EL LÍMITE AL INFINITO. ANÁLISIS PRELIMINAR PARA LA ELABORACIÓN DE UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA DE SU ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Armando Morales Carballo, Luz Esmeralda Reyes García, Juan Carlos Hernández Gómez
armando280@hotmail.com, luzes_rega@hotmail.com, jcarloshg@gmail.com .
Universidad Autónoma de Guerrero, México

RESUMEN

En este artículo se reportan los resultados de una investigación sobre las dificultades que surgen en alumnos de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero cuando trabajan actividades relacionadas con el concepto de límite al infinito en sus distintas representaciones. El trabajo toma como elementos teórico - metodológicos los Registros de Representación que aporta Duval (1993) y los resultados de la investigación de Claros (2010) sobre los fenómenos que organiza el límite de una sucesión. Las dificultades y sus características serán fundamentales para la elaboración de una estrategia de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite al infinito.

Palabras clave: Límite al infinito, dificultades, procesos infinitos.

INTRODUCCIÓN

Consideramos que el tratamiento de la formación de conceptos y su definición como situación típica en la enseñanza de la Matemática, favorece la comprensión y desarrollo de la misma. En particular, el concepto de límite juega un papel central para la comprensión de la mayor parte del contenido de la disciplina, en áreas como el Cálculo y el Análisis Matemático, dicho concepto cobra importancia, ya que otros conceptos como la continuidad, integral, entre otros, lo involucran y por tanto, este concepto permite sistematizarlos.

En la presente investigación nos enfocamos en la identificación y caracterización de dificultades en torno al concepto de límite al infinito (cuya expresión es de la forma $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$) que emergen en los estudiantes cuando analizan e interpretan sobre el concepto en sus distintas representaciones. Como parte de la justificación de la investigación, se revisaron los trabajos relacionados con el concepto de límite que se reportan en (Camacho y Aguirre, 2001; Galeana, 2010; Páez, 2005; García, 2010; Engler, Vrancken, Müller y Hecklein, 2006) que a continuación se describen:

Camacho y Aguirre (2001), al realizar un análisis preliminar para la elaboración de una situación didáctica y con ello introducir el concepto de límite infinito, reportan dificultades de tipo algebraico, de graficación, de formalización. Por otra parte, Galeana (2010) explora con profesores de bachillerato el concepto de infinito y encuentra que al infinito lo consideran como aproximación, algo que no tiene fin, interminable, entre otros. Páez (2005) investiga las dificultades de aprendizaje y procesos de construcción o reconstrucción del concepto de límite, para ello, plantea actividades relacionadas con el concepto a estudiantes de posgrado, sostiene que cuando sus estudiantes proporcionan la definición formal de límite, tienen dificultades con el uso de los cuantificadores y el orden de la implicación, así mismo, con respecto a la notación $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ varios estudiantes creen que esto significa que el límite de la función cuando $x \to c$ existe como número real.

Hemos de recalcar que la mayoría de estas investigaciones han centrado su estudio en el tema de límites finitos, habiendo un escaso estudio para el caso del límite al infinito, y las dificultades que hasta ahora se han encontrado están relacionadas con el mal uso del modelo $(\varepsilon - N)$ para definir el concepto, dificultades para determinar algunos límites de funciones especiales, dificultades relacionadas con la evaluación de una función en el valor al cual tiende la variable independiente, que implica que se presenten expresiones de la forma $\frac{0}{0}, \frac{k}{\infty}$, entre otras, las cuales están relacionadas a evitar estas indeterminaciones.

De las investigaciones analizadas y de la experiencia que se ha tenido en algunos momentos durante el trabajo con el concepto de límite, consideramos que es fundamental investigar sobre un concepto en particular de límite, el caso de límite al infinito, ya que dicho concepto aparece incluso en los problemas clásicos de tipo geométrico que dan origen al concepto. Con esta investigación, se abordó el siguiente **problema:** ¿Qué dificultades asociadas al concepto de límite al infinito presentan los estudiantes de nivel universitario cuando estudian el concepto en sus distintas representaciones?

