráfica del GeoGebra. En la siguiente figura se muestran tres formas distintas del hexágono a medida que el punto *P* interior del triángulo cambia de posición, pero sigue permaneciendo en el interior del triángulo *ABC*.

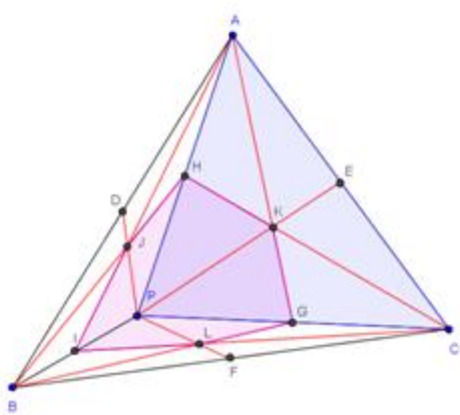


3. Al determinar la medida del área del triángulo *ABC* y compararlo con la medida del área del hexágono utilizando GeoGebra, se observa la siguiente relación: **La medida del área del hexágono es aproximadamente igual a la tercera parte del área del triángulo *ABC*.**

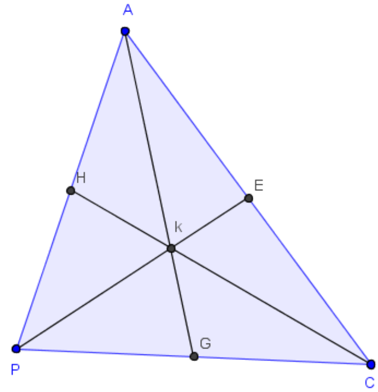
4. **Hacia la validación o refutación de la conjetura**

   Para validar o refutar la conjetura, hacemos una descomposición del problema en sub-problemas menos complejos, pero que una vez que se resuelven los sub-problemas, los resultados permiten la solución del problema principal.

   De la siguiente figura:



Se identifica y se trabaja con el triángulo *APC*:



Al determinar la medida del área utilizando GeoGebra de cada uno de los seis triángulos y comparar dichas áreas con la medida del área del triángulo *APC* se observa que cada medida de área es una sexta parte del área del triángulo *APC*. Esta relación no fue inmediata, sino que fue un proceso que se favoreció con el uso del software.

Generalización y formalización de la relación establecida. Para justificar desde la matemática la relación anterior, utilizamos la siguiente teoría:

- Fórmula para determinar el área de un triángulo cualquiera: $A_T = \frac{b x h}{2}$, ***b*** indica la base del triángulo, ***h*** indica la altura del triángulo.
- La mediana de un triángulo cualquiera, divide su área en áreas iguales.

Utilizando el triángulo anterior APC y la teoría indicada se tiene lo siguiente:

$$A[T(APC)] = A[T(PKC)] + T[T(CKA)] + A[T(AKP)].$$

A parte $A[T(PKC)] = A[T(PKG)] + A[T(GKC)]$,

$$A[T(CKA)] = A[T(CKE)] + A[T(EKA)],$$

$$A[T(AKP)] = A[T(AKH)] + A[T(HKP)].$$

Observe que las áreas de los triángulos $T(PKG)T(GKC)$ son iguales ya que tienen la misma base y la misma altura, análogamente los triángulos $T(CKE)$ y $T(EKA)$ coinciden sus áreas, también los triángulos $T(AKH)$ y $T(HKP)$ coinciden sus áreas. También se tiene lo siguiente:

a) $A[T(CGA)] = \frac{1}{2}\ A[T(APC)]$y $A[T(CHA)] = \frac{1}{2}A[T(APC)]$

Entonces, $A[T(CGA)] = A[CHA]$ ya que la mediana de cualquier triángulo divide su área en áreas iguales. De las igualdades anteriores se tiene lo siguiente:

$$A[T(GKC)] + A[T(CKE)] + A[T(EKA)] = A[T(CKE)] + \ A[T(EKA)] + A[T(AKH)]$$

Entonces,$A[T(GKC)] = A[T(AKH)]$

b) $A[T(PGA)] = \frac{1}{2}A[T(APC)]$ y $A[T(PEA)] = \frac{1}{2}A[T(APC)]$

Entonces, $A[T(PGA)] = A[T(PEA)]$ ya que la mediana de cualquier triángulo divide su área en áreas iguales. De estas igualdades se tiene que:

$$A[T(PKG)] + A[T(PKH)] + A[T(HKA)] = A[T(PKH)] + A[T(HKA)] + A[T(EKA)]$$

De la igualdad se tiene que $A[T(PKG)] = A[T(EKA)]$.

