

# **APORTES PARA EL ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN**

Claudia Zang. Gretel Fernández von Metzen. Natalia León

Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones  
Posadas. Prov. de Misiones. Argentina.  
[claudiamzang@gmail.com](mailto:claudiamzang@gmail.com)

## **RESUMEN**

Numerosos estudios resaltan la importancia de las herramientas metacognitivas en la enseñanza, sea para la construcción de significados o como instrumentos para determinar la estructura cognitiva de los estudiantes. Este trabajo presenta algunas reflexiones sobre los conceptos y procedimientos relativos a las Ecuaciones Diferenciales (ED) que los alumnos de las carreras de los profesorados en Matemática y en Física tienen disponibles una vez finalizadas las instancias formales de instrucción. Para reconocer cuáles son esos conocimientos se utilizaron las herramientas metacognitivas. El análisis realizado refleja algunas dificultades que tienen para obtener información a partir de la geometría de las soluciones, asimismo la preferencia por los métodos analíticos.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales, aprendizaje significativo, herramientas metacognitivas

## **INTRODUCCIÓN**

Las Ecuaciones Diferenciales (ED) son una herramienta poderosa en la construcción de modelos matemáticos, tanto para las ciencias experimentales como para las sociales. Las autoras del presente documento -docentes relacionadas a la enseñanza de ED en las Facultades de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) y de Ciencias Económicas (FCE) dependientes de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM)- han notado las dificultades que tienen los alumnos en utilizar conceptos como derivada, función exponencial, proporcionalidad, ecuaciones, para resolver problemas de aplicación de las ED. Es más, cuando logran formular los modelos para las situaciones planteadas en los problemas, estos objetos escasamente son movilizados para extraer información de lo producido.

Desde la investigación educativa se resalta que es hora de reformular las prácticas tradicionales que focalizan su atención en procedimientos y ardides especializados para resolver ED, ya que gracias a las nuevas tecnologías los enfoques cualitativo y numérico no tienen impedimentos en resolver las ED que aparecen habitualmente en las aplicaciones, algunas no lineales y con

métodos de resolución (si los tienen) no encuadrados dentro de los modelos trabajados en clase. Paralelamente, resaltan que es prioritario que los estudiantes tengan las herramientas necesarias para la formulación de ED y la interpretación de sus soluciones, para ello recomiendan trabajar en forma sistemática con situaciones que integren los enfoques analítico, cualitativo y numérico.

En virtud de las dificultades de conceptualización y de aprendizaje que se recopilan y analizan en numerosos documentos referentes al tema y a las que se han podido observar en las propias prácticas docentes, resulta ineludible reflexionar sobre lo que ocurre con los estudiantes durante el proceso de aprendizaje. A tal efecto pareciera pertinente recurrir a los lineamientos teóricos que ofrece la psicología cognitiva, en particular se consideran útiles las posibilidades que brinda el uso de las herramientas metacognitivas en la enseñanza: mapas conceptuales, diagramas UVE y entrevistas clínicas.

En el presente artículo se reflexiona sobre los resultados hallados al utilizar la entrevista clínica como herramienta que posibilita vislumbrar los conocimientos disponibles en la estructura cognitiva de los alumnos. Apoyados en este instrumento, se espera detectar si los alumnos reconocen los procedimientos cualitativos como métodos válidos para obtener información de la solución de una ED, y si comprenden la geometría y el comportamiento a corto y largo plazo de las soluciones reflejados en ellos. Simultáneamente, se pretende evaluar si, una vez finalizada las instancias de instrucción formal en el tema, pueden resolver problemas en el contexto de las ED, extrayendo información de los modelos involucrados en éstos sin la necesidad expresa de encontrar en forma analítica alguna función solución.

## MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En esta sección se presentan cuáles fueron los fundamentos teóricos que guiaron el trabajo, asimismo una breve reseña sobre el estado del arte en lo relativo a la enseñanza y aprendizaje de las ED.

