APORTES DE LA HISTORIA PARA EL DESARROLLO DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA TANGENTE VARIACIONAL

Luis Arturo Serna Martínez - Apolo Castañeda - Gisela Montiel
CICATA-IPN, México.
luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx - acastane@ipn.mx - gisela.montiel@gmail.com

RESUMEN

Diversos estudios han documentado que, en la enseñanza del cálculo se ha sobrevalorado la algoritmización; los estudiantes presentan dificultades cuando tienen que interpretar estados, visualizar, graficar. Esto nos condujo a cuestionar la actual estructura de la matemática escolar y analizar su epistemología. Nuestra aproximación histórica ha permitido reconocer el origen del conocimiento identificando conceptos relevantes en la significación de los conceptos escolares, como la tangente variacional. Esta investigación muestra los resultados de un estudio histórico y explica la forma de integrar esos saberes al desarrollo de secuencias didácticas para la enseñanza del cálculo.

ANTECEDENTES DE LA PROBLEMÁTICA DEL ESTUDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Se ha reportado en varias investigaciones (Biza y Zachariades, 2010; Cantoral, 2000; Castañeda, 2004; Dolores, 2007; González, 1999; Valero, 2000; Muñoz, 2000) que el estudio de la derivada se ha visto favorecido por un tratamiento algorítmico, fomentado una técnica, que si bien es necesaria, no es suficiente para enfrentarse exitosamente a situaciones matemáticas.

Al igual, otros investigadores como Dreyfus (1990) han documentado esta situación, explicando que en general los estudiantes que llegan al nivel universitario teniendo un buen dominio algebraico; los estudiantes aprenden a derivar, ya sea utilizando el método de los cuatro pasos o haciendo uso de las reglas de derivación, saben manipular expresiones algebraicas haciendo uso de las reglas del álgebra llevando a cabo desarrollos para transformarlas, sin embargo no tienen incorporadas habilidades tales como las aproximaciones numéricas, interpretación de estados, visualización y graficación de funciones.

Se ha reportado en (Dolores, 2007; González, 1999; Kendal y Stacey, 2003) que cuando los estudiantes se enfrentan a problemas en donde se debe de utilizar la derivada no identifican el uso de la misma puesto que no han construido las ideas claves de la derivada. Al respecto Artigue, (1995) señala se puede enseñar a los estudiantes una aproximación mecánica, algunos cálculos de la derivada, pero usualmente se enfrentan a serias dificultades cuando se les cuestiona sobre conceptos y métodos.

Reportan además que la enseñanza tiende a centrarse a una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, evaluándose aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto a su vez es considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa.

En este modelo de enseñanza el profesor se limita a exponer sus temas, explicar conceptos y resolver problemas para que el estudiante haga ejercicios similares (Santi, 2011).Los estudiantes deben “poner mucha atención”, concentrarse para poder repetir lo mismo, resolviendo ejercicios similares a los presentados por el profesor. Bajo este esquema el alumno se encuentra pasivo ante el conocimiento sin cuestionar o interpretar su estructura.

Los estudiantes que se habitúan a este modelo de aprendizaje llegan a presentar resistencia cuando se pretende modificar la dinámica de la clase, de acuerdo a Parra (2005) en un cuestionario aplicado a dos grupos de alumnos (de una escuela venezolana), de educación básica (séptimo a noveno grado) en clase de matemáticas, los resultados mostraron que el 88.9% y el 71.4% de los estudiantes prefieren que la secuencia de la clase sea teoría-ejemplo-ejercicios. En este reporte también se evidencia que los alumnos no son proclives a la resolución de problemas en donde tengan que utilizar sus habilidades para la resolución de los mismos.

La secuencia teoría-ejemplo-ejercicios resulta cómoda para los estudiantes porque no hay mucho margen para reflexionar o cuestionar, dado que únicamente se requiere repetir y reafirmar procedimientos. Este modelo impacta la manera en que los estudiantes se involucran con los saberes matemáticos, citemos por ejemplo el caso de la interpretación geométrica de la derivada, en ella se emplea el modelo tradicional del límite como una familia de rectas secantes que giran alrededor de un punto que deviene en la recta tangente. Esta forma de abordar la interpretación geométrica de la derivada ha sido reportado por varios estudios como generador de grandes dificultades entre los estudiantes (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Biza y Zachariades, 2010; Cantoral, 2000; Dolores 2007; Serna, 2007, 2008; Serna, Castañeda y Montiel, 2009, 2011, 2012). Además, este tema es tratado superficialmente en los libros de texto ya que en etapas mas avanzadas del curso no se vuelve a retomar ni se reflexiona sobre ello (Kajander y Lovric, 2009).

