ESTUDIO DEL NÚMERO IRRACIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO ESCOLARES: UNA VISIÓN DESDE EL PMA

Juan Carlos Sánchez y Carmen Valdivé
UPEL-IPB, UCLA. Venezuela
jsanchezcolmenarez@gmail.com, carmenv@ucla.edu.ve

RESUMEN

En el presente manuscrito se exponen ideas y reflexiones que emergen de una investigación en Educación Matemática, con la intencionalidad de estudiar desde un punto de vista didáctico y epistemológico la noción de número irracional. Entre las metas propuestas en la investigación, se encuentra el análisis del tratamiento que sugieren el currículo y los libros de texto para la enseñanza del número irracional y determinar su incidencia en los esquemas conceptuales asociados a la noción de este número en estudiantes y profesores de Sistemas Numéricos en la UPEL-IPB. Entre los hallazgos observados se encuentran: (1) los libros de texto de 9no grado no desarrollan de manera minuciosa el número irracional, (2) la definición del número irracional está ausente en los libros de texto del curso Sistemas Numéricos de la UPEL-IPB.

PALABRAS CLAVE: Pensamiento Matemático Avanzado, Libros de Texto, Número Irracional.

CONSIDERACIONES INICIALES: LA CUESTIÓN A INVESTIGAR

Los libros de texto escolares han constituido un importante recurso para la transmisión del conocimiento matemático, como elemento cultural, reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros y que propone a la siguiente generación cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas y no otras (Astudillo y Sierra, 2004).

Precisamente, debido al anclaje que ha tenido este recurso en la rutina de la vida escolar se ha venido creando, de manera comprometida, una cultura que lo ubica como parte natural del ecosistema educativo, alejando de él toda reflexión crítica en tanto que se asume como algo naturalmente dado y por ende bien elaborado. Al respecto Ramírez (2002) indica lo siguiente “el pizarrón, la tiza, el pupitre y el libro de texto son cosas que están allí a la disposición de alumnos y maestros, reduciéndose el problema a la utilización correcta o incorrecta, eficaz o ineficaz de los mismos” (p. 103). Reflexionando un poco en las ideas expuestas hasta ahora, se reconoce en primer lugar, el papel que ocupa el libro de texto en el sistema educativo, en particular el de Matemática, la valoración que le han brindado a este recurso tanto docentes como estudiantes y los aportes significativos que a través de él se han podido alcanzar.

Por otro lado está, la actitud acrítica de quienes utilizan este recurso, con respecto al tratamiento, correcto o incorrecto, que ofrece el libro de texto de Matemática para un determinado concepto, entre ellos el de número irracional.

Fischbein, Jehiam y Cohen (1995, tr. libre) manifiestan que el concepto de número racional, irracional y real no está claramente definida en la mente de los estudiantes. Entre las causas que han provocado esta problemática, según los autores, se encuentra que el concepto de número irracional es presentado en los libros de texto escolares principalmente en conexión con muy pocos ejemplos en los cuales se abordan el número π o las raíces cuadradas de 2 ó 3.

Lo anterior nos lleva a pensar sobre el carácter fundamental que representa el análisis del tratamiento en la presentación de un concepto matemático, en particular el concepto de número irracional en los libros de texto escolares para el didacta, el cual busca alternativas que le permitan mejorar desde su praxis los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Por su parte, Ortiz (1999) citando a Robert y Robinet indica que el estudio de los libros de texto es un medio indirecto de conocer el pensamiento de los profesores sobre un contenido específico, ya que el libro de texto norma el currículo y su influencia en la enseñanza está reconocida.

Considerando los planteamientos expuestos, se presenta en este manuscrito un estudio, que forma parte de una investigación en Educación Matemática cuyo propósito es estudiar la conceptualización de número irracional en la historia (los esquemas conceptuales epistemológicos de la noción de número irracional), en los libro de texto escolares, y los esquemas conceptuales asociados a la noción en los estudiante para profesores de matemática y en profesores de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto (UPEL-IPB), mismos que han cursado la asignatura e impartido los cursos de Sistemas Numéricos, respectivamente.