El **objetivo de investigación** fue: Identificar y Caracterizar las dificultades en torno al concepto de límite al infinito que los estudiantes de nivel universitario presentan cuando estudian el concepto en sus distintas representaciones. **Las preguntas que orientaron la investigación fueron:** ¿Qué interpretaciones hacen los estudiantes de nivel universitario a los procesos infinitos que involucran el concepto de límite al infinito? ¿Qué dificultades presentan los estudiantes cuando analizan procesos infinitos?

ELEMENTOS TEÓRICO - METODOLÓGICOS

La investigación utilizó como fundamento teórico la teoría de Registros de Representaciones desarrollada por Duval (1993). Duval establece que los estudiantes empiezan asimilar y a comprender un concepto, cuando lo identifican en sus distintas representaciones (registros): gráfico, numérico, algebraico, verbal, y cuando son capaces de cambiar de registro de representación, es decir, que el concepto en cuestión, puedan a través de una transformación llevarlo de una representación a otra. Así mismo establece que para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno solo (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto.

Duval (1993), afirma que las representaciones son fundamentales para la comprensión de la matemática, pues sus objetos de estudio son construcciones de la mente y son necesarias las representaciones para interactuar con dichos objetos: Una escritura, una notación, un símbolo representan un objeto matemático. Define las representaciones mentales, como el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello con lo que se asocia y las representaciones semióticas, como aquellas producciones constituidas por el empleo de signos con los que dispone el individuo y los usa para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. En ese sentido, el investigador sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se lleva a cabo como una interiorización de las representaciones externas.

El problema que atendió la investigación, se enmarca en esta teoría al considerar el papel de los registros de representación: gráfico, numérico, algebraico, verbal en la comprensión de los conceptos, en particular en el estudio del límite al infinito, pues en dichos registros de representación y producto del análisis de los alumnos sobre las actividades propuestas, se identificaron algunas dificultades en torno al concepto de límite al infinito las cuales se indican en las conclusiones del trabajo. Por otro lado, los aportes de la investigación de Claros (2010) sobre los fenómenos que organiza el límite de una sucesión, permiten concluir al investigador que previo al trabajo con el concepto de límite y durante su tratamiento, emergen distintas dificultades asociadas al concepto y al hacer una clasificación de ellas, establece que dichas dificultades son: *Dificultades respecto al análisis matemático, dificultades específicas del concepto de límite, y dificultades en torno al lenguaje del límite*. En este trabajo, nos apoyamos en dichas clasificaciones para hacer una mejor caracterización de las dificultades encontradas sobre este concepto.

METODOLOGÍA

Tipo de investigación. Desde el punto de vista metodológico es un estudio de tipo cualitativo con carácter de tipo interpretativo. Se sustenta en un diseño, constituido por cuatro actividades cada una involucra el concepto de límite al infinito, las cuales permitieron a los estudiantes a trabajar utilizando sólo lápiz y papel.

Los participantes. La población con la que se trabajó estuvo formada por 16 alumnos, todos ellos de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, al momento de la aplicación de las actividades ellos cursaban el semestre II y estaban trabajando el curso de Cálculo II. Estos estudiantes han abordado los contenidos de funciones reales de variable real, dominio e imagen de una función, límite de funciones, definición intuitiva y formal de límite, propiedades de límites. Por lo que los estudiantes debieran tener dominio de las nociones que se involucran en las actividades.

Procedimiento. Las actividades se aplicaron en cinco sesiones de 50 minutos cada módulo. Los alumnos trabajaron de manera individual las dos primeras actividades y en equipos las restantes, esto con la finalidad de permitir la interacción entre ellos. En cada equipo se procuró la integración de un alumno líder, con la finalidad de promover la discusión para el tratamiento de las dos últimas actividades.

Recolección de la información. Instrumento de exploración, entrevista a un subgrupo tomado de manera aleatoria.