ANÁLISIS HISTÓRICO

Para conocer más la naturaleza variacional de la tangente y su relación con los conceptos del cálculo nos acercamos a la historia para realizar una investigación sobre su origen. Nuestro estudio se propone estudiar las ideas, argumentos, definiciones del pasado reconociendo el contexto donde se desarrollaron (Salinas y Alanís, 2009; Cantoral, 2001) con el fin de utilizarlos en la didáctica actual (Serna, 2007, 2008, 2010) ya que consideramos que el procedimiento matemático de ese entonces ofrece un tratamiento menos abstracto y se emplean formas de tratar la matemática menos rigurosas, lo cual ofrece la oportunidad de desarrollar un diseño didáctico donde tengan cabida las ideas intuitivas y se puedan promover exploraciones informales las cuales evolucionarán hacia estructuras más formales.

Nuestra investigación histórica se ubica en los siglos XVI, XVII y XVIII particularmente en lo que respecta al estudio de problemas geométricos, algunos de ellos inspirados por los fenómenos de la naturaleza sobre la variación y el cambio. Dolores (2007, p. 17), señala:

> … en gran parte se debieron a que los matemáticos pensaron intuitivamente, a que usaron frecuentemente los argumentos físicos. … los esquemas geométricos y las generalizaciones a las que llegaron fueron apoyados en casos particulares conocidos que les permitieron llegar a conclusiones correctas. … durante los siglos en que se edificó el cálculo no había aún un desarrollo lógico que hiciera consistente sus fundamentos, aparentemente la intuición de los matemáticos de esa época fue más poderosa que su lógica.

La revisión nos proporcionará elementos que se encontraron presentes en el desarrollo del cálculo diferencial en lo general, pero también de manera particular en la solución al problema de las tangentes, sobre todo aquellas que usaron argumentos de cambio y variación, todo esto para implementarlos intencionalmente en un planteamiento didáctico para la escuela contemporánea.

EL USO DE LA HISTORIA

La historia nos permite reconocer otras facetas del conocimiento que puedan ser consideradas para el aprendizaje de dichos conceptos y que, de hecho, formen parte de su propia naturaleza y razón de ser. Existen significados asociados a los objetos matemáticos que no se encuentran presentes en los sistemas escolares, esto se debe a que cuando los objetos matemáticos son introducidos a la escuela se manifiesta una transposición que hace que el conocimiento pierda sus significados de origen, por ejemplo, como señala Dolores (2007), la forma en cómo es tratada la derivada en el actual discurso escolar oculta sus significaciones iniciales, particularmente nos referimos a la variación y el cambio.

Los conceptos en el discurso escolar no reflejan el punto de arranque de cómo estos se construyeron y, en ese sentido, la historia sirve como marco para reconocer en ellos significaciones distintas. También, el uso de la historia nos permite reconocer la *historicidad* de un concepto, es decir, reconocer el conocimiento como algo dinámico, cambiante, y que su construcción depende de múltiples factores que se encuentran en la comunidad donde nace el conocimiento (Zemelman, 2011).

Hacer un estudio en distintas etapas de la historia y la forma como tratamos con el conocimiento nos permite identificar ideas germinales, desarrollos científicos y tecnológicos, procesos de transmisión de conocimiento en algunas obras de difusión, y procesos de formalización.

REVISIÓN HISTÓRICA-EPISTEMOLÓGICA DE LA RECTA TANGENTE

El trabajo de Castañeda (2004) presenta una amplia descripción de la definición de "diferencia" en la obra de L´Hospital. Esta revisión muestra que el concepto de diferencia se fundamenta en la idea de comparación de estados próximos, por ejemplo, la comparación de dos ordenadas que se encuentran infinitamente cercana una de otra permite cuantificar las variaciones o cambios que presenta el fenómeno.

