

DEDUCCIÓN GENERAL DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN TRIGONOMETRÍA: DE LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA HASTA LA DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Julio Cesar Barreto García

U. E “José Antonio Sosa Guillen”. Palito Blanco, Estado Yaracuy-Venezuela

U. E “José Antonio Páez”. Boraure, Estado Yaracuy-Venezuela

julioebarretog@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo partiremos de la deducción del teorema general de Pitágoras en geometría, el cual toma en cuenta el área de las figuras geométricas rectilíneas como los cuadrados que estén sobre los lados de un triángulo oblicuángulo. En particular esta deducción la vamos a realizar usando el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos y lo usaremos en triángulos oblicuángulos, generando una cierta relación entre un lado en términos de los otros dos, más el doble producto de un lado por la proyección ortogonal de la altura sobre ese lado. Este teorema geométrico usando teoría de la trigonometría nos permitirá enunciar la conocida Ley del coseno, cambiando la proyección por la razón trigonométrica del coseno. Por último a través del cálculo integral lo generalizaremos al análisis matemático.

PALABRAS CLAVE: Didáctica de la Matemática, Cálculo integral, Ley del Coseno.

INTRODUCCIÓN

El interés por estos temas se explica por la tendencia en Didáctica de la Matemática, durante la década de los noventa, a considerar la problemática del aprendizaje de las Matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como una simple adquisición de competencias y de habilidades. En esos años se aprecia una clara evolución desde el estudio de los errores, partiendo de las dificultades del alumnado mostrado en las investigaciones sobre el conocimiento de los estudiantes y que subyace en el estudio de la matemática.

En ese sentido, al hablar de la Didáctica del Análisis Matemático debemos remontarnos al año de 1985, en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado “Pensamiento Matemático Avanzado” y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje en temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1991; Tall, 1995), lo cual genera mucha incertidumbre.

Es importante la deducción de un teorema tan elemental en la teoría matemática, tomando en cuenta que en el presente artículo podemos hacer un estudio desde la acepción geométrica, lo cual nos permite profundizar en conceptos tan importantes como es la homotecia y aplicarlos a la extensión o generalización del teorema de Pitágoras. Al conjugar estos contenidos podemos hallar muchas más generalizaciones usando toda la teoría de cálculo integral en un estudio analítico obteniendo la generalización del teorema.

MARCO TEÓRICO (PERCEPCIÓN DE OBJETOS)

Existen dos secuencias de desarrollo, distintas y simultáneas, que empiezan una por la percepción de objetos y la otra con la acción sobre ellos según Tall (1995), el cual explica que la actividad matemática empieza por la percepción de objetos en forma visuo-espacial. Esta se debe realizar según mi criterio en un enfoque de la propia Didáctica de la Geometría, de la cual se debe partir tomando en consideración la forma de las diferentes figuras geométricas y seguidamente su descripción verbal, su clasificación y el inicio de deducciones verbales. La acción sobre objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que llama *procepto*¹, el cual se define como un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos. El estudio de un gran número de casos, en todos los niveles de las matemáticas pero especialmente en niveles superiores del análisis, es que un proceso y su producto se representan mediante el mismo símbolo.

Ahora bien, (Dreyfus, 1991) expresa que comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y por tanto, es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje, durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales. Así, cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el Pensamiento Matemático Avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destacamos, por ejemplo, la abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente, por lo cual debemos tener mucho cuidado.

SEMEJANZA Y HOMOTECIAS

Definición 1 (Homotecia): Se llama homotecia de centro O y razón k (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro punto A' alineado con A y O , tal que:
 $OA' = k \cdot OA$.

¹ El *procepto* es una traducción de la expresión original inglesa *procept*, que proviene de proceso (*process*) y de concepto (*concept*).

Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa.