El estudio que se presenta, tiene como propósito fundamental analizar los elementos didácticos que sobre el número irracional aportan los libros de texto escolares. Los hallazgos encontrados, proporcionan insumos significativos para el didacta, permitiendo diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados al número irracional expuesto por los autores del recurso, categorías que pueden ser asumidas por sus lectores y que nos permiten aproximar a los esquemas conceptuales asociados al número irracional en los estudiante para profesores de matemática y en profesores de la UPEL-IPB-Venezuela (Valdivé y Garbin, 2008, 2010, 2013), herramienta que forma parte de la teoría cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

TEÓRICA COGNITIVA PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO (PMA)

El estudio que se presenta se enmarca en el llamado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), la cual es una teoría cognitiva que ha sido desarrollada según Valdivé y Garbin (2008) por Tall y Dreyfus.
Tall (1991, tr. libre) afirma que la teoría cognitiva del PMA es una teoría psicológica cognitiva que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático, así como también, los procesos cognitivos que emplea el estudiante para el aprendizaje de algún conocimiento matemático.

Por su parte Valdivé (2008, p. 15), sostiene que el objetivo principal de esta teoría se enfoca hacia la descripción de la naturaleza del conocimiento matemático de los estudiantes a la hora de estudiar un concepto matemático y de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de esos conceptos, intentando aclarar lo que ocurre en la mente de un individuo. Dentro de esta teoría nos interesa en particular, los esquemas conceptuales como herramienta teórica de investigación.

Entre los constructo estudiados en el PMA, se encuentran los esquemas conceptuales, el cual emerge desde interés de investigadores en las últimas tres décadas en relación a la adquisición, representación, uso y comprensión de ciertos conceptos, focalizando su atención sobre las imágenes mentales que los estudiantes evocan de un determinado concepto y que entran en conflicto con las definiciones aceptadas por los matemáticos (Valdivé y Garbin, 2013).

Según las intencionalidades del estudio, nos interesa en particular, los esquemas conceptuales. En este artículo se expone el análisis desarrollado en libros de texto escolares, los cuales nos proporcionan información relevante para el estudio de este constructo (esquema conceptual) en los estudiantes y profesores de matemática de una universidad.

ESQUEMAS CONCEPTUALES

El esquema conceptual es definido según el PMA, como "una estructura cognitiva total que está asociada con el concepto, el cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades asociadas y los procesos" (Tall y Vinner, 1981, p. 152). Es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser “una representación visual del concepto, en caso de que el concepto tenga alguna representación visual, también puede ser una colección de impresiones o experiencias” (Vinner, 1991, p. 67). Asimismo, la parte del esquema conceptual que es activado en un contexto particular, es llamado esquema conceptual evocado. Varias veces, aparentemente las imágenes contrarias pueden ser evocadas (Valdivé y Garbin, 2008).

Actualmente se hace una distinción entre el esquema conceptual previo (Met-before) (Chin y Tall, 2001; Tall, 2004; Tall, 2005) y un esquema conceptual. El met-before está asociado a los conocimientos o experiencia previa que es evocada para darle sentido a una situación (Chin y Tall, citados por Valdivé, 2008).

En el presente artículo asumimos la caracterización de los esquemas conceptuales epistemológicos en su acepción cognitiva y epistemológica propuesta por Valdivé y Garbin (2008, 2010, 2013), la cual contempla: (1) Las ideas que asocia el sujeto al concepto; (2) Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea; (3) Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva; (4) Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático; (5) El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico, no técnico) que el sujeto asocia ante la situación y (6) Los ejemplos y contraejemplos que el sujeto implementa para explicitar sus ideas.

Respecto al esquema conceptual en su acepción epistemológica Valdivé (2008) considera que el esquema conceptual en su carácter epistemológico, puede referirse a "la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto" (p. 419).

Ahora bien, como nuestro estudio pretende recoger todos la información posible que nos permitan aproximarnos a los esquemas conceptuales en estudiantes y profesores del curso Sistemas Numéricos de la UPEL-IPB asociados al concepto de número irracional, consideramos relevante para el estudio determinar qué sugieren los libros de texto escolares para la enseñanza de este objeto matemático. A continuación se presenta ideas y reflexiones en torno a la naturaleza de ese conocimiento en los libros de textos escolares.