Bajo el punto de vista cognitivo, la finalidad del proceso enseñanza-aprendizaje consiste en plantear situaciones de aprendizaje que involucren a los alumnos en forma activa, propiciando aprendizajes significativos, es decir, que logren adquirir nuevos saberes estableciendo relaciones con aquellos conocimientos ya incorporados en su estructura cognitiva, y que luego, sean capaces de transferirlos a nuevas situaciones. El concepto de aprendizaje significativo es el punto central de la teoría de Ausubel y en el marco de la misma es esencial que el sujeto tenga disponible en su estructura cognitiva los subsumidores<sup>1</sup> adecuados sobre los cuales anclar futuros aprendizajes de manera que adquieran significado (Ausubel et al., 1983). Desde esta postura, aprender es un proceso de contraste, de continua construcción y revisión de los esquemas de conocimientos, por

---

<sup>1</sup> El subsumidor es un concepto, una idea, o una proposición ya consolidados en la estructura cognitiva del estudiante, que puede servir de andamiaje para la nueva información, de modo que ésta al relacionarse con la ya existente adquiera significados para el individuo.

tal razón, aprender no implica la adquisición de verdades acabadas sino de elaboraciones y reelaboraciones que hace cada sujeto de manera personal.

De las investigaciones realizadas por Ausubel, Novak y Gowin emergen importantes principios a ser considerados en la Educación en general y en particular en la enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Estos investigadores señalan la importancia de usar las herramientas metacognitivas en la instrucción. Éstas son los mapas conceptuales, los diagramas UVE y las entrevistas clínicas.

Los mapas conceptuales son considerados una representación válida de la estructura conceptual o proposicional de un individuo, ya que se puede acceder, de manera indirecta, a las representaciones que posee al estudiar las relaciones que hace explícitas en un mapa conceptual: en ellos es posible observar no sólo las relaciones que el sujeto señaló entre los diferentes conceptos, sino también el estatus que les otorga a los mismos. A través de las diferentes relaciones jerárquicas que los estudiantes establecen en el mapa se puede tener una idea de cómo, para ellos, unos conceptos incluyen o subsumen a otros o cómo éstos son a su vez subsumidos por otros. Concretamente, el que los mapas conceptuales ofrezcan una especie de imagen o “radiografía” de la estructura conceptual o proposicional de un individuo, conlleva a que puedan ser usados como una herramienta de evaluación, entendida ésta como un proceso que permite la concientización de los aprendizajes más que como una mera instancia de acreditación. Por último, en virtud de que contienen representaciones exteriorizadas de proposiciones, son instrumentos útiles para poner en evidencia concepciones espontáneas, caracterizadas éstas por ser incorrectas desde el punto de vista científico, pero apropiadas desde la visión de los alumnos, es decir, no se les atribuye connotaciones negativas (Novak y Gowin, 1988).

Los diagramas UVE, que fueron propuestos por Gowin para ayudar a los estudiantes a comprender la naturaleza del conocimiento y de su construcción, permiten analizar y representar los diferentes elementos implicados en la estructura de un cuerpo de conocimientos. Estos elementos están relacionados entre sí, justamente esa propiedad es la que otorga a los diagramas UVE su efectividad como herramienta de evaluación y como instrumento para revelar concepciones espontáneas, ya que si estos vínculos no están bien establecidos en la estructura intelectual del sujeto, quedará plasmado en el diagrama (Novak y Gowin, op cit). Toda elaboración de significados comienza con el deseo de indagar sobre alguna inquietud relevante para el sujeto, fruto de la observación de objetos o eventos (vértice del diagrama UVE), seguido del registro y la transformación de los datos, la formulación de declaraciones de conocimiento y de valor (lado derecho o metodológico). También se explicitan la cosmovisión y la filosofía que orientan la investigación, así como la teoría en que se sustentan las relaciones que puedan establecerse entre los diferentes principios y conceptos (lado izquierdo o conceptual) (Novak, 1991). Una descripción más detallada de los diferentes aspectos que hacen a los diagramas UVE se muestra en la figura 1 que fue adaptada de Novak (op. cit.).