DIFERENCIA ENTRE SEMEJANZA Y HOMOTECIA

La semejanza es una relación entre dos figuras concretas, mientras que la homotecia es una transformación que puede aplicarse a cualquier punto del plano, una vez que su valor sea establecido. Dado un centro de homotecia, a cada punto del plano le corresponde otro punto, siendo la razón de sus distancias al centro un valor constante que denominamos razón de la homotecia (k). Luego, tenemos que:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = k$$

Dos puntos homotéticos están siempre alineados con el centro de la homotecia, y situados en la misma dirección respecto de este cuando el valor de k es positivo, ó en dirección opuesta si k es negativo, veamos la **Figura 1** a la izquierda:

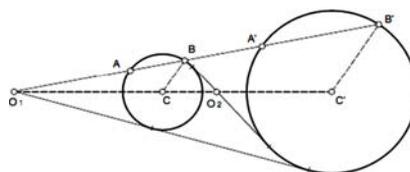
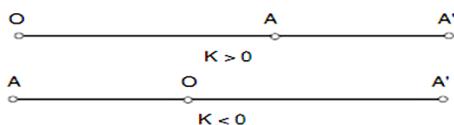


Figura 1: Homotecias.

Los segmentos homotéticos son paralelos y proporcionales, y los ángulos homotéticos son iguales. En la **Figura 1** a la derecha se nota que dos circunferencias son siempre homotéticas, siendo los centros de homotecia directa e inversa los puntos donde las rectas tangentes comunes cortan la recta que pasa por los centros.

Escalas: La representación de objetos a su tamaño natural no es posible cuando éstos son muy grandes o cuando son muy pequeños. En el primer caso, porque requerirían formatos de dimensiones poco manejables y en el segundo, porque faltaría claridad en la definición de los mismos. Esta problemática la resuelve la escala, aplicando la ampliación o reducción necesarias en cada caso para que los objetos queden claramente representados en el plano del dibujo. Se define la escala como la relación entre la dimensión dibujada respecto de su dimensión real, esto es:

$$E = \frac{\text{dibujo}}{\text{realidad}}$$

Si el numerador de esta fracción es mayor que el denominador, se trata de una escala de ampliación, y será de reducción en caso contrario. Véase la **Figura 2**:

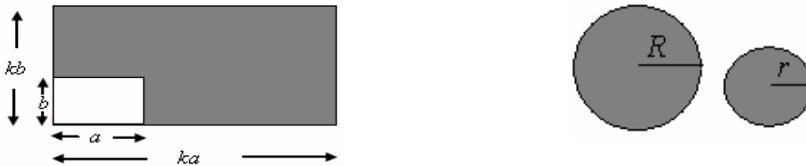


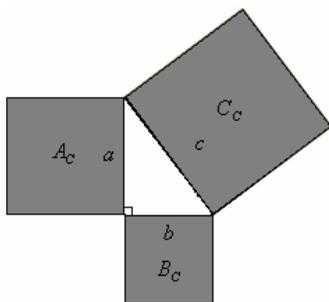
Figura 2: A la izquierda podemos conocer el efecto que produce el dibujo a escala sobre las magnitudes lineales en un rectángulo de dimensiones a y b , hasta obtener un rectángulo de dimensiones ka y kb . A la derecha esto se puede generalizar para dos círculos de radios R y r .

Ejercicio 1: Muestre que la relación que se establece entre el perímetro P del rectángulo original y el perímetro P' del rectángulo ampliado es $P'=kP$. Y la relación de áreas es $A'=k^2A$. La homotecia conserva también los ángulos y la alineación. Las dimensiones de dos figuras por homotecia son directamente proporcionales; esta proporción es fijada por la constante de homotecia, la cual multiplica las longitudes por la relación de homotecia k las áreas se multiplican por k^2 , etc. (Barreto, 2010a).

DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN GEOMETRÍA

En la *Historia de la Matemática*, se le atribuye a Bhaskara una demostración del Teorema de Pitágoras en el siglo XII en donde asoció la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ con el área de los cuadrados que estaban sobre los lados de un triángulo rectángulo (a y b sobre las longitudes de los catetos y c sobre la longitud de la hipotenusa) y operando con los cuadrados que estaban sobre las longitudes de los catetos, logró formar el cuadrado que estaba sobre la longitud de la hipotenusa. Así mismo, en diversas publicaciones de Barreto (2008, 2010b) se deduce el teorema de Pitágoras en una acepción geométrica para triángulos rectángulos que tienen sobre sus longitudes primeramente unos cuadrados, hasta generalizarlos a diversas figuras geométricas que cumplen entre sí la relación de homotecia.