El análisis realizado por Castañeda (2004) a las obras de L´Hospital y Agnesi muestra que las diferencias posibilitan la definición de la recta tangente al construirse triángulos infinitamente pequeños conformados por tres magnitudes; el valor del incremento de abscisa, la diferencia de la ordenada y la hipotenusa, esta última al prolongarla se convierte en tangente. De acuerdo al modelo de L'Hospital, es posible establecer para cada par de ordenadas infinitamente próximas un triángulo característico donde se define una tangente. Esta idea permite establecer o anticipar el estado futuro para cada punto en la curva, lo cual sustenta la posibilidad de predecir comportamientos a partir del estudio local de la curva.

De acuerdo con Dolores, (2007, p. 9) *el movimiento* [es la] *propiedad esencial de la materia* [el cual] *es incorporado a la matemática en forma de variables*. Este estrecho vínculo se manifiesta en una relación dialéctica entra la física y las matemáticas del siglo XVII, tal como lo señala Cantoral (2001) los fenómenos de cambio y en particular el concepto de diferencia es un elemento sumamente importante; ya que la diferencia fundamental $p\ (a + da) - p(a)$ sirve para el estudio de la naturaleza de la variación local y extraer el comportamiento global de los fenómenos de flujo, pues:

> *La idea básica a la que nos referimos consiste en la asunción de que con la predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, es posible anunciar, anticipar su estado ulterior. Pues conociendo ciertos valores iniciales de un sistema en evolución, sabremos la forma en que este progresa.*
>
> (Cantoral, 2000, p. 195)

La diferencia fundamental: $p\ (a + da) - p(a)$ *mide el desequilibrio en la naturaleza, su reconocimiento permite anunciar la presencia de flujos, así como también da cuenta de los procesos de acumulación de lo que fluye…* (Cantoral, 2001, p. 348). Observamos que la noción de diferencia es una útil herramienta para cuantificar cambios y describir la evolución completa del sistema prediciendo el estado ulterior del fenómeno de flujo.

Este caso expuesto por Cantoral (2001) muestra la estrecha relación entre la física y la matemática en el periodo de formación del cálculo diferencial. Para nuestra investigación retomamos estas evidencias que nos permiten sustentar la posibilidad de crear escenarios didácticos basados en situaciones variacionales, con discusiones y conjeturas tal como se presentaron en la antigüedad.

MAGNITUDES

En el cálculo infinitesimal del siglo XVII se usó ampliamente la geometría, tanto para representar situaciones variacionales, como para explicar relaciones infinitesimales de las cantidades. De acuerdo con el análisis realizado por Castañeda (2004) a las obras de L'Hospital y Agensi, las gráficas expresaban situaciones variacionales, las cuales se constatan con las descripciones dadas por los autores en las que aparecen expresiones como el flujo de un punto, que hacen referencia a la variación del estado inicial de un fenómeno. Por otra parte, las gráficas muestran relaciones infinitesimales de magnitud, que aunque en estricto sentido no podrían tener dimensiones, se emplearon para describir las relaciones de los segmentos.

Por ejemplo, se puede considerar que un punto en la curva es un segmento infinitamente pequeño y consecuentemente toda la curva puede ser considerada como el ensamblaje de un conjunto infinito de pequeños segmentos infinitesimales. Esta idea es importante para nuestra investigación ya que es un modelo para explicar la naturaleza de la curva y el origen de la recta tangente, entendida ésta como la extensión en ambos sentidos de uno de estos pequeños segmentos infinitesimales.

En esta investigación se profundizó en el estudio de los conceptos matemáticos del siglo XVII, particularmente lo referido a las ideas infinitesimales para resolver problemas geométricos de la antigüedad (Serna 2007, 2008, 2010; Serna, Castañeda y Montiel 2011, 2012). Esta revisión mostró que uno de los problemas ampliamente abordado fue el de las tangentes. A continuación mostramos algunos planteamientos en los que aparece un tratamiento sobre la tangente.

El siguiente aparece en la obra de Copérnico, relativa al estudio de la posición de los cuerpos celestes (planetas) en el que busca determinar de un método para determinar el movimiento de los planetas y describir las trayectorias que siguen. El problema conduce al estudio de una curva particularmente en una región entre dos puntos dados.