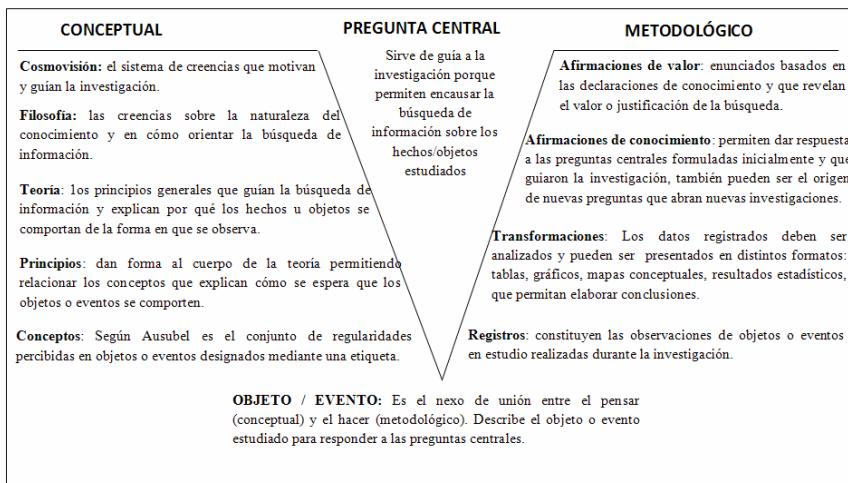


Fig 1. V de Gowin: esquema que muestra los diferentes elementos implicados en la construcción del conocimiento

Adherir a los principios del aprendizaje significativo implica que los docentes tengan acceso a los conocimientos previos relevantes de los estudiantes para la planificación de una estrategia de enseñanza acorde a las premisas del constructivismo; el punto de partida para la instrucción deben ser los conocimientos que los alumnos efectivamente tienen disponibles y que están fuertemente establecidos en su estructura cognitiva de modo que puedan funcionar como anclaje para el aprendizaje de los conceptos que se pretenden enseñar. Los profesores no pueden determinar la presencia o ausencia de los subsumidores relevantes simplemente aplicando en forma mecánica un cuestionario, es necesario delimitar la estabilidad y claridad de las ideas que tiene el estudiante, así como sus experiencias previas con los conocimientos vinculados a la materia que es objeto de enseñanza. Las entrevistas clínicas se revelan como un instrumento especialmente apto para determinar cuáles son esos conocimientos así como para la detección de concepciones alternativas en los estudiantes. Esta caracterización de los conocimientos las realiza el docente en forma indirecta a partir de la información que proveen los alumnos en la entrevista.

Las entrevistas clínicas fueron usadas originalmente por Piaget en las investigaciones psicológicas que llevó a cabo para caracterizar el desarrollo intelectual de los niños. Posteriormente, Novak las readaptó y comenzó a usarlas con fines educativos en la Universidad de Cornell, tanto para determinar cuáles son los conocimientos previos como para cotejar la evolución de los estudiantes a lo largo del proceso de enseñanza (Parolo et al, 2004).

Para realizar entrevistas eficaces es necesario que el entrevistador tenga un amplio conocimiento sobre el tema a indagar de manera de que pueda establecerse una retroalimentación entre la información que provee el entrevistado y los objetivos esperados con la entrevista.

En la bibliografía se sugiere principalmente su uso como instrumento para realizar evaluaciones diagnósticas con el fin de caracterizar los conocimientos previos de los alumnos sobre un tema en particular. En el presente trabajo se optó por utilizarla como una herramienta de evaluación de aprendizajes (no como una instancia de acreditación).

Los resultados de las investigaciones realizadas en forma independiente por Artigue (1995a), Moreno y Azcárate (2003), Habre (Habre 2000 y 2003 citado por Dullius 2009), destacan que la enseñanza tradicional de las ED se caracteriza por un estudio formal de las mismas en el que se enfatiza el tratamiento algebraico. En su trabajo, Artigue (op. cit.) describe cuáles son las diferentes dificultades ligadas al aprendizaje de las ED que tienen los estudiantes, a su vez, identifica una serie de restricciones que dificultan la extensión del estudio de ED hacia los enfoques cualitativos y numéricos. Tales restricciones operan en tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica (Artigue, 1995b). También señala que los estudiantes valoran más los métodos analíticos-algebraicos en detrimento de los enfoques cualitativos y numéricos de resolución por otorgarles menor jerarquía a estos últimos. Esta misma apreciación la realiza Habre (op. cit.), quien condujo una investigación con estudiantes que habían tomado un curso de ED en el que se enfatizaba el estudio de las mismas siguiendo un enfoque cualitativo conjuntamente con actividades desarrolladas con software matemático, aún así los estudiantes se mostraron más proclives a usar las técnicas de resolución analítica. La actitud de los estudiantes la explica manifestando que ellos asumen que el tratamiento simbólico de las funciones es más completo que el tratamiento gráfico, creencia que, según el autor, probablemente tenga sus orígenes en instancias de aprendizaje de las matemáticas anteriores que hayan experimentado.