Definición 2 (Triángulo rectángulo): Un triángulo se dice rectángulo si tiene un ángulo recto (igual a 90^0). Como veremos la **Figura 3** en donde tenemos que:



- A_C : Es el área del cuadrado que esta sobre el cateto de lado a , es decir, $A_C = a^2$.
- B_C : Es el área del cuadrado que esta sobre el cateto de lado b , es decir, $B_C = b^2$.
- C_C : Es el área del cuadrado que esta sobre el cateto de lado c , es decir, $C_C = c^2$.

Figura 3: Triángulo rectángulo de catetos a y b , y con hipotenusa c de longitudes. En donde obtenemos la conclusión geométrica del Teorema de Pitágoras, satisfaciéndose que: $C_C = A_C + B_C$.

Pasando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo*²: $c^2 = a^2 + b^2$. Cumpliéndose que:

$$c^2 = (a - b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right).$$

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 1 (Formulación Geométrica del Teorema de Pitágoras): En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos.

Observaciones:

- En la *proposición 47 del libro I de los Elementos de Euclides* en una traducción de (María L Puertas C, 1996), aparece el teorema anterior enunciado de la siguiente forma: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.
- Además también, la *proposición 48 del libro I de los Elementos de Euclides* se enuncia el converso del teorema, así: Si en un triángulo tenemos que el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes, entonces el ángulo comprendido por esos dos lados restantes del triángulo es recto.

² Es la asociación de un dibujo a una afirmación matemática.

- En la *proposición 31 del libro VI de Los Elementos de Euclides* se demuestra que: Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen figuras rectilíneas semejantes, entonces el área de la figura rectilínea construida sobre la longitud de la hipotenusa será igual a la suma de las áreas de las figuras rectilíneas semejantes construidas sobre las longitudes de los catetos. Esta es la extensión de la proposición anterior (**Proposición 47, I**), es decir, también extensión del mismo **Teorema 1**.

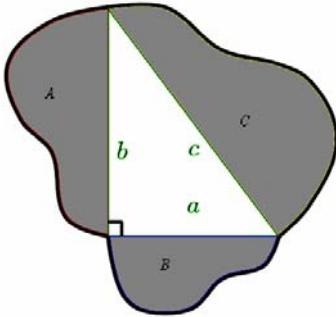


Figura 4: Aceptión geométrica de la extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que: $C = A + B$.

Nota: La última observación anterior la podemos extender o generalizar a figuras que no sean poligonales, como es el caso de las curvilíneas según (Barreto, 2010b).

Definiendo las transformaciones:

$$g : [0, c] \rightarrow [0, b]$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right) \quad y$$

$$h : [0, c] \rightarrow [0, a]$$

$$x \mapsto h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$$

Se cumple lo siguiente: $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx$. Donde las funciones homotéticas son:

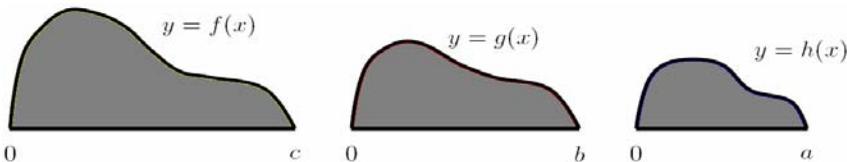


Figura 5: Representación gráfica de las figuras geométricas dadas en el triángulo rectángulo de la **Figura 4**, las cuales son graficadas en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado y notamos que estas tres son unas figuras homotéticas.

Esto es válido para cualquier trío de figuras que estén sobre las longitudes del triángulo rectángulo y que cumplan una relación de homotecia entre ellas.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y LA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Dados dos cuadrados de diferentes áreas, es posible construir un cuadrado cuya área sea la diferencia entre las áreas de otros dos cuadrados dados. Véase la **Figura 6**:

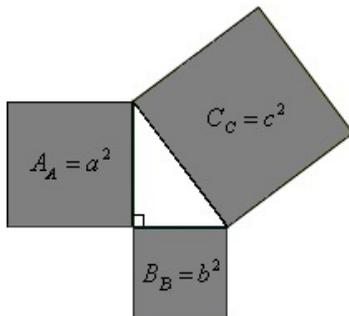


Figura 6: Acepción geométrica del Teorema de Pitágoras para cuadrados colocados sobre las longitudes del triángulo rectángulo.