En el teorema sexto de su obra, *Sobre las revoluciones de las orbes celestes,* menciona:

La razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas].

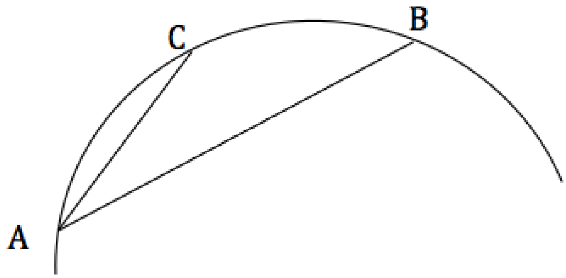


Figura 1

Para lo cual se plantea:

"Sean en un círculo dos arcos desiguales unidos, $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ y sea el mayor $\widehat{AB}$. Afirmo que la razón de $\widehat{AB}$ a $\widehat{AC}$ es mayor que la de las subtensas AB a AC"

(Copérnico, 1543, pp. 48-49).

Esto implica:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

El arco $\widehat{AB}$ forma parte de un círculo cuyo diámetro *D* propuesto es de 200000 unidades (recordar que se hacía mención de fenómenos de naturaleza macro, la celeste) y para calcular las subtensas (cuerdas) entre dos puntos se hace uso de la siguiente expresión:

$$S = Dsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

En donde tenemos que;
S es la subtensa
D el diámetro del círculo
θ es el ángulo central medido en grados

Sin embargo al revisar la relación entre los arcos y sus mitades se puede observar que cuando estos arcos se vuelven cada vez más pequeños, hay un momento en que esta relación (la mencionada en el teorema sexto del libro de Copérnico) entre los arcos y sus subtensas (cuerdas) deja de existir. Es decir cuando los puntos *B* y *C* se acercan cada vez más y más al punto *A* la desigualdad deja de existir para convertirse en igualdad.

En este caso se muestra una situación de variación continua de segmentos en el que aparece un límite en el que la desigualdad se vuelve igualdad.

DESARROLLO DE LAS SECUENCIAS

Hemos considerado la revisión y análisis de textos originales llevada a cabo en Serna, (2007) en donde se muestra la historia de la *tangente variacional* en los siglos XVI, XVII y XVIII. En la revisión indicada se mostraron diferentes métodos para calcular la recta tangente a una curva, incluyendo el realizado en el siglo XVII con Newton y Leibniz, donde generalizaron un método de resolución del problema. Una de las *herramientas matemáticas* fundamentales utilizadas fue el uso de los infinitesimales.

El recurrir a la historia se hizo, reconociendo que hay ideas iniciales (con respecto a la construcción del conocimiento), posteriormente su desarrollo implica que estas se van enriqueciendo sobre la base de las mismas. Por lo tanto identificamos con Copérnico las primeras ideas, es decir se detectó que con base a las actividades de calcular y comparar haciendo uso de la herramienta matemática se construyó un significado lo cual consiste en identificar que una curva se comporta como una recta siempre y cuando se tengan dos puntos muy cercanos de la misma.

DISEÑO DE LAS SECUENCIAS HACIENDO USO DE LA REVISIÓN HISTÓRICA-EPISTEMOLÓGICA

El estudio histórico nos permitió recuperar aspectos relacionados con el proceso de construcción del conocimiento, nos referimos a aquellas ideas o situaciones que le dieron origen y sentido. Para el caso de la recta tangente variacional observamos que las ideas iniciales surgieron con Copérnico (Serna, 2007). El contexto situacional en el que se usaron las matemáticas fue en un ambiente geométrico en donde se observó que sirvieron de herramienta para resolver problemas relacionados con ideas del cambio y variación. De tal forma que este reconocimiento nos ha provisto de elementos para el diseño de cinco secuencias didácticas; las primeras cuatro se construyeron con base a diferentes momentos o episodios históricos, en el que cada uno de ellos contribuía y enriquecía al momento anterior, esto permitió que en cada secuencia didáctica se construyera un nuevo significado hasta concretarse la formulación de la recta tangente variacional. La quinta secuencia didáctica se diseño con la intención de que los estudiantes usaran a la recta tangente variacional como una herramienta que permitiera construir desde un punto de vista gráfico la función derivada de una función polinomial de tercer grado.