NATURALEZA DE LOS LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES

Según Danisova (citado por Ceballos y Blanco, 2008) al responder la interrogante ¿qué entendemos por libro de texto? expresa que se trata de una publicación para ayudar al profesor con un contenido metódicamente adaptado y limitado por el currículum nacional; un recurso fundamentalmente didáctico que ayuda a desarrollar un proceso educacional; una producción que integra fuentes de información en el largo plazo accesibles para todos los alumnos y profesores; y un instrumento que colabora a implementar el control y la evaluación del proceso de aprendizaje del alumno.

Por su parte Ramírez (2002) sostiene las definiciones sobre los libros de texto escolares dadas por la Biblioteca de Francia en 1968 y por la UNESCO, a través de su anuario estadístico en 1969. La primera define a los libros escolares como todos aquellos libros creados con el propósito de ayudar a enseñar, mientras que la segunda los define como todos los libros recomendados para los alumnos que reciben educación en los niveles primario y secundario.

Ceballos y Blanco (2008) establecen que el libro de texto es el principal recurso de instrucción. Incluso, según los autores, se atribuye importancia a los textos como un elemento clave para hacer viables los procesos de innovación educativa. Explican que la dependencia del uso de libros de texto es aplicable a la mayoría de los profesores tanto en la educación primaria como secundaria, ella es tan fuerte que se podría decir que el docente "se aferra al libro".

Hay que destacar, además, que el papel de los libros de texto es doble e irreducible uno a otro. Otte (citado por González ,2011) indica que poseen una función comunicativa y de interpretación que les dotará de un carácter subjetivo tanto desde el punto de vista del autor como del lector, y además se presenta como una estructura materializada del conocimiento dotándoles de carácter eminentemente objetivo. Esta doble faceta de los libros de texto, hace que su estudio aporte gran información tanto acerca de las concepciones, en relación con el contenido matemático que desarrollan, como acerca del proceso educativo en el que están inmersos.

Las ideas expuestas en el párrafo anterior dejan en evidencia que es posible acercarnos a las creencias, ideas, representaciones que evocan los lectores de este recurso didáctico (libros de texto) respecto a un contenido matemático, categorías que nos permiten aproximarnos a los esquemas conceptuales, según lo expuesto en el apartado anterior.

En las líneas que siguen, se exponen algunos hallazgos en relación a la definición de número irracional en la historia, insumos que nos permitieron aproximarnos a los esquemas conceptuales en sus acepción epistemológica (Sánchez y Valdivé, 2012).

DEFINICIONES FORMALES DEL CONCEPTO DE NÚMERO IRRACIONAL EN LA HISTORIA

La aproximación a la evolución histórica del concepto de número irracional se presenta exponiendo los aportes de matemáticos y civilizaciones antiguas que impulsaron el estudio de este concepto que permite, entre otras cosas, el reflejo de "la manera de pensar de la sociedad científica de la cultura en la que nos detengamos" (Crespo, 2006, p. 28). Hemos llegado a la siguiente clasificación: Edad Antigua, Edad Media, Renacimiento, Edad Moderna y Contemporánea. Esta aproximación se muestra con mayor detalle en Sánchez y Valdivé (2012), en este manuscrito sólo se exhibe una matriz que describe los cuatro períodos considerados provistos por la reconstrucción historia, acompañados de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados por períodos (para al esquema conceptual epistemológico usaremos las iniciales ECEn, la "n" indica el número del esquema conceptual epistemológico).

TABLA N° 1: Matriz Evolución Histórica del Concepto de Número Irracional y los Esquemas Conceptuales Epistemológicos