Para ello, a diferencia del procedimiento usado en la **Figura 3**, usamos el cuadrado que está sobre la longitud de la hipotenusa menos cualquiera de los cuadrados que forman el ángulo recto, y se construye el cuadrado restante en el otro lado según Barreto (2011). El cuadrado “diferencia” se construye sobre un cateto, tal como se muestra en la **Figura 6**.

Veamos lo anteriormente mencionado, de acuerdo con Barreto (2010b), que según el Teorema de Pitágoras se cumple geoméricamente en la **Figura 6** que:

$$A_A + B_B = C_C \quad (I)$$

Es decir, algebraicamente (Ó en términos de longitudes) lo que ocurre es:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (II)$$

Notemos que de la ecuación (I) tenemos las siguientes sustracciones de áreas:

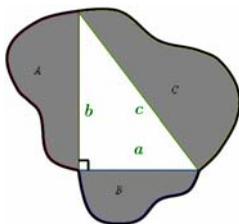
$$B_B = C_C - A_A \quad (I') \quad \text{ó también,} \quad A_A = C_C - B_B \quad (I'')$$

Y de la ecuación (II) tenemos las siguientes sustracciones de longitudes:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (II') \quad \text{ó también,} \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad (II'')$$

En nuestro caso, nos conciernen las ecuaciones (I') y (II') aunque pudimos haber partido del otro cuadrado y hallar el área del otro rectángulo (Barreto, 2011).

En términos de áreas más generales lo que ocurre es que dada la siguiente configuración:



Se cumple que:

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^c f(x) dx - \int_0^b h(x) dx.$$

Figura 7: Aceptación geométrica de la extensión del Teorema de Pitágoras, satisfaciéndose que $A = C - B$.

Así, podemos definir por *homotecia* las siguientes transformaciones:

$$f: [0, b] \rightarrow [0, c]$$

Y

$$h: [0, b] \rightarrow [0, a]$$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{c}{b} g\left(\frac{b}{c} x\right)$$

$$x \rightarrow h(x) = \frac{a}{b} g\left(\frac{b}{a} x\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_0^c f(x) dx - \int_0^a h(x) dx &= \int_0^c \frac{c}{b} g\left(\frac{b}{c} x\right) dx - \int_0^a \frac{a}{b} g\left(\frac{b}{a} x\right) dx \\ &= \frac{c}{b} \int_0^c g\left(\frac{b}{c} x\right) dx - \frac{a}{b} \int_0^a g\left(\frac{b}{a} x\right) dx \\ &= \frac{c^2}{b^2} \int_0^b g(u) du - \frac{a^2}{b^2} \int_0^b g(v) dv \quad \text{Haciendo cambios de variable: } u = \frac{b}{c} x \text{ y } v = \frac{b}{a} x. \\ &= \frac{(c^2 - a^2)}{b^2} \int_0^b g(x) dx \quad \text{Pues la función es de variable muda.} \\ &= \frac{(b^2)}{b^2} \int_0^b g(x) dx = \int_0^b g(x) dx \end{aligned}$$

Así, se cumple la diferencia de áreas en el teorema de Pitágoras para figuras homotéticas generales y además, esto nos dice que se cumple más que una transitividad una equivalencia para figuras que cumplen una cierta relación de homotecia entre ellas.

DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN TRIGONOMETRÍA PARTIENDO DE UNA DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA

Según la *proposición 12 del libro II de los elementos de Euclides* en una traducción de María L. Puertas C (1996), aparece el enunciado siguiente:

“En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso”.

Y geoméricamente lo podemos ver en la **Figura 8**:

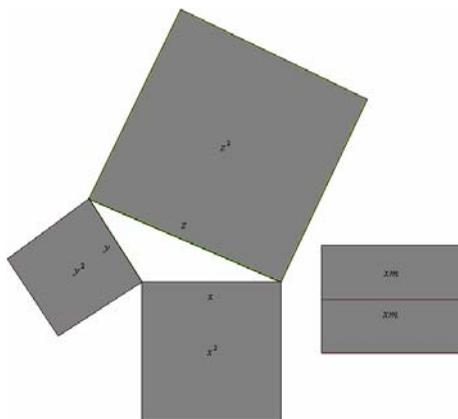


Figura 8: Reducción geométrica de la deducción del Teorema de Pitágoras en trigonometría, según (Barreto, 2012).

Aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*³ tenemos la siguiente ecuación:

$$z^2 = x^2 + y^2 + 2xm. \quad (1)$$

Nota: La formulación de la época se dice que es arcaica ya que tiene la ausencia de funciones trigonométricas y del álgebra, lo que inevitablemente obligó a razonar en términos de diferencias más generales de áreas para enunciar la **Proposición 12, II**.

Ahora tomando en consideración el triángulo con los siguientes ángulos, de acuerdo a la **Figura 9**:

³ Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle o rompecabezas.

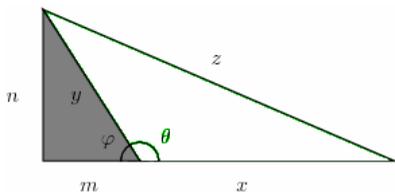


Figura 9: Configuración del triángulo obtusángulo de la **Figura 8**, ahora colocando un triángulo rectángulo gris que tiene como hipotenusa el lado del triángulo blanco. Así, se puede formar un triángulo rectángulo más grande al que le colocamos todos sus ángulos.

Así, usando trigonometría tenemos que: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$ (2). De acuerdo con (Barreto, 2012) y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema del Coseno (Ley del Coseno): En un triángulo acutángulo el cuadrado de la longitud del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados que forman el ángulo, menos dos veces el producto de estos lados por el coseno del ángulo que ellos forman.

En la *proposición 13 del libro II de los elementos de Euclides* aparece lo siguiente:

Proposición 13 II: En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la recta interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

DEDUCCIÓN GENERAL DE LEY DEL COSENO EN UN ESTUDIO ANALÍTICO

Dada la siguiente configuración:

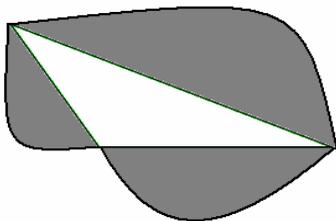


Figura 10: Aceptación geométrica de la extensión del Teorema de Pitágoras en Trigonometría (Ley del Coseno), donde se satisface que:

$$\int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x) + A_R = \int_0^c f(x).$$

Veamos esta que a través de una *aprehensión operativa de cambio figural*⁴ podemos formar el siguiente triángulo rectángulo:

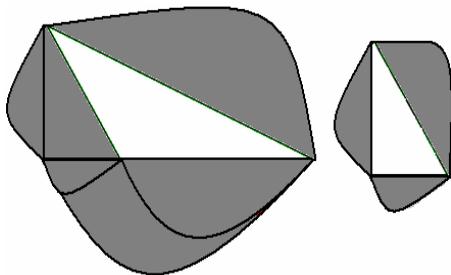


Figura 11: A la izquierda se transforma el triángulo oblicuángulo de la **Figura 8**, generando una configuración como la de la **Figura 9** y a la derecha tomamos el triángulo blanco añadido como un enlace para la demostración, aplicando una nueva *aprehensión operativa de reconfiguración*.

Donde tenemos las siguientes funciones:

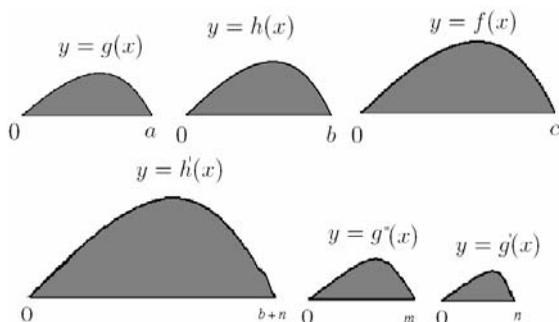


Figura 12: Representación grafica de las figuras generales en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado.

Nota: Un triángulo rectángulo grande (Es la unión del triángulo rectángulo blanco unido con el triángulo oblicuángulo blanco).

Luego, tenemos de acuerdo con el Teorema General de Pitágoras que se cumple que:

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^m g''(x)dx + \int_0^{n+b} h'(x)dx. \quad (1)$$

Ahora bien, en el triángulo rectángulo blanco se cumple que: $\int_0^a g(x)dx = \int_0^m g''(x)dx + \int_0^n g'(x)dx$.