En cuanto a Moreno y Azcárate (op. cit), en su investigación se propusieron indagar sobre las concepciones y creencias de los profesores universitarios sobre la enseñanza de ED y como éstas influyen o determinan las características de sus prácticas docentes. Al respecto, mencionan que los propios docentes admiten tener dificultades para reconciliar las técnicas con el estudio de los modelos, en virtud de que las ED que aparecen en las aplicaciones son bastante complicadas y generalmente no se pueden resolver analíticamente. Esto constituye uno de los desencadenantes de que en las clases solamente se aborde el estudio de algunos modelos típicos y relativamente sencillos, y que se opte por un tratamiento focalizado en las cuestiones técnicas por resultar más fácil y cómodo tanto a los alumnos como a los docentes. También indican que existen varios factores que influyen en que aún persista la enseñanza tradicional de las ED (caracterizada por seguir un enfoque algebraico) a pesar del avance que significaron las nuevas tecnologías en este ámbito; entre ellos señalan las creencias de los profesores sobre el pobre nivel de competencias matemáticas de los estudiantes, la concepción formalista de las matemáticas en general y en particular de las ED (se confiere un estatus infra-matemático a los gráficos y a los métodos numéricos), el miedo de los docentes a utilizar contenidos específicos de la matemática aplicada en detrimento de los que proporciona la matemática pura (creen que las “matemáticas de verdad” son las matemáticas puras), y el poco tiempo que destinan al replanteamiento de la materia que dictan por dedicar mayor tiempo a otras actividades institucionalmente más apreciadas (investigación y gestión).

Por otra parte, la bibliografía específica que se maneja en el ámbito académico, resalta los adelantos que significaron las nuevas tecnologías para el estudio cualitativo y numérico de las ED: [...] “el énfasis tradicional en ardides y procedimientos especializados para resolver ED ya no es apropiado, dada la tecnología disponible” [...] (Blanchard et al., 1998, p. v), al mismo tiempo, se indica que las ED más importantes no son lineales y que para su resolución son más efectivos los procedimientos cualitativos y numéricos que los analíticos.

En virtud de lo señalado en las investigaciones citadas precedentemente, se estimó conveniente diseñar una entrevista clínica que permita evaluar de qué manera los estudiantes ponen en juego el enfoque cualitativo como medio para la resolución de ED, paralelamente observar el estatus o jerarquía que éstos atribuyen a aquellos métodos no cuantitativos según el problema de estudio propuesto, determinar si son capaces de interpretar la información presente en determinados modelos y por último, conocer el significado que confieren a los conceptos más generales o inclusores vinculados a las ED. Es decir, se percibió en las entrevistas clínicas un recurso substancial para la evaluación de aprendizajes de los alumnos, y a su vez, como herramienta valiosa de información para los docentes involucrados en este trabajo, ya que la misma ha sido considerada fuente de futuras reflexiones y reformulaciones de algunas prácticas pedagógicas.

#### **ASPECTOS METODOLÓGICOS Y CONTEXTO EDUCATIVO**

La metodología es esencialmente cualitativa. Para la evaluación de cuáles son los conceptos que los alumnos efectivamente han incorporado a su estructura cognitiva y que tienen disponibles al momento de realizar la entrevista, se ha diseñado un instrumento que ha sido usado como material de apoyo para la mencionada entrevista. En el diseño de dicho instrumento se tomó como referencia la metodología propuesta por la Ingeniería Didáctica y los planteamientos realizados desde las diferentes investigaciones analizadas (Artigue, 1995b), en particular se retomaron algunas cuestiones trabajadas por Habre (op cit.). Entre los análisis preliminares de la Ingeniería Didáctica, se han tenido en cuenta los objetivos de cada uno de los tópicos incluidos en la entrevista, los posibles procedimientos de resolución, las eventuales dificultades que podrían presentarse, etc.