Luego de a) y b) y por transitividad, se tiene que:

$$A[T(PKG)] = A[T(GKC)] = A[T(CKE)] = \\ A[T(EKA)] = A[T(AKH)] = A[T(PKH)]$$

Como

$$A[T(PKG)] + A[T(GKC)] + A[T(CKE)] + A[T(EKA)] + \\ +A[T(AKH)] + A[T(PKH)] = A[T(APC)]$$

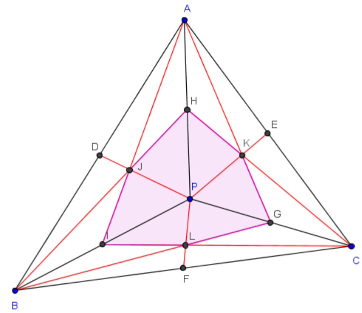
Entonces,

$$A[T(PKG)] = A[T(GKC)] = A[T(CKE)] = A[T(EKA)] = \\ A[T(AKH)] = A[T(PKH)] = \frac{1}{6}A[T(APC)].$$

Por lo tanto, hemos realizado la prueba formal de que **el área de cada uno de los triángulos formados al trazar las medianas en un triángulo, son iguales.**

Así, si se suman las áreas de dos de esos triángulos, tal medida será un tercio del área del triángulo principal. Este resultado es el que se aplica para demostrar la validez de la conjetura establecida en la situación principal.

5. **Resolviendo con argumentación matemática el problema principal.** En la siguiente figura se pueden identificar tres APB, BPC y CPA.



Utilizando la demostración en 4 tenemos que

$$A[T(GPK)] + A[T(KPH)] = \frac{1}{3}A[T(APC)]$$

$$A[T(HPJ)] + A[T(JPI)] = \frac{1}{3}A[T(APB)]$$

$$A[T(IPL)] + A[T(LPG)] = \frac{1}{3}A[T(BPC)].$$

A parte,

$$A[h(GKHJIL)] = A[T(GPK)] + A[T(KPH)] + A[T(HPJ)] +$$

$$A[T(JPI)] + A[T(IPL)] + A[T(LPG)] =$$

$$\frac{1}{3}A[T(APC)] + \frac{1}{3}A[T(APB)] + \frac{1}{3}A[T(BPC)] =$$

$$\frac{1}{3}\big[A[T(APC)] + A[T(APB)] + A[T(BPC)]\big] = \frac{1}{3}A[T(ABC)].$$

Por lo tanto, el área del hexágono es un tercio del área del triángulo ABC.

Conclusiones generales

Muchos de los conceptos de la matemática que son tratados en los distintos niveles educativos solo son definidos, en algunos de los casos tal cual vienen en los textos y generalmente, no son analizadas muchas de las situaciones de aplicación dentro y fuera de la matemática.

Desde la posición de los autores, esta manera de tratar los conceptos no permite la fijación de los mismos y solo se favorece una idea intuitiva de ellos, relegando su esencia y significado, lo que reduce el potencial de saber y poder de dicho concepto. La estrategia propuesta responde a este tipo de necesidades, en específico favorece la asimilación y fijación del concepto de mediana.

El software GeoGebra como recurso heurístico jugó un papel fundamental en los procesos de búsqueda y generalización de las soluciones. Las etapas propuestas en la estrategia, pueden ser utilizadas para la resolución de problemas que involucran otros conceptos de la Geometría y en general, de otras ramas la Matemáticas en sus distintos niveles de complejidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Cuba: Pueblo y Educación.

Cárdenas, M. (2006). Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos. En Dolores, C., Martínez-Sierra, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (Eds.). *Matemática educativa: Algunos aspectos de la socio epistemología y la visualización en el aula* (pp. 207-229). Díaz de Santos.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* 2(3), 11- 44.

Labarrere, A. F. (1988). *Bases psicológicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Locia, E., Mederos, O., Morales, A., Rodríguez, J. M. Sigarreta, J. M. (2013). Metodología para los procedimientos de solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales. Enviado para publicación a Revista Digital Matemáticas, Educación e Internet.

Marmolejo, J. E. y Campos, V. (2012). Pensamiento lógico matemático con scratch en el nivel básico. *Vínculos* 9(1), 87-95.

Morales, A. (2012). Estrategia metodológica para el tratamiento del concepto de límite al infinito. *Memoria del Evento Científico MATECOMPU 2012.* Varadero, Cuba.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problema solving.*New York, USA: Combined edition,

Rodríguez, A. (1991). Un esquema para la solución de problema en Matemáticas. *Boletín SCMC* 13, pp. 10-20.

Schoenfeld, A. H. (1991). *Learning to think mathematically. Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics.* University of California. Caifornia, USA.

Sigarreta, J. M. y Ruesga, P. (2004). Estrategia para la resolución de problemas, utilizando las funciones. *Docencia Universitaria* 5(1-2), 75-95.

Sigarreta, J. M., Locia, E. y Bermudo, S. (2011). Metodología para el tratamiento de los problemas matemáticos. *Premisa* 13(48), 28-40.