Y del teorema de Pitágoras y la diferencia de cuadrados tenemos que:

$$\int_0^m g''(x)dx = \int_0^a g(x)dx - \int_0^n g'(x)dx. \text{ Luego, sustituyendo en la ecuación (1) tenemos que:}$$

⁴ Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones.

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^a g(x)dx - \int_0^n g'(x)dx + \int_0^{n+b} h'(x)dx. \quad (2)$$

Pero: $\int_0^{n+b} h'(x)dx = A_R + \int_0^n g'(x)dx + \int_0^b h(x)dx$. Luego, sustituyendo en la ecuación (2) nos queda que:

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^a g(x)dx - \int_0^n g'(x)dx + A_R + \int_0^n g'(x)dx + \int_0^b h(x)dx. \quad \text{O bien:}$$

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x)dx + A_R.$$

En efecto, notemos que: La función g es homotética con la función g'' la cual a su vez es homotética con la función f . En efecto: Como la función g es homotética con la función g'' se cumple que: $g(x) = \frac{a}{m} g''\left(\frac{m}{a}x\right)$. Y como la función g'' es homotética con la función f se debe cumplir que:

$$g''(x) = \frac{m}{c} f\left(\frac{c}{m}x\right)$$

Luego tenemos que:

$$g''\left(\frac{m}{a}x\right) = \frac{m}{c} f\left(\frac{c}{m}\left(\frac{m}{a}x\right)\right) = \frac{m}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$$

Por tanto:

$$g(x) = \frac{a}{m} \left(\frac{m}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right) \right) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$$

Así, hay una transitividad en la homotecia de las funciones de acuerdo con la configuración. Análogamente, como la función h es homotética con la función h' y esta a su vez con la función f tenemos que la función h es homotética con la función f por la transitividad anterior.

Esto es, tenemos que: $h(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)$. Ahora bien:

$$\int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x)dx + A_R = \int_0^a \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)dx + \int_0^b \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)dx + A_R = \frac{a}{c} \int_0^a f\left(\frac{c}{a}x\right)dx + \frac{b}{c} \int_0^b f\left(\frac{c}{b}x\right)dx + A_R$$

Haciendo los cambios $u = \frac{c}{a}x$ y $v = \frac{c}{b}x$, $du = \frac{c}{a}dx$. Y además $\frac{a}{c}du = dx$; $\frac{b}{c}dv = dx$.

Tenemos que: Si $x \rightarrow 0$ entonces $u \rightarrow 0$ y $v \rightarrow 0$. Además, si $x \rightarrow a$ entonces $u \rightarrow c$ y si $x \rightarrow b$ entonces $v \rightarrow c$.

$$\text{Así: } \int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x)dx + A_R = \frac{a^2}{c^2} \int_0^c f(u)du + \frac{b^2}{c^2} \int_0^c f(v)dv + A_R \quad (3)$$

Además, $A_R = \int_0^{n+b} h'(x)dx - \int_0^n g'(x)dx - \int_0^b h(x)dx$. Como la función g' es homotética con la función h' y la función h es homotética con la función h' entonces de acuerdo con la transitividad anterior se puede probar además que:

$$g'(x) = \frac{n}{n+b} h'\left(\frac{n+b}{n}x\right), \quad h(x) = \frac{b}{n+b} h'\left(\frac{n+b}{b}x\right)$$

Luego, nos queda que:

$$\begin{aligned} A_R &= \int_0^{n+b} h'(x)dx - \int_0^n \frac{n}{n+b} h'\left(\frac{n+b}{n}x\right)dx - \int_0^b \frac{b}{n+b} h'\left(\frac{n+b}{b}x\right)dx \\ &= \int_0^{n+b} h'(x)dx - \frac{n}{n+b} \int_0^n h'\left(\frac{n+b}{n}x\right)dx - \frac{b}{n+b} \int_0^b h'\left(\frac{n+b}{b}x\right)dx \end{aligned}$$