A continuación explicaremos el método general para la creación de las secuencias. Con base a la historicidad de la recta tangente variacional se reconoce que una herramienta matemática no es algo que nace espontáneamente más bien es producto de un contexto histórico situacional y depende de lo que se ha construido anteriormente y a su vez servirá de base para construir en un futuro nuevos significados, es decir hay una dinámica en donde los significados se van enriqueciendo. De tal forma que se tomaron en cuenta los siguientes elementos:

a. Se identificaron los problemas en donde se encontraba *la tangente variacional*, esto en base a los diferentes momentos históricos que mostraron elementos clave en la construcción de la tangente variacional, por lo que consecuentemente se encontraban presentes en un contexto de cambio y variación.
b. Se determinó cuáles eran las *herramientas matemáticas* utilizadas
c. A partir de la *herramienta* utilizada se tenía que reconocer cuáles eran los conocimientos que se requerían para poder utilizarla.
d. Se determinaron cuáles eran las actividades que se encontraban presentes al resolver el problema
e. Se llevó a cabo un análisis para determinar cuáles eran los significados que surgían de las herramientas utilizadas para llevar a cabo las actividades reconociendo el contexto de cambio y variación en que se encontraba inmerso el problema.
f. Una vez que se determinaron los significados existentes se trató de llevarlos a cabo de manera intencional en la realización de las secuencias didácticas.
g. Se retomaron los problemas de los textos originales adaptando el lenguaje matemático utilizado en esa época a un lenguaje usado en el sistema escolar vigente en donde se llevó a cabo la investigación.
h. La secuencia planteaba resolver un problema muy similar al revisado en los textos originales, pero ya adaptado, y se llevaron a cabo preguntas en donde se pedía argumentar para contestarlas. Las respuestas a las preguntas se podían contestar gracias a las actividades llevadas a cabo con el uso de herramientas y haciendo uso de argumentos de cambio y variación.
i. Había diferentes tipos de preguntas que hemos clasificado en categorías, cada una de ellas con una intencionalidad dentro de la secuencia.
j. Cada una de las secuencias (a excepción de la primera) utilizaba elementos construidos de la anterior y con el uso de herramientas se podrían construir nuevos conocimientos, siempre conservando como base las ideas y/o nociones anteriormente construidas. En la primera secuencia se llevó a cabo reconociendo lo que los estudiantes habían estudiado en sus semestres anteriores ya que se necesitaba usar elementos de geometría y aritmética.
k. Al llevar a cabo los análisis de los textos originales se observó que mediante el uso de las graficas se podía construir argumentos y razonar, y a partir de la forma empleada en la secuencia y determinando el funcionamiento se podía generar un desarrollo del uso del conocimiento, es decir a partir de los usos de las herramientas se podía acceder a otro uso.

SECUENCIA DIDÁCTICA 1: CURVA-SEGMENTO

CONTEXTUALIZACIÓN

El problema se desarrolla en el contexto de la mecánica celeste por Copérnico. Él llegó a la conclusión de que una curva se comportaba como un segmento bajo ciertas características especiales las cuales consistían en que dos puntos de una curva se acercaban cada vez más y más a un tercer punto.
En su teorema sexto escribe “La razón (división o cociente) entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas].” (Copérnico, 1543, pp. 48-49), y se presenta la siguiente figura.

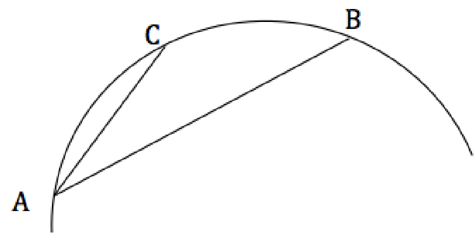


Figura 2

Para lo cual se dice lo siguiente:
“Sean en un círculo dos arcos desiguales unidos, $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ y sea el mayor $\widehat{AB}$. Afirmo que la razón de $\widehat{AB}$ a $\widehat{AC}$ es mayor que la de las subtensas AB a AC” (Copérnico, 1543, pp. 48-49).

Las subtensas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se pueden calcular a partir de la fórmula mostrada abajo y representada por “S” , que en nuestro contexto tiene el carácter de herramienta matemática.