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1.Considere la siguiente definición

Definición 1. Un número L se dice que es el límite de la función f en ∞ (o cuando x aumenta indefinidamente), lo que se escribe $\underset{\infty}{lím}\, f = L$ ó $\underset{x\to\infty}{lím}\, f = L$. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Siempre que $x \in D_f$ y $x > N$.

a) Proponer un ejemplo de límite de una función que cumpla la definición anterior.
b) Representa gráficamente el ejemplo que propuso.
c) Justificar que la función que propuso satisface las condiciones de la definición.

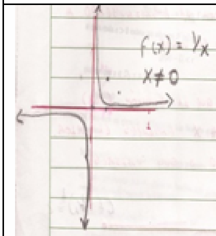
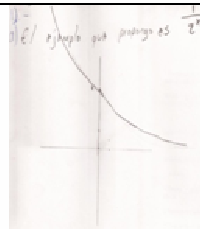
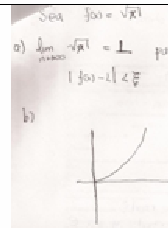
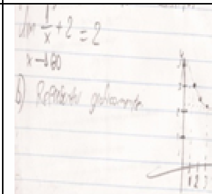
Acerca de las respuestas:

El objetivo de la actividad es que los alumnos identifiquen y propongan un ejemplo como caso particular que satisfaga las condiciones que establece la definición. A pesar de que no se exige lo formal del concepto, consideramos que pueden aparecer producciones sobre intentos de utilizar la definición para justificar la situación particular que proponen.

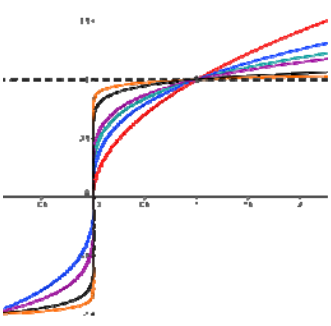
Por otra parte, se espera que los alumnos contrasten el ejemplo dado en la forma analítica o numérica con la representación gráfica, con la finalidad de ver si son capaces de pasar de un registro de representación a otro cuando tratan el mismo ejemplo.

Respuesta que dan los estudiantes a la actividad 1 con respecto al inciso a) y c).	
Funciones	Justificación
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \left\lvert\frac{1}{x} - 0\right\rvert < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon$ $\Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{x}, \quad x < \varepsilon.$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \varepsilon = 0.0001, \quad x = 99999, \quad N = 99998, \quad \lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon,$ $\left\lvert\frac{1}{99999} - 0\right\rvert < 0.0001, \lvert 0.00001\rvert < 0.001.$ Satisface la condición de la definición.
Otros casos: $f(x) = \frac{1}{x} + 2, \quad f(x) = \frac{1}{2^x}.$	
Casos erróneos: $f(x) = \sqrt{x},$	Para todo $\varepsilon > 0, \exists N$ t.q $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ siempre que $x \in D_f$ y $x > N$.

Respuestas que dan los estudiantes al inciso b) de la actividad 1.

$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{2^x}$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \frac{1}{x} + 2$
			

Como podemos observar al analizar la actividad 1, encontramos dificultades: para justificar el límite, a pesar de que algunos de los estudiantes proponen un ejemplo que satisface con las condiciones de dicha definición y proporcionan su representación gráfica se observa que cuando quieren dar una justificación formal utilizando el modelo $\varepsilon - N$ tienen problemas con ello, pues estas dificultades están asociadas a la utilización de los cuantificadores, es decir, solo asignan valores particulares a ε y N y no usan los cuantificadores "para todo", "existe" para establecer las relaciones entre ε, N y los valores x del dominio. Según Claros (2010), esta dificultad podemos ubicarla en las llamadas dificultades específicas del límite. Otras dificultades, que se encontraron en esta actividad son: para aplicar las condiciones del concepto, dificultad para establecer y usar analogías. En esta última pudimos constatar en la entrevista al alumno, que cometió el error al proponer la función $f(x)=\sqrt{x}$. Explicó, que después de analizar la situación, confunde el ejemplo con la función $y=\sqrt[n]{x}$, $0<x<1$. Cuyo comportamiento es el siguiente:



Observamos que se trata de un ejemplo que satisface las condiciones dadas, sin embargo, no se propuso tal cual se presenta, por lo que hay manifiestos de dificultad para establecer analogías.
Lo interesante de este análisis y de la entrevista informal, es que se pudo persuadir que, incluso no identifica totalmente que el límite de la función $y=\sqrt[n]{x}$, $0<x<1$, cuando $x\to\infty$ tiende a 1, se trata de un caso particular de límite al infinito.