De la actividad desarrollada participaron 8 alumnos de los profesorados en Matemática y en Física de la FCEQyN correspondiendo uno a la carrera de Profesorado en Física, cuatro al Profesorado en Matemática y los demás son alumnos de ambos profesorados. Fueron elegidos atendiendo a un único criterio: que todos hayan cursado la asignatura Análisis IV. Dicha materia se encuentra en el primer cuatrimestre del tercer año de los planes de estudio de ambas carreras, y su programa se centra en el estudio de las ED ordinarias, sistemas de ED e introducción a las ED en derivadas parciales. La totalidad de los entrevistados había obtenido la condición de alumno regular con trabajos prácticos aprobados, e incluso, una de las alumnas participantes había aprobado el examen final de la materia. La mitad de ellos cursó la asignatura en el año 2011 y la otra mitad en el 2012. La entrevista se realizó en forma individual a cada estudiante y en la presencia de las dos entrevistadoras, a finales del segundo cuatrimestre del ciclo lectivo 2012.

La entrevista asumió la forma de entrevista semi-estructurada (Kornblit, 2007; Díaz, 2010) dado que al momento de su planificación se pensó que en el transcurso de la misma se harían eventuales modificaciones del protocolo en función de las necesidades advertidas por las entrevistadoras. Para su diseño se tuvieron en cuenta las recomendaciones hechas por Ricardo Chrobak de la Universidad Nacional del Comahue, quien señala que es conveniente iniciar la entrevista con preguntas generales que no admitan respuestas dicotómicas y que a medida que se avanza, se deben incluir preguntas de mayor profundidad y más detalladas sobre el tema que se desea indagar. Asimismo, para la planificación y análisis de las entrevistas se ha recurrido a la elaboración de diagramas UVE y mapas conceptuales, los cuales se han utilizado como guía para la formulación de las preguntas que se incluyeron en las entrevistas. El mapa conceptual elaborado se muestra en el anexo.

#### **ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI: OBJETIVOS ESPERADOS Y RESPUESTAS DADAS POR LOS ALUMNOS**

En este apartado se discuten los aspectos más sobresalientes que se desprenden de las entrevistas realizadas. En este sentido, la pregunta inicial de la misma, “*Con sus propias palabras, ¿cómo definiría una ecuación diferencial?*”, tenía por objeto evaluar si los alumnos realmente podían explicar con sus propias palabras lo que representa una ED. Concretamente, esta pregunta se realizó porque se adhiere a la postura de que un concepto realmente es aprendido cuando el sujeto puede traducir en sus propias palabras las del autor. En cuanto a las respuestas dadas por los entrevistados, en líneas generales, todos fueron capaces de explicar que una ED es una ecuación que relaciona una función con sus derivadas, aunque ninguno de ellos recalcó explícitamente que la función en cuestión es desconocida, es decir, la incógnita de la ED.

La segunda pregunta que formaba parte del instrumento en el que se apoyó la entrevista fue: “*¿Qué significa para Usted la solución de una ED?*”. Con ella se esperaba detectar hasta qué punto los alumnos podían relacionar las ED con las ecuaciones en general. A grandes rasgos se pudo observar que los alumnos tienden a relacionar la solución con el orden de la ED, es decir, mencionan que de acuerdo al orden se va a tener que buscar una solución particular y después una solución general. En este punto también hablan de soluciones implícitas y soluciones explícitas. A grosso modo, no hacen explícita la relación que existe entre la ecuación y la solución, es decir, no remarcán que una función para ser solución debe verificar la igualdad, de forma análoga a las ecuaciones algebraicas.