Haciendo los cambios adecuados tenemos que :

$$\begin{aligned}
A_R &= \int_0^{n+b} h'(x)dx - \frac{n^2}{(n+b)^2} \int_0^{n+b} h'(w)dw - \frac{b^2}{(n+b)^2} \int_0^{n+b} h'(w')dw' \\
&= \left(1 - \frac{n^2}{(n+b)^2} - \frac{b^2}{(n+b)^2}\right) \int_0^{n+b} h'(x)dx \text{ (Lavariables muda)} \\
&= \left(\frac{(n+b)^2 - n^2 - b^2}{(n+b)^2}\right) \int_0^{n+b} h'(x)dx = \left(\frac{n^2 + 2nb + b^2 - n^2 - b^2}{(n+b)^2}\right) \int_0^{n+b} h'(x)dx = \left(\frac{2nb}{(n+b)^2}\right) \int_0^{n+b} h'(x)dx \quad (4)
\end{aligned}$$

Como la función h' es homotética con la función f tenemos que: $h'(x) = \frac{n+b}{c} f\left(\frac{c}{n+b}x\right)$.

Luego en la ecuación (4) nos queda:

$$A_R = \left(\frac{2nb}{(n+b)^2}\right) \int_0^{n+b} h'(x)dx = \left(\frac{2nb}{(n+b)^2}\right) \int_0^{n+b} \frac{n+b}{c} f\left(\frac{c}{n+b}x\right)dx = \left(\frac{2nb}{c^2}\right) \int_0^c f(x)dx$$

(Haciendoun cambiode variable)

Y sustituyendo en la ecuación (3):

$$\begin{aligned}
\int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x)dx + A_R &= \frac{a^2}{c^2} \int_0^c f(x)dx + \frac{b^2}{c^2} \int_0^c f(x)dx + \left(\frac{2nb}{c^2}\right) \int_0^c f(x)dx \\
&= \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{2nb}{c^2}\right) \int_0^c f(x)dx = \left(\frac{a^2 + b^2 + 2nb}{c^2}\right) \int_0^c f(x)dx
\end{aligned}$$

$$\int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x)dx + A_R = \left(\frac{c^2}{c^2}\right) \int_0^c f(x)dx = \int_0^c f(x)dx$$

(Proposición 12 del libro II de los elementos de Euclides)

Así, se cumple el Teorema o Ley del Coseno de forma general, esto es, para cualquier tipo de figuras sobre los lados del triángulo que cumplan ciertas relaciones de homotecias.

Ejercicio 2: Enunciar y demostrar el Teorema para ángulos agudos, pero ahora teniendo sobre los lados del triángulo obtusángulo ciertas figuras homotéticas.

CONCLUSIÓN

Entre los procesos cognitivos de componente más psicológica y que más adquieren una progresiva importancia en los cursos superiores, además de abstraer, se pueden citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar, los cuales se van desarrollando progresivamente durante todo el aprendizaje de nuestros estudiantes en el estudio de la matemática desde el estudio geométrico hasta llegar al propio análisis matemático. Estos nos permiten desarrollar el llamado Pensamiento Matemático Avanzado y nos ayuda a deducir la teoría concerniente a este artículo, partiendo de conceptos básicamente geométricos hasta llegar a usar la teoría de Trigonometría e inclusive el cálculo integral, permitiendo hacer algunas aplicaciones matemáticas y sobre todo unas generalizaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barreto, J. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números* (69). Recuperado el 25 de julio de 2013 de: <http://www.sinewton.org/numeros>
- Barreto, J. (2010a). Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. *UNION* (23). Recuperado el 25 de mayo de 2013 de: <http://www.fisem.org/>
- Barreto, J. (2010b). Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras. *Números* (75). Recuperado el 25 de julio de 2013 de: <http://www.sinewton.org/numeros>
- Barreto, J. (2011). Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Matemática* (7) 2. Recuperado el 25 de julio de 2013 de: <http://www.matematicalia.net>
- Barreto, J. (2012). Deducción geométrica del teorema de Pitágoras en trigonometría como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Premisa* (53). Recuperado el 25 de julio de 2013 de: <http://www.soarem.org.ar/>
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.
- Euclides. (1996). *Elementos*. (Traducción de M. L Puertas C.) (3 Volúmenes). 1ra. Edición. Editorial Gredos: España.
- Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, Proceedings of *PME 19*, Recife (Brasil).