Actividad 2. Considere la siguiente función $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **cuyo gráfico se muestra a continuación.**

Actividad:

a) Evalúe la función dada en los valores de x = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 128 y observe el comportamiento de la función.

b) Establezca una conjetura sobre el límite de la función a medida que la variable x aumenta indefinidamente.

c) ¿El límite de la función es un número real?

Con esta actividad, se espera que los alumnos conjeturen que el límite de la función a medida que la variable crece ilimitadamente es el valor de e, ya que en actividades anteriores a éstas, ellos ya han estudiado los límites

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ y } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

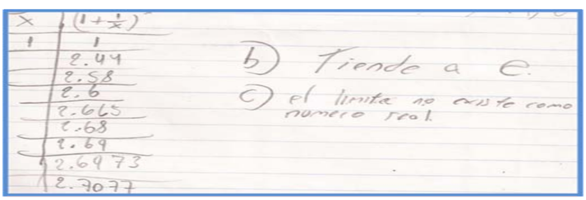
Para el caso del inciso a) la mayoría de ellos procede a evaluar correctamente, sin embargo se empiezan a presentar dificultades en el inciso b), algunas de las respuestas que dan son:

- El valor de la función va disminuyendo y sus valores van variando entre 1 y 2. El límite de la función es

Esto es un caso erróneo, se observa dificultad para generalizar el comportamiento, no consideran la condición de monotonía, en general, no analizan según el concepto, se dejan guiar por la intuición.

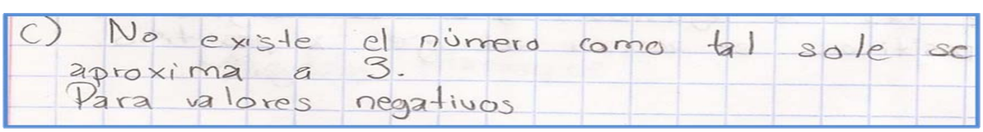
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 3$. Hay dificultad para inducir, a partir de casos particulares.
- La función tiende a e, a medida que $x\to\infty$. Sin embargo, presentan dificultad para argumentar o demostrar la validez de la conjetura.

Para el inciso c) como se mencionó anteriormente varios de ellos dicen que el límite sí existe como número real y es 2, o es 3, sin embargo en el caso cuando mencionan que el límite tiende a e, algunos mencionan que este no existe como número real.

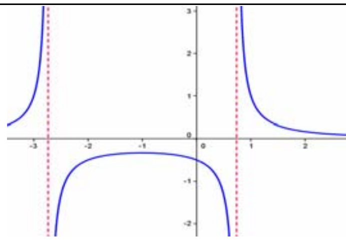

x | $(1+\frac{1}{x})$
1 | 1
2.44
2.58
2.6
2.665
2.68
2.69
2.6973
2.7077

b) Tiende a e.
c) el límite no existe como número real.

Otros afirman lo siguiente:


c) No existe el número como tal solo se aproxima a 3.
Para valores negativos

Actividad 3. A continuación se muestran algunos gráficos que corresponden a ciertas funciones reales de variable real, analice dichos gráficos y conteste lo que se le pide, recuerde que la argumentación de su respuesta es importante.



Gráfica 1

Responda y en cada caso argumente su respuesta.