La siguiente cuestión indagada apuntaba a recabar información sobre la importancia que otorgan los alumnos a los diferentes enfoques para dar solución a una ED (analítico, numérico, cualitativo). A continuación se transcribe la pregunta formulada: “*Cuando se te pide que resuelvas una ecuación diferencial ¿Qué se te viene a la mente?*” Todos los alumnos mencionan que en primer lugar identificarían el orden de la ED y luego el tipo, para ver qué método de resolución (algebraico) usarían. Ninguno de los alumnos menciona que se puede obtener

información de la solución a partir del campo de direcciones o de una gráfica. De aquí se infiere que tienen muy internalizados los métodos de resolución analítica.

Como parte de la entrevista, se les presentó en una hoja impresa, la consigna que se muestra en la figura 2. Con ella se esperaba que los alumnos pudieran visualizar la importancia del campo de direcciones para obtener información global de la solución y el comportamiento a largo plazo de la misma sin la necesidad de resolver la ED, también que reconozcan la existencia de soluciones de equilibrio y el tipo de estabilidad que presentan.

El campo de direcciones de la ecuación diferencial  $y' = 1 - y^2$  es:

a) Dibujar a mano la solución del PVI  $y' = 1 - y^2$ ,  $y(0) = 3$ . Analizar el comportamiento de la solución cuando  $t \rightarrow \infty$  b) La ecuación diferencial dada ¿tiene soluciones de equilibrio? Si es afirmativa su respuesta, identifíquelas y determine si son estables o inestables (fundamentar la respuesta).

La mitad de los alumnos entrevistados afirmó que no podían graficar la solución que pasa por la condición inicial dada porque no conocen la solución de la ED. Una de las entrevistadoras insistió haciendo preguntas sobre la relación que hay entre la curva solución y la condición inicial, a lo cual los alumnos respondieron que la curva solución pasa por ese punto (el indicado por las condiciones iniciales) y que las flechas del campo de direcciones apuntan para donde va la solución, ninguno menciona el hecho de que los segmentos que conforman el campo de pendientes tienen que ser tangentes a la misma. Al preguntarles explícitamente sobre el significado del campo de direcciones, reconocen que éste especifica la pendiente de las soluciones en cada punto, aunque ninguno de ellos menciona que lo usaría como método para resolver una ED.

Con respecto a las dificultades observadas en este punto, uno de los alumnos grafica dos curvas que atraviesan los segmentos del campo de direcciones e incluso las soluciones de equilibrio; de ello se puede inferir la falta de comprensión del significado de una solución de equilibrio y de la interpretación geométrica de la derivada (como pendiente de la recta tangente o como pendiente de una función). Con respecto a las soluciones de equilibrio mencionan que pueden ser estables o inestables según si todas las soluciones convergen hacia ellas o divergen de ellas, sin embargo ninguno reconoce en éstas las soluciones constantes de la ecuación. Una sola alumna, cuando se le pregunta qué se observa a través de los segmentos del campo de direcciones, menciona que las

flechitas se dirigen en la parte superior hacia 1 y en la parte inferior hacia -1 y luego, al revisar la ED reconoce que éstos son los valores que la anulan.

Como parte del material en el que se apoyó la entrevista, también se les presentó un problema en que se brinda cierta información referente a un fenómeno de la vida real y se solicitó que formularán una ED para el mismo, completaban esta situación varios modelos posibles (algunos incorrectos) y se solicitaba que decidían cuál consideraban más apropiado. El enunciado fue entregado por escrito y se muestra en la figura 3. Esta actividad apuntaba a que los alumnos interpreten la información disponible dada en lenguaje coloquial y luego, lo traduzcan al simbólico para construir un modelo que se ajustara a la información presentada en el problema.

Seis estudiantes plantean la ecuación correcta, es decir,  $\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_m)$ , y los otros dos formulan

un modelo incorrecto dado por:  $\frac{dT}{dt} = T(t) + T_m$ .