PERÍODO HISTÓRICO: Edad Antigua *Origen de los inconmensurables.* **ECE:** El irracional asociado a una aproximación entre razones. **ECME$_1$**
Razón Geométrica *El área de un campo circular de 9 unidades de diámetro es la misma que el área de un cuadrado de lado 8 unidades.(Cultura Egipcia)* *El área de un círculo se calculó tomando los tres cuartos del cuadrado construido sobre el diámetro(Cultura China)* *La razón de la diagonal al lado de un pentágono regular no es racional Origen de los segmentos inconmensurable Hipaso de Metaponto(Cultura Griega)* *La razón de una circunferencia y su diámetro, se obtuvo mediante el cálculo de perímetros de polígonos inscritos en una misma circunferencia. (Arquímedes)* ***Razón Numérica*** *Un cuadrado con sus diagonales, cuyo valor del lado es 30 y aparecen los números 42:25,35 y 1;24,51,10 a lo largo de la diagonal que se expresa por $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$ en fracción sexagesimal , números que evidencian la razón del lado y su diagonal (Cultura Mesopotámica)*
PERÍODO HISTÓRICO: Edad Media *Hacia el reconocimiento del irracional como número.* **ECE:** El irracional asociado a lo aritmético. **ECME$_2$**
Valores de π *Aproximación de* $\pi = 3{,}14159265358979$ *(Al-Kashi)* *Valor de π práctico (3) y el valor exacto $\sqrt{10}$ (Brahmagupta.)* ***Como un uso práctico*** *Uso de los números enteros, racionales, además de los irracionales, introduciendo reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir con esos números (Cultura Hindú)* ***Asociado al estudio de la teoría de proporcionalidad*** *Reemplazo de la teoría de proporciones geométrica de Euclides, por un planteamiento numérico.Acercamiento al concepto del número irracional (Omar Khayyam).* *Generalización de la teoría de proporciones presentada por Bradwardine incluyendo reglas para potencias y una notación especial para las potencias de exponentes fraccionarios.Inicio del estudio de potencias irracionales pero por falta de una terminología y una notación adecuada impidió su desarrollo (Nicole Oresme)* ***Aproximaciones de una raíz irracional de una ecuación algebraica.*** *Mediante el estudio de la ecuación cúbica* $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ *Se obtiene la aproximación más precisa de una raíz irracional de una ecuación algebraica mediante el uso de fracciones sexagesimal (Leonardo de Pisa)*
PERÍODO HISTÓRICO: Renacimiento*Reconocimiento del irracional como número mediante aproximaciones a un número racional cercano.* **ECE:** El irracional asociado a una aproximación de un número racional cercano. **ECME$_3$**
Como medición *Todo lo que se puede medir se logra representar por un segmento (Nicole Oresme)* *El conocimiento debería basarse en la medida, la cual puede reflejar un número racional o una aproximación de un número racional (Nicolás de Cusa)* ***Como cálculode la raíz de una ecuación*** *Se consideraba una nueva clase de número (el número irracional), que Cardano llamó numerificti, El número irracional ya era utilizado con frecuencia (a pesar de no estar fundamentados rigurosamente) mediante aproximaciones a números racionales (Jerónimo Cardano)*

PERÍODO HISTÓRICO: Edad Moderna y Contemporánea *El irracional como un número.* **ECE:** El irracional asociado a un número. **ECE$_1$**
Como el límite de una sucesión regular   *Una sucesión convergente determina, o bien un número racional como límite, o un número ficticio como su límite ficticio, estos números ficticios pueden ordenarse y son los que conocemos como número irracional (Méray 1835 d.C)*   *Los números irracionales se definen de una manera aún más general como conjuntos de racionales, más bien que como meras sucesiones ordenadas de racionales (Weierstrass 1815 d.C)*   *Sean A el conjunto de números racionales y B el conjunto de los límites de una sucesión fundamental de racionales. Así como el sistema A ha dado lugar al sistema B los dos sistemas A y B generan un nuevo sistema C, Mientras que los sistemas A y B son tales que se puede igualar cada uno de los **a** con un **b** pero no todo **b** a un **a**, se puede por el contrario, igualar no solamente cada uno de los **b** con un **c** sino también cada uno de los **c** a un **b**. (Cantor 1845 d.C).*   ***Como el ínfimo o supremo de un conjunto ordenado***   *Cualquier partición de los números racionales en dos clases disjuntas A y B tales que todo número de la primera clase A sea menor que todo número de la segunda clase B existe uno y sólo un número real que produce esta cortadura. Si en A hay un número máximo o en B un mínimo entonces la cortadura define un número racional. Si en A no hay máximo ni en B un mínimo entonces la cortadura define un número irracional (Dedekind 1831 d.C)*