1. ¿ $\lim_{x\to\infty} f(x)=?$, ¿ $\lim_{x^+\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=?$, ¿ $\lim_{x^-\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=?$

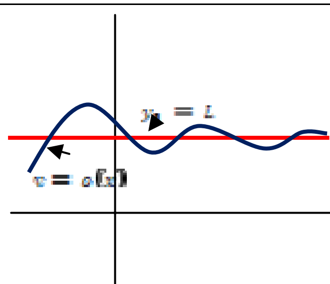
Con respecto a la gráfica 1. ¿ $\lim_{x\to\infty} f(x)=?$, con esta pregunta, se espera que el alumno concluya que el límite es cero, y reconozca un caso particular del concepto de límite al infinito en el registro gráfico. Por otra parte, también se pretende que el alumno identifique otros tipos de límite, como $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ y establecer qué características tienen los límites al infinito.

Las respuestas encontradas en dos de los equipos que indicamos por E1 y E2, son las siguientes:

E1. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x^+\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=+\infty$, $\lim_{x^-\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=\infty$

E2. $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x^+\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=+\infty$, $\lim_{x^-\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=-0.3$

Se observa que en relación a la primer pregunta, los equipos dan respuestas diferentes, en relación a la tercer pregunta, los equipos dan respuestas diferentes, además, uno de ellos establece que el límite es finito. Los resultados evidencian que algunos equipos no identifican correctamente un caso de límite al infinito, y tienden a confundirlo con límites infinitos. Consideramos que estas situaciones se presentan por la dificultad que existe en la lectura e interpretación de gráficas, por otra parte, se notaron dificultades para analizar límites laterales.

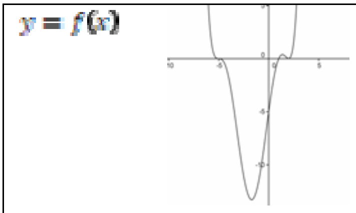


Gráfica 2

2. ¿A qué valor se aproxima la función a medida que la variable independiente tiende a crecer (tiende a $+\infty$)?

En relación a la gráfica 2. Se pretende que el alumno concluya que la función tiende a L, que es la recta paralela al eje horizontal y que corresponde a la función constante. A pesar de que la curva no explicita a alguna función en particular, se trata de que los alumnos identifiquen el concepto de límite al infinito.

Al analizar las respuestas de los equipos, identificamos que tres equipos concluyen que el límite es igual a 0 y otros tres, que el límite es *L*. De nueva cuenta, podemos afirmar que los que contestaron que el límite el cero, no leen correctamente la gráfica, y los que contestaron que el límite es L, sólo argumentan intuitivamente sus respuesta. Según Claros (2010), algunas de estas dificultades se deben a que los alumnos tienen preferencia por métodos procedimentales frente a métodos conceptuales.

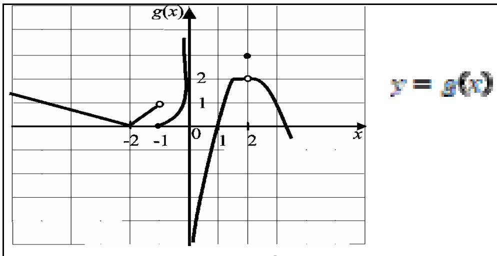
 **Gráfica3**	3. Si la variable independiente tiende a crecer (tiende a $+\infty$), a) ¿cuál es explicación que puede dar sobre el hecho de que la función también tiende a infinito? b) ¿Qué significa que la función tienda a $+\infty$?

Para la gráfica 3. Se espera que los alumnos identifiquen que las imágenes de la función crecen a medida que la variable independiente tiende a crecer, ya que esto se corresponde con la definición intuitiva del concepto de límite infinito. También, pueden mencionar que la gráfica no es acotada, que no es posible determinar un cierto número, para todo valor arbitrario dado. A partir del cual, la diferencia de la función y un cierto número real sea menor que el valor dado arbitrariamente. Luego del trabajo de los equipos, se encontraron las siguientes respuestas:

E.1 a) Cuando toma valores positivos la gráfica crece. **b)** La gráfica crece.

E5 a) Hay una correspondencia entre la variable independiente y la función. **b)** El valor de la función incrementa.