Con respecto a la segunda parte de esta consigna, cuando se les solicita que determinen en qué tiempo la temperatura alcanza los 21°C, tres de los alumnos apelaron a resolver analíticamente la ED y utilizar las condiciones iniciales para resolver el problema, y así con la solución en mano, cumplir la tarea pedida. Uno de los entrevistados, en principio no consiguió recordar la técnica de separación de variables, situación que en el transcurso de la entrevista se revierte, con lo cual elige la opción a). Una alumna, no relaciona esta parte de la actividad con lo trabajado en el ítem i), pues afirma (sin resolver) que se puede resolver directamente ya que se tienen dos temperaturas y dos tiempos con lo que se puede hallar la razón de cambio; no percibe el hecho de que se está frente a un fenómeno que involucra dos variables continuas y con la propuesta que hace les estaría dando un tratamiento discreto y, de este modo, solo puede obtener la razón de cambio media, insuficiente para resolver el problema. Los demás, no responden a este punto. Llama la atención que tampoco se valen de la información que se les presentó en la misma consigna, puesto que el tiempo solicitado se puede conocer en forma exacta o en forma aproximada a partir de los modelos propuestos por las entrevistadoras. En caso de que se opte por determinarlo en forma exacta, hay que, en primer lugar, reemplazar las condiciones iniciales y determinar la constante  $k$  que aparece en los modelos analíticos sugeridos, previa decisión de cuál es el modelo adecuado, y en segundo lugar, realizar las manipulaciones algebraicas necesarias. Si por el contrario, se recurriría a estimar en forma aproximada dicho tiempo, bastaba decidir cuál o cuáles gráficos constituyan modelos apropiados para la situación y a partir del trabajo sobre los mismos extraer la información requerida en la consigna (a través de la lectura del gráfico de la Figura 3).

Entre los alumnos que no resolvieron analíticamente la ED formulada, es notorio que afirman que la función que describe la temperatura debe ser exponencial pero, en general, no tienen suficientes argumentos para justificar la postura adoptada: desde el punto de vista cualitativo y a la luz del fenómeno involucrado, no visualizan que la relación de proporcionalidad que hay entre la razón de cambio de la temperatura del cuerpo con la diferencia entre su temperatura y la del medio implica que en los puntos donde dicha diferencia es pronunciada se tendrá una pendiente grande y que a medida que esa diferencia se haga más y más pequeña (cuando la temperatura del cuerpo y

del medio se estabilicen) la pendiente tenderá a cero, con lo cual el modelo lineal debe ser descartado (en él la pendiente es siempre la misma).

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea, que es la temperatura ambiente. i) Si  $T(t)$  representa la temperatura del objeto al tiempo  $t$ ,  $T_m$  es la temperatura constante del medio que lo rodea y  $dT/dt$  es la razón con que cambia la temperatura del cuerpo, proponga un modelo matemático que describa la situación dada. ii) De acuerdo al modelo planteado en i), y la situación problemática dada a continuación:

-Al sacar una torta del horno, su temperatura es 150°C. Después de 3 minutos, de 94°C. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 21°C? Elija cuál de los siguientes modelos es el que mejor representa la temperatura de la torta a medida que pasa el tiempo:

a)  $T(t) = (150^\circ C - 21^\circ C)e^{kt} + 21^\circ C \quad T(0) = 150^\circ C$

b)  $T(t) = (150^\circ C - 21^\circ C)e^{kt} \quad T(0) = 150^\circ C$

c)  $T(t) = (150^\circ C - 21^\circ C)kt + 21^\circ C \quad T(0) = 150^\circ C$

d)

e)

f)

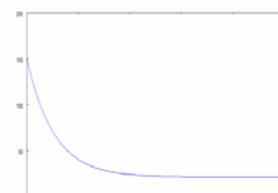
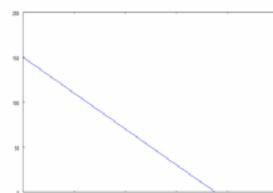
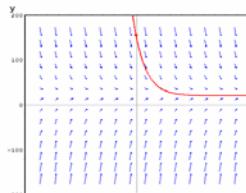


Fig. 3. Situación presentada a los alumnos

Cuando, se les ha instado a decidir cuál de las dos fórmulas que involucran modelos exponenciales es la más apropiada, solamente un alumno se muestra seguro al elegir el modelo dado en a) puesto que, según él, a medida que pasa el tiempo la temperatura de la torta será igual a la del medio ambiente y eso se refleja en el hecho de que cuando el tiempo tiende a infinito, el término exponencial en dicha fórmula tiende a cero y la función que da la temperatura está gobernada por el término constante e igual a 21°C. Otro alumno, recurre a las condiciones iniciales y observa que el modelo dado en b) ofrece una contradicción cuando éstas son usadas en la función propuesta como solución, consecuentemente rechaza la opción b).