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS UTILIZADAS

a) $S = Dsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Con esta herramienta se calculan las subtensas.

b) $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

A partir de esta herramienta se pueden hacer las comparaciones entre la razón de los arcos con respecto a la razón de las subtensas y ver que va ocurriendo cuando los puntos *C* y *B* se van acercando cada vez más y más al punto *A*.

LOS CONOCIMIENTOS REQUERIDOS PARA USAR ESTAS HERRAMIENTAS

a) Conocer qué es la longitud de un arco y la relación que guarda con el ángulo por medio del cual se forma
b) Conocer que es un arco y las rectas subtendidas (cuerdas)
c) Calcular el seno de un ángulo

LAS ACTIVIDADES

a) Deducir una fórmula para calcular la subtensa entre dos puntos.
Nota: Para deducir la fórmula esto se puede pensar en un triángulo isósceles cuyo lado desigual es la subtensa a calcular (*S*) y además es el lado opuesto a un ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro de una circunferencia, por lo que también es el ángulo central formado con dicho vértice y los otros dos vértices del triángulo, los cuales son dos puntos de la circunferencia por ejemplo el punto *A* y el punto *C* o también el punto *A* y el punto *B*
b) Calcular
c) Comparar
d) Inferir

CONSTRUCCIÓN DE NUEVOS SIGNIFICADOS

El significado que surge a partir de las herramientas utilizadas en un contexto de cambio y variación es: El teorema sexto de Copérnico se deja de cumplir cuando dos puntos de la curva se encuentran muy cercanos entre sí. La desigualdad $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{AC}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ se convierte en una igualdad, conforme dos puntos de la curva se acercan cada vez más y más.

La curva y la cuerda en dos puntos muy cercanos parece ser que son la misma cosa. Por lo tanto en una vecindad infinitesimal se puede considerar que la curva es como una recta.

Se plantearon preguntas que tenían la intención de que los alumnos pusieran su atención en elementos de cambio y variación a partir de los cuales pudieran calcular, comparar e inferir conjeturas.

Por ejemplo: ¿Qué puedes concluir que ocurre con el resultado del cociente $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{AC}}$ al compararlo con el resultado del cociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ conforme los puntos B y C se encuentran muy cercanos entre sí y además muy próximos al punto A? ¿Cómo serán los arcos de una curva de puntos que se encuentran muy cercanos entre sí con respecto a las subtensas formadas por los mismos puntos?

EL FUNCIONAMIENTO Y LA FORMA

Para ilustrar el problema se utilizó una gráfica en donde se presentaron elementos de geometría y aritmética, los cuales son conocimientos que fueron ya revisados por materias anteriores a la de Cálculo Diferencial y que por lo tanto son los conocimientos que los alumnos ya tienen y que pueden usar para construir nuevos saberes.

En la actividad, se les indicó a los estudiantes que elaboraron una tabla en donde el ángulo θ correspondiente al arco $\widehat{AB}$ siempre era el doble del ángulo θ correspondiente al arco $\widehat{AC}$ de tal forma que la razón entre los arcos siempre era de dos, para un determinado ángulo del arco $\widehat{AB}$ y del arco $\widehat{AC}$ se calculaban las subtensas correspondientes, los estudiantes observaban que sí los ángulos eran grandes se cumplía el Teorema sexto de Copérnico, pero cuando los ángulos se fueron haciendo cada vez más y más pequeños, digamos para ángulos inferiores a 1.5° entonces la desigualdad dejaba de serlo para convertirse en una igualdad.

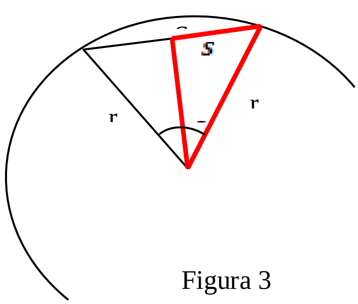
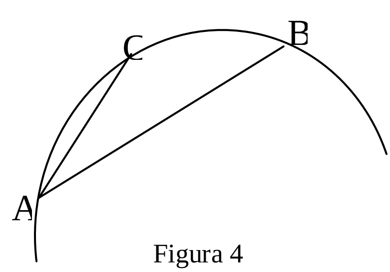
Funcionamiento: Cálculo de la cuerda subtendida entre dos puntos, conociendo el arco Forma: Circunferencia en donde se sitúan dos puntos sobre la circunferencia y un tercer punto ubicado en el centro de la misma	Funcionamiento: Observar que un arco tiene una mayor longitud que la cuerda subtendida. Cuando los puntos B y C se acercan cada vez más y más a el punto A la curva se comportará como una recta. Forma: Parte de una circunferencia en donde se encuentran dos puntos que van a ir acercando los dos a un tercer punto, por lo tanto uno de ellos tiene mayor longitud de arco que el otro.
 Figura 3	 Figura 4