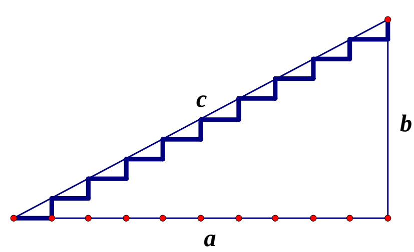
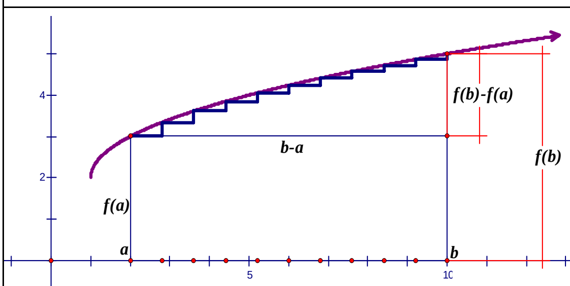
La mayoría responde que es la gráfica la que crece, implícitamente está la idea de crecimiento de las imágenes.

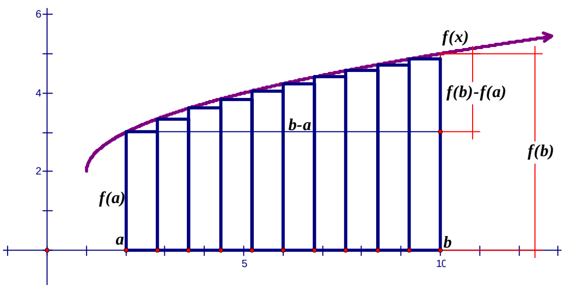
 **Gráfica 4**	4.- a) ¿ $\lim_{x\to 2} g(x)$? b) ¿ $\lim_{x\to 0} g(x)$? 5. a) ¿Es continua la función en los puntos $x = -2$, $x = 2$?, b) ¿Qué valor alcanza la función en cada uno de los puntos indicados anteriormente?

En relación a la gráfica 4. Se plantean preguntas con la finalidad de identificar si los alumnos diferencian las condiciones para la existencia de límite y para la continuidad puntual, si el alumno reconoce que la existencia de límite es sólo una de las condiciones para la continuidad en este caso puntual.

Luego del trabajo de los equipos, se encontró que en los puntos donde la función no es continua, ellos tuvieron dificultades para determinar el límite, este se debe según Claros (2010) por la restricción excesiva de la funciones que generalmente son tratadas para ejemplificar casos de continuidad.

ACTIVIDAD 4. Se pretende que el alumno haga uso en un primer momento de la intuición sobre el concepto de límite al infinito, para identificarlo en la representación dada y después caracterizarlo a partir de establecer que el límite de las curvas escalonadas a medida que la división se incremente tiende al segmento de curva.

<table>
<tr><td colspan="2">Actividades específicas:</td></tr>
<tr><td></td><td>Caso 1: Si consideramos un triángulo rectángulo como el que se muestra en la figura, y pensamos en dividir el cateto a en un número n creciente (al infinito) de partes iguales, y construimos la curva escalonada, entonces, a pesar de que la curva escalonada está cada vez más cerca de la hipotenusa, en la situación límite de este proceso infinito, ¿ocurre que la curva escalonada sea igual a la hipotenusa?</td></tr>
<tr><td></td><td>Caso 2: Si consideramos un segmento de la curva $f(x)$, como la que se muestra en la figura, y pensamos en dividir el intervalo $[a,b]$ en un número n creciente (al infinito) de partes iguales, y construimos la curva escalonada, entonces, a pesar de que la curva escalonada está cada vez más cerca de la curva de $f(x)$, en la situación límite de este proceso infinito no ocurre que su longitud igual sea igual a la longitud de curva. ¿Qué explicación le das a esta situación?</td></tr>
</table>



Caso 3: En cambio, si consideramos un segmento de la curva de *f(x)*, y pensamos en dividir el intervalo [*a*, b]en un número *n* creciente (al infinito) de partes iguales, y construimos los rectángulos bajo la curva como se muestra en la figura, entonces, a medida que el número de divisiones crece, la suma de las áreas de los rectángulos se aproxima más al área bajo la curva. Así, en la situación límite de este proceso infinito, la suma de las áreas de los rectángulos es igual al área bajo la curva en dicho intervalo. ¿Cuál es la explicación que se puede dar en cada caso?