Con respecto a los modelos gráficos, se esperaba que los alumnos, en base a su experiencia cotidiana con fenómenos que involucren el enfriamiento de cuerpos, descarten el modelo lineal dado que el mismo implica que a intervalos regulares de tiempo se den cambios regulares en la temperatura. Si bien este argumento no fue mencionado por los entrevistados, todos se decidieron por los modelos presentados en d) y f) e indicaron que la temperatura de la torta, a medida que pasa el tiempo, se approxima a la del medio ambiente, y justamente esa propiedad es la que los lleva a rechazar el modelo presentado en e) pues afirman que según éste, la temperatura llega a tomar el valor cero, que contradice la situación que describe el problema.

## **REFLEXIONES FINALES**

Algunas reflexiones que se pueden realizar en base a la información emanada de las entrevistas tienen que ver con que se han obtenido indicios de que una reformulación de las prácticas habituales de enseñanza sería conveniente, puesto que, a pesar de haber trabajado con los enfoques numérico y cualitativo durante el cursado de la asignatura, los alumnos aún muestran predilección por el enfoque analítico, de ello se infiere que le otorgan un status superior que a los otros. Ello coincide con las investigaciones referidas al tema que indican que los alumnos creen que resolver cualitativamente un problema conlleva a una resolución incompleta del mismo, mientras que los métodos analíticos en que se obtiene una fórmula para la función que es solución de la ED, ofrecen una resolución completa. Al mismo tiempo, dadas las dificultades observadas para traducir información que se presenta en forma coloquial a un lenguaje simbólico y a las que se han observado para la interpretación de la información que proveen los diferentes modelos, se estima conveniente incorporar, como trabajo usual y cuando sea posible, tanto la interpretación previa del modelo para la anticipación del comportamiento de la solución como también la corroboración de que las soluciones encontradas en forma analítica coinciden con ese análisis a priori.

Más allá de las dificultades detectadas, las actividades desarrolladas dejan un efecto positivo en las docentes, puesto que, en líneas generales, los alumnos pudieron responder medianamente bien a las cuestiones en que fueron interrogados, aún cuando no se habían preparado específicamente para la entrevista. Es decir, como ésta se llevó a cabo a fines del segundo cuatrimestre, había pasado cierto tiempo desde que se había abordado el estudio de las ED (es más, como ya se mencionó, la mitad de los entrevistados cursó la asignatura Análisis IV en el año 2011) y los alumnos pudieron responder acertadamente muchas de las cuestiones en que fueron indagados. Sería un desafío como educadores, proponer actividades de aprendizaje que logren optimizar tanto la calidad como la cantidad de conocimientos que los estudiantes tienen disponibles una vez finalizado el cursado de las diferentes asignaturas.

## **REFERENCIAS:**

- Artigue Michèle (1995a). La enseñanza de los principios del cálculo. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, Michèle (1995b). Ingeniería Didáctica. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P., *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ausubel, D., Novak, J.; Hanesian, H. (1991) *Psicología Educacional, un punto de vista cognitivo*. 5ta. Reimpresión. México: Trillas.

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). *Ecuaciones diferenciales*. México: Thomson.

Díaz, E. (2010) *Metodología de la Ciencias Sociales*. Argentina: Biblos.

Dullius M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. Tesis doctoral. Burgos

Kornblit, A. (2007) *Metodología cualitativas en Ciencias Sociales. Modelos y procedimientos de análisis*. 2da impresión. Buenos Aires: Biblos.

Moreno Moreno, Mar y Azcárate Giménez, Carmen (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2). 265-280

Novak, J. D. y Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Novak, J. D (1991). Ayudar a los alumnos a aprender cómo aprender. La opinión de un profesor-investigador en *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 9 (3). 215-228

Parolo, M. E., Barbieri, L.M. y Chrobak, R. (2004) La metacognición y el mejoramiento de la enseñanza de Química Universitaria en *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 79–92

## ANEXO