Fuente: Elaboración propia

El resumen presentado respecto la evolución histórica del número irracional, deja ver ideas, creencias, representaciones, conceptos asociados, situaciones que motivaron a matemáticos en el estudio de los números irracionales, el contexto, los que nos permitió aproximarnos a los esquemas conceptuales epistemológicos. En el análisis de los libros de texto intentamos determinar si estas categorías se mostraban, quizás de manera implícita, en estos recursos, reconociendo desde el análisis histórico presentado que el número irracional se acepta y se define formalmente en el siglo XIX principalmente a través de las contribuciones de Dedekind (1831 - 1916) quien define primeramente la construcción de un sistema numérico completo (conjunto de los números reales) a través del concepto de cortadura. Esto permite a Dedekind definir formalmente al número irracional cómo el ínfimo o supremo no racional de una cortadura. Por otra parte, Georg Cantor (1845-1918) presenta una construcción de los números reales mediante el estudio de sucesiones regulares, lo cual permite definir el número irracional, como el límite no racional de una sucesión racional regular (Boyer, 2003; Edwards, 1979; Berge y Sessa, 2003; Sánchez y Valdivé, 2012).

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

El estudio está enmarcado desde la perspectiva metodológica de tipo cualitativo que según Piñero y Rivera (2013) intenta, ente otras cosas, *sustituir las nociones científicas de explicación, predicción y control del paradigma positivista por las nociones de comprensión, significado y acción* (p. 31). Es de carácter descriptivo y documental, porque permite detallar el tratamiento didáctico que ofrecen los libres de texto escolares en los subsistemas de educación secundaria y universitario sobre los números irracionales (Manual de Trabajos de Grado de especialización y maestría y tesis doctorales UPEL, 2006).

Los versionantes del estudio están conformados por libros de texto los cuales han llegado a ser considerados como instrumentos cuasi-observables que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador en situaciones inaccesibles (Woods, citado por Valdivé, 2008). Para el estudio se utilizan las siguientes fuentes: Júpiter (1998); Suárez y Durán (2005); Brett y Suárez (2003) y Programa (1989) (para el subsistema de Educación Secundaria); De Montes De Oca (1996) y Bravo (1971) (para el subsistema de Educación Universitaria).

El método acorde es el inductivo, ya que se inició con una recolección, lectura y análisis de información desde diferentes fuentes bibliográficas, para generar de ellos tal como lo propone Valdivé (2008, p. 70) una teoría que describa, entre otras cosas, cómo está enfocado el concepto de número irracional en los libros de textos de 9no grado de la Tercera Etapa de Educación Básica y las guías didácticas y Libros de texto usados por los docentes en el curso Sistemas Numéricos. La metodología de recolección y análisis de la información se desarrolla a través de cuatro actividades, acordes con el método inductivo, siguiendo lo propuesto por Rodríguez, Gil y García (1999) y en concordancia a la metodología propuesta por Valdivé y Garbin (2008), siendo ellas: (1) Fragmentación de la información; (2) Identificación y clasificación de las unidades de análisis; (3) Disposición y Organización de la Información y (4) Descripción estructurada: Los Hallazgos.

Categorías consideradas en el Estudio: Para las actividades de análisis de los textos se toma en cuantas las categorías propuestas por Fernández y Valdivé (2007); Escobar y Valdivé (2007) y Valdivé y Garbin (2008), siendo estas: ***Presentación****:* se refiere a la forma en que se inicia, puede ser a manera de introducción o motivación, ***Situaciones que se Presentan***: Incluye todos los tipos de contextos en que aparecen los *problemas, los ejemplos y contraejemplos del concepto*, ***Definiciones y Argumentos dados****:* Son las definiciones que aparecen, por medio de descripciones, propiedades o atributos del concepto. Los argumentos incluyen las formas que se usan para validar y explicar las proposiciones o propiedades, ***Tipos de Representaciones del Concepto***: Se refiere a todos los tipos de representaciones matemáticas del concepto pueden ser: algebraicas, analíticas, geométricas y gráficas, ***Método o Procedimientos****:* Aquí se encuentran las estrategias didácticas de enseñanza y los procedimientos utilizados para dar a conocer el concepto y ***Contexto****:* se refiere al modo de abordaje de la noción por los actores (libros, alumnos, etc), puede ser aritmético, geométrico, algebraico y analítico.

CONSIDERACIONES FINALES

HALLAZGOS

Se presenta a continuación el análisis de algunos de los libros de texto escolares de Matemática de 9no grado de Educación Básica, los cuales se organizan mediante matrices y se consideran los criterios temáticos y/o categorías expuestos en el apartado anterior.

Iniciamos el análisis estudiando tres de los libros de textos de matemática de 9no grado, más usados en Educación Básica y del Programa de Estudio y Manual del Docente de 9no grado de la Tercera Etapa de Educación. Posteriormente, se estudian el texto guía del curso Sistemas Numéricos y el libro de texto Sistemas Numéricos de Bravos Flores Raúl.

TABLA N° 2: Análisis de los Libros de Texto

	Júpiter (1998)	**Suárez y Durán (2005)**	**Brett y Suárez (2003)**
Presentación	Hace referencia al estudio de expresiones decimales y fracción generatriz	Presentan el cálculo de la longitud de la hipotenusa de un isorrectángulo.	Inician exponiendo un breve recordatorio de los conjuntos: N, Z, Q.
Situaciones	Ejemplos variados de los que es o no un número irracional	Ejemplos donde se aplica el teorema de Pitágoras	Propone actividades para reforzar la relación de pertenencia en N, Z, Q.
Definición	Un decimal no periódico que no tiene fracción generatriz	Un número decimal no periódico	Expresiones decimales ilimitadas no periódicas
Representaciones	Gráficos de: cuadrado, triángulo rectángulo	Gráficos de: Cuadrado, triángulo rectángulo.	Diagramas de Venn, segmentos de rectas.
Procedimientos	Comparación de magnitudes (longitudes)	Comparación de magnitudes (longitudes)	Calculo de radicales, comparación entre segmentos.
Contexto	Geométrico y aritmético	Geométrico y aritmético	Aritmético, algebraico y geométrico

Fuente: Sánchez y Valdivé (2010)

Del análisis realizado a los libros de texto (TABLA 1), se presentan los siguientes hallazgos:
Jupiter (1998). *Matemática de 9no de Educación Básica*: inicia el estudio relacionando los números racionales con expresiones decimales que pueden ser transformadas a un número de la forma $\frac{a}{b}$, lo cual se le conoce como su fracción generatriz, es conexión a esto, define que aquellos *números decimales no periódicos que no tienen fracción generatriz, se les conoce con el nombre de números irracionales*. Esta definición no aclara que cualquier expresión decimal no periódica no posee fracción generatriz, más aún esta definición no se corresponde a las definiciones de número irracional que aparece en la historia de la matemática. Es importante destacar, que durante el desarrollo del estudio del concepto de número irracional en el texto, en ningún momento hacen referencia a la historia de la matemática, donde se enuncie qué problemas propician el descubrimiento del número irracional, qué propiedades cumple bajo las operaciones adición y multiplicación, entre otros.

Suárez y Durán (2005). *Matemática de 9no grado de Educación Básica*: aun cuando inician el estudio de los números irracionales haciendo referencia a algunas costumbres de la cultura egipcia para medir objetos mediante el uso de nudos igualmente espaciado en una cuerda y cómo posteriormente esto permitió que Pitágoras determinara que ciertos números (3, 4 y 5) cumplen que $3^2 + 4^2 = 5^2$ es decir, $9 + 16 = 25$ definen al número irracional como una expresión decimal infinita no periódica, la cual no se corresponde con ninguna de las definiciones que durante la historia de la matemática han expuesto para el número irracional. Es de hacer notar que en el texto no aparece que propiedades cumplen o no, bajo las operaciones adición y multiplicación.

Brett y Suárez (2003). *Matemática de 9no grado de Educación Básica*: los actores inician describiendo los conjuntos *N, Z, Q e I* y en función de ello exponen algunas actividades relacionadas con la pertenecía o no de un elemento, en alguno de estos conjuntos.

En el caso del número irracional lo define como una expresión decimal infinita no periódica, que no se corresponde con las definiciones registradas en la historia sobre este objeto matemático y que permite formalizarlo. El texto define la adición y multiplicación en el conjunto de los números irracionales y presenta el estudio de los resultados que se obtienen al adicionar o multiplicar un número racional con un número irracional o entre dos números irracionales.