- ❖ Para el primer caso se pretendía que los alumnos identificaran dos situaciones 1. Que en la situación límite del proceso de división del cateto adyacente, las curvas escalonadas convergen a la hipotenusa. En este caso, habrán identificado un caso particular de límite al infinito. 2. Por otra parte, se esperaba que los alumnos, identificaran que las longitudes de las curvas escalonadas permanecen constantes, por lo que, podían concluir que el hecho de que haya límite no significa que coincidan o lleguen a coincidir las longitudes de las curvas escalonadas y la longitud de la hipotenusa.

En la mayoría de los casos no se llegó a lo que nosotros esperábamos, pues encontramos que los alumnos tienen dificultades para establecer una convergencia. Algunas de las respuestas dadas en relación a la pregunta ¿ocurre que la curva escalonada sea igual a la hipotenusa? son:

- ➢ No, porque aun cuando los escalones sean cada vez más pequeños siempre existirá un hueco entre ellos y no permitirá la igualdad entre la curva escalonada y la hipotenusa.
- ➢ No ocurre eso, porque la curva escalonada será igual a la hipotenusa si tendiera al infinito el número de divisiones del cateto adyacente.

Observamos que en este caso, los estudiantes no identifican que hay un proceso infinito como tal, y que el proceso infinito puede estar relacionado con la situación límite. En realidad se trata de un caso de límite al infinito, y notamos que los estudiantes en sus argumentaciones, hay ideas intuitivas sobre la convergencia de las curvas escalonadas. Sin embargo, los alumnos no logran identificar este caso de límite.

De acuerdo al análisis, podemos concluir, que los alumnos en general tienen dificultades para interpretar situaciones en distintos registros de representación y en específico, les es difícil identificar el concepto de límite al infinito en el registro gráfico. Según (Duval, 1993), un primer paso para la comprensión y asimilación de los conceptos, es reconocerlos en distintos registros de representación.

Por otra parte, se observa que los alumnos tienen dificultades para utilizar las condiciones que exige el concepto de límite al infinito, en el estudio de esta situación de tipo geométrica.

- ❖ Para el segundo caso la actividad estuvo puesta, para que los alumnos establecieran analogías en relación con los contenidos que ya habían trabajado en cursos de Cálculo, es importante señalar, que los alumnos podían intuir que a partir de la inscripción de rectángulos, se podía haber generado la curva escalonada, y que a medida que se incrementaba la división, los segmentos que las conforman iban decreciendo, esa podía ser otra vía para la explicación a la situación, ya que este razonamiento lleva implícito la noción de límite al infinito.

Algunas respuestas encontradas son:

- La curva escalonada nunca coincidirá con el segmento de curva, porque aun cuando los escalones sean cada vez más chicos existirá un hueco entre ellos y no permitirá la igualdad entre la curva escalonada y el segmento de curva de $f(x)$.
- A pesar de que tengamos infinidades de divisiones del intervalo, la curva escalonada nunca será igual al segmento de curva.
- En el proceso infinito no ocurre que la curva escalonada sea igual a la curva porque sólo se toma en cuenta un intervalo para dividirlo en n partes iguales y como no se toma en cuenta la otra parte de la función eso hace que la curva escalonada no sea igual a la curva $f(x)$ definida en el intervalo dado.

En este caso, en las argumentaciones se aprecia que los alumnos identifican dos situaciones, la convergencia de la curva escalonada hacia el segmento de curva, y las longitudes de éstas.

- Para el tercer caso se pretendía que los alumnos reconocieran que la integral definida era un caso particular de límite al infinito, a partir de interpretar la situación que se les presenta. Se esperaba también, que los alumnos identificaran que la sucesión de curvas escalonadas converge al segmento de curva definida en el intervalo dado, que en este caso, ese sería un segundo ejemplo de límite al infinito.