Tabla 1

REFLEXIONES FINALES

Se ha sistematizado un método para la construcción de las secuencias. Para su desarrollo, se utilizó la *historicidad*, se retomó un texto original y se adaptó a un lenguaje asequible para los estudiantes lo cual tiene que ver con sus conocimientos previos del sistema escolar a donde pertenecen y de lo cual es consiente el profesor-investigador.

A partir del fenómeno didáctico del cual hemos partido se ha problematizado el conocimiento a partir del uso de la historia ya que esto nos permitió reconocer la *tangente variacional*en su contexto donde se le significó, y permitió resolver diversos problemas de cambio y variación. Los significados surgen del uso de herramientas matemáticas que se requieren para poder llevar a cabo las actividades en donde se retoman también los conocimientos previos para resolver problemas lo cual en esta interacción herramienta-actividad-contexto surge la construcción de significados, es decir se presenta la resignificación. Nuestro estudio propuso problematizar el objeto escolar recta tangente por medio de *la tangente variacional*. Esto tiene como consecuencia construir la noción que hemos llamado recta tangente variacional. Una vez construida sirve también de *herramienta* como una introducción a la derivada desde un punto de vista gráfico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59), Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Biza, I. y Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *TheJournal of Mathematical Behavior* 29 (4), 218-229.

Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis.*Research in Mathematics Education* 10 (1), 53-70.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada, CICATA-IPN. México.

Copérnico, N. (2003). *Sobre las revoluciones de los orbes celestes (C. Mínguez y M. Testal, Trad.)* Madrid, España: Editora Nacional. (Obra original publicada en 1543 bajo el título *De revolutionibusorbiumcoelestium)* Edición comentada por Stephen Hawking, A Hombros de Gigantes

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(3), 265-286.

Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada*. México: Díaz de Santos.
Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking, en Hownson A. &Kahane J. (Eds.). *Mathematics and Cognition.A research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education* (113-134). Cambridge: Cambridge UniversityPress.
González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN. México.
Kajander, A. y Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 40 (2), 173-181.
Kendal, M. y Stacey, K. (2003). Tracing Learning of Three Representations with the Differentiation Competency Framework. *Mathematics Education Research Journal* 15 (1), 22-41.
Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(2), 131-170
Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 69-90.
Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12 (3), 355-382.
Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics* 77 (2-3), 285-311.
Serna, L. (2010). Reflexión sobre el desarrollo de la recta tangente, como objeto escolar, un estudio Socioepistemológico. En G. Buendía (Ed.). *Publicación de Aniversario, A diez años del Posgrado en Línea en Matemática Educativa en el IPN.* (pp. 41-57), México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.
Serna, L. (2008). *Estudio Socioepistemológico de la tangente*. México City: History and Pedagogy of Mathematics.
Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente*. Tesis de maestría no publicada, CICATA-IPN. México.
Serna, L., Castañeda, A. y Montiel, G. (2009). Estudio Socioepistemológico del desarrollo de la recta tangente como objeto escolar. En G. Buendía y A. Castañeda (Eds.), *XII Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 392-404. México: Red de Centros de Investigación de Matemática Educativa.
Serna, L., Castañeda, A. y Montiel, G. (2012). Construcción de la recta tangente variacional a través de los usos del conocimiento del siglo XVII y XVIII. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 939-947. México: Comité Latinoamericano
Serna, L., Castañeda, A. y Montiel, G. (2011). Estudio Socioepistemológico del desarrollo de la recta tangente. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 825-834. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Valero S. (2000). *La derivada como organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Virtual del ITESM. México.
Zemelman, H. (2011). *Configuraciones críticas, Pensar epistémico sobre la realidad*. México: Siglo veintiuno editores.