TABLA N° 3: Análisis de los Libros de Texto

	Programa (1989)	**De Montes De Oca (1996)**	**Bravo (1971)**
Presentación	Presentan el estudio de las expresiones decimales, fracción generatriz	Expone el propósito del material didáctico	Insuficiencia de los racionales para resolver ecuaciones ($x^2 = 2$)
Situaciones	Muestra actividades con el fin de hallarla longitud del lado de un cuadrado de área: 2, 3, 5,7,..	Construcción de los números reales por el estudio de sucesiones de Cauchy	Construcción de los números reales por el estudio de cortadura y sucesiones de Cauchy
Definición	Expresiones decimales no periódicas.	No aparece	No aparece
Representaciones	Triángulos rectángulos, cuadrados, radicales	No aparece	No aparece
Procedimientos	Calculo de áreas, cálculo de radicales	No aparece	No aparece
Historia	No aparece	Los Números Racionales no son suficientes para medir longitudes.	No aparece
Contexto	Geométrico y aritmético	Analítico	Analítico

Fuente: Sánchez y Valdivé (2010)

Del análisis realizado a los libros de texto (TABLA 2), se presentan los siguientes hallazgos: *Programa de Estudio y Manual del Docente de 9no grado de la Tercera Etapa de Educación Básica* (1989): el programa propone el estudio del número irracional, comenzando con el reconocimiento de la existencia de expresiones decimales que se pueden transformar en su fracción generatriz y discutir mediante ejemplos prácticos como obtener el valor de π , así como también, la longitud de los lados de un cuadrado de área 2, 3, 5, 7, 10, afirmando que esos resultados reflejan expresiones decimales no periódicas.

Posteriormente, propone que se defina al número irracional como una expresión decimal no periódica. Lo cual no se corresponde con la definición que desde la historia de la matemática se le atribuye al número irracional. Finaliza recomendando la representación de un número irracional sobre la recta numérica, más no el estudio de algunas operaciones (adición y multiplicación) con irracionales y qué propiedades cumplen los irracionales mediante estas operaciones.

En ningún momento propone un recorrido histórico del número irracional que permita tanto el docente como el estudiante construir una definición.

De Montes De Oca (1996). *Construcción de los Números Reales,* durante todo el desarrollo que exponen la autora para construir los números reales, en ningún momento define los irracionales, sólo menciona la insuficiencia que tenían desde la historia los racionales para medir algunos segmentos, siendo este el único comentario que hace referencia a la historia de la Matemática en relación al número irracional.

Bravo (1971). *Fundamentos de los Sistemas Numéricos,* el autor no menciona en ningún momento la definición formal de número irracional, a pesar que en el texto aparecen las construcciones del conjunto de los números reales por las dos vías que históricamente están relacionada con este objeto matemático, bien sea por cortadura, o como clases de equivalencias que se obtiene en una relación definida sobre el conjunto de todos las sucesiones racionales de Cauchy. Tampoco se observa alguna nota histórica que refleje los matemáticos que propician estas construcciones, el motivo que los lleva a estas construcciones, entre otros.

REFLEXIONES **F**INALES

Luego de realizar las matrices y caracterizar el contenido expuesto en los libros de textos estudiados se pudo observar que los libros de 9no grado de Educación Básica no desarrollan de manera minuciosa el concepto de número irracional, los cuales por lo general sólo hacen referencia a la definición ingenua de este concepto matemático "*una expresión decimal no periódica*", "*Un decimal no periódico que no tiene fracción generatriz"* y la representación de alguno de estas idealizaciones matemáticas en la recta numérica, entre ellos $\sqrt{2};\sqrt{5}$. La mayoría de los textos analizados, no definen operaciones básicas (adición y multiplicación) entre irracionales y los efectos que producen estas operaciones en sus resultados, como podrían ser, el no cumplimiento de la cerradura de las operaciones adición y multiplicación en el conjunto I, la propiedad de densidad en I. Evidencias que podrían incidir en las ideas, creencias, modos de representación que poseen los lectores, en nuestro caso, en estudiantes para profesores de matemática y en profesores de la UPEL-IPB asociados al número irracional.

Asimismo, en los libros de textos de 9no grado de Educación Básica analizados se observó que solo uno de ellos hace referencia a alguno de los tantos problemas que dio origen al número irracional, mostrando el poco uso que le dan a la historia de la matemática a la hora del diseño de los mismos. Por otra parte, el análisis de los libros de textos del curso de Sistemas Numéricos refleja la ausencia de la definición de número irracional y por ende la historia que refleja su evolución: rupturas, avances y retrocesos (Berge y Sessa 2003; Crespo, 2006; Sánchez y Valdivé 2012); obviando así, la importancia que tiene esta definición para los sistemas numéricos. El acercamiento de cómo surgió y evolucionó la noción en la historia (Sánchez y Valdivé, 2012) podría dar luces de cómo introducirla en el discurso escolar y por ende en los libros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astudillo, M. y Sierra, M. (2004) Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Críticos en la Enseñanza Secundaria en España Durante el Siglo XX. *Revista Enseñanza de las Ciencias* 22(3), 389–408.

Berge, C. y Sessa, C. (2003). Completitud y Continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 163-197.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática*. Madrid: Editorial Alianza.

Brett, E. y Suárez W. (2003). *Actividades de Matemática de 9no Grado de Educación Básica*. Caracas: Editorial Johneve C.A.

Bravo, R. (1971). *Fundamentos de los Sistemas Numéricos*. México: Editorial Interamericana.

Ceballos, J. y Blanco, L. (2008). Análisis de los Problemas de los Libros de Texto de Matemáticas para Alumnos de 12 a 14 Años de Edad de España y de Chile en Relación con los Contenidos de Proporcionalidad. *Revista Publicaciones* (38), 63-88.

Chin, E. y Tall, D. (2001) Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. In Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (4), 241-248.

Crespo, C. (2006). Un Paseo por el Paraíso de Cantor: Problemas y Reflexiones Acerca del Infinito. En G. Martínez Sierra (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 22-27. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Montes de Oca, A. (1996). Construcción de los Números Reales. Trabajo de Ascenso Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto. Barquisimeto – Venezuela.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Escobar, H. y Valdivé, C. (2007). *Estudio y Comprensión de los Polinomios desde una perspectiva del Pensamiento Matemático Elemental*. Tesis de maestría no publicada, UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Fernández, N. y Valdivé, C. (2007). *Una Aproximación a los Esquemas Conceptuales Asociados al Concepto de Polinomio*. Tesis de maestría no publicada, UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Fischbein, Jehiam y Cohen (1995). The concepto of irracional numbers in high – school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics* 29 (29 - 44).

González, M.T. (2011) *El análisis matemático en los libros de texto de España*. I Congresso Ibero-americano de história da educação matemática. Universidade da Beira Interior, Covilha (Portugal).

Júpiter, Y. (1998). *Matemática de 9º grado de Educación Básica*. Caracas: Editorial CO-BO.

Ministerio de Educación. (1989). *Programa de Matemática de Educación Básica, Media y Diversificada*. Caracas – Venezuela.

Ortiz, J. (1999). *Significados de concepto probabilísticos en los textos de Bachillerato*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Piñero, M. y Rivera, M. (2013). *Investigación Cualitativa: Orientaciones Procedimentales*. Barquisimeto: FONDEIN UPEL.

Ramírez, T. (2002). El Texto Escolar como Objeto de Reflexión e Investigación. Docencia Universitaria, Vol III, Nº 1 SADPRO – UCV. Caracas – Venezuela.

Suárez, E. y Duran, D. (2005). *Matemática de 9º grado de Educación Básica.* Caracas: Santillana.

Sánchez, J. y Valdivé, C. (2010). *Estudio Didáctico y Epistemológico de la Noción de Número Irracional*. Tesis de maestría no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto

Sánchez, J. y Valdivé, C. (2012) El Número Irracional: Una Visión Histórica- Didáctica. *Revista Premisa* 14 (52), 3-17.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* (12), 151-169.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of tangente. *Proceedings of PME* 11 (3), 69-75.

Tall, D. (1989). Concept image, computers, and curriculum change. *For Learning of Mathematics* 9(3), 37-42.

Tall, D. (1991).The nature of advanced mathematical thinking. In David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21.

Tall, D. (2005). The transition form embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1-16.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1-16.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2006). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Caracas – Venezuela.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Relime* 11(3), 413-450

Valdivé C. (2008). *Estudio de los Esquemas Conceptuales Asociados a la Noción de Infinitesimal y su Evolución en Estudiantes de Análisis Matemático*. Tesis de doctorado no publicada. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2010). Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: Caso de un estudiante clave. *Educare, Revista de Investigación y Postgrado de la UPEL* 14(3), 3-31.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2013). ¿Cómo Piensan los Estudiantes el Infinitesimal antes de Iniciar un Curso de Análisis Matemático?.*Paradigma* XXXIV(1); 117 – 144.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* 65-80.