Algunas respuestas encontradas:

- La suma de las áreas de los rectángulos llega a coincidir con el área bajo la curva, en la situación límite del proceso infinito, porque los triángulos que sobran al dibujar los rectángulos son cada vez más pequeños al aumentar el número de rectángulos en este intervalo.
- A medida que la división del intervalo tiende a ser infinito cada vez más se agota el área de la región bajo la curva, ya que va habiendo menos espacios entre la curva y los rectángulos por eso cuando tiende a infinito, el área de los rectángulos es igual al área bajo la curva.

En relación al análisis anterior, podemos concluir que en los estudiantes prevalece la idea de infinito potencial, argumentan que la curva escalonada no converge al segmento de curva de $f(x)$. Sin embargo, cuando reflexionan sobre el área, ellos dicen que en el proceso infinito la suma de las áreas de los rectángulos coincide con el área bajo la curva en el intervalo dado, en este caso el proceso infinito tiene una situación límite.

Anteriormente hemos mencionado las dificultades encontradas en esta investigación con respecto al tema de límite al infinito y hemos en su momento dado las características de éstas. A continuación enlistamos las dificultades en torno al concepto de límite identificadas en esta investigación, para ello nos apoyamos como lo dijimos al principio en la investigación que realiza Claros (2010). **Dificultades respecto al análisis matemático del límite al infinito:** Para utilizar las condiciones que establece la definición, no utilizan correctamente los cuantificadores, para la aplicación del concepto en la justificación de un caso particular. **Dificultades específicas:** Para establecer y usar analogías, en la interpretación de la definición, para determinar el límite

utilizando la representación gráfica, leer e interpretar las gráficas asociadas al concepto, para analizar límites laterales, preferencia por métodos procedimentales frente a métodos conceptuales.
Dificultades en torno al lenguaje del límite: Idea de infinito potencial, para establecer la convergencia: en la actividad 4, los alumnos establecen que la curva escalonada no llega a coincidir con el segmento de curva aun cuando los escalones sean cada vez más chicos existirá un hueco entre ellos y no permitirá la igualdad entre la curva escalonada y el segmento de curva de *f(x). [Dificultad específica de convergencia]*.

CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Las actividades relacionadas al concepto de límite al infinito propuestas en distintos registros de representación, permitió identificar algunas dificultades tales como: Justificar el límite, usar los cuantificadores, aplicar las condiciones del concepto, dificultad para establecer y usar analogías, identificar las condiciones de la definición del concepto, dificultad para generalizar, para determinar el límite utilizando la representación gráfica, preferencia por métodos procedimentales frente a métodos conceptuales, los alumnos identifican las condiciones del concepto de límite y no la aplican correctamente en casos concretos, dificultad de análisis matemático, identificar el concepto de límite al infinito en la representación geométrica, no identifican la presencia del concepto.
La mayoría de las dificultades encontradas, pueden deberse a que en los estudiantes generalmente prevalecen concepciones informales del concepto, solo ideas intuitivas y no se ha logrado pasar a la parte formal del concepto.
Las dificultades y su caracterización en torno al concepto de límite al infinito, son parte de la primera etapa de un proyecto de investigación mucho más amplio en desarrollo y que está relacionado con la elaboración de una estrategia metodológica para la enseñanza - aprendizaje del límite al infinito.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*.4. (3), 237-265.

Claros, F. J. (2010). *Limite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Tesis de doctorado. Universidad de Granada.

Duval, R. (1993) *Lecturas en didáctica de las matemáticas: escuela francesa. Semiosis y noesis*. CINVESTAV-IPN. México.1993. p. 119-137.

Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M. (2006). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral Esperanza. Prov. de Santa Fe (Argentina).

Galeana, J. (2010). *Explorando el concepto de infinito en situaciones límite con profesores de Bachillerato.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

García, M. (2010) Una alternativa para trabajar con límites especiales. *Revista de didáctica de las matemáticas*. 75, 105-120. Guerrero, México.

Páez, R. (2005). *Reconstrucción del concepto de límite: un estudio de caso.* Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia.