UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA APLICADA SOBRE PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

Daniela Cecilia Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
veigadaniela@yahoo.com.ar

RESUMEN

En este trabajo se exponen los resultados de una experiencia realizada en dos cursos de la Escuela Secundaria, referida a la aplicación de los conceptos de proporcionalidad y semejanza. Se enmarca el análisis de los mismos en la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. La cual se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas y la experimentación en la clase. Lo que permite la confrontación con el análisis a priori.
Para realizar el análisis preliminar, se contemplan las tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. Asimismo, se exploraron los contenidos curriculares y sus desarrollos en los libros de textos escolares que se usan con mayor frecuencia y finalmente, las concepciones de los alumnos referidos a los conceptos de razones y proporciones, fuertemente influenciados por la componente didáctica.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica, proporcionalidad, semejanza

MARCO TEÓRICO

La Ingeniería Didáctica surge a principios de los ochenta de la mano de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau) y la Transposición Didáctica (Chevallard) que, producto del desarrollo de la didáctica de la época, se plantea la necesidad de una metodología específica tanto para la enseñanza como para la investigación.

El término ingeniería didáctica puede referirse a dos funciones: como producciones de enseñanza y aprendizaje o como metodología de investigación.

Respecto a su primer función, Artigue (1995) explica que son producciones de secuencias para enseñanza que se basan en investigaciones externas, es decir, que no fueron realizadas por el mismo docente.

Esta experiencia se enmarca en la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación porque permite al docente asumir su rol de profesor-investigador al diseñar una secuencia de actividades partiendo de una serie de supuestos y mediante la implementación y evolución de la misma, es posible realizar un análisis posterior que posibilita, al mismo profesor, la validación de dichos supuestos.

> Esta metodología se apoya en la toma de decisiones por parte del investigador, en la etapa del diseño de la ingeniería, con la intención de controlar los distintos componentes del proceso de implementación de la misma. Busca un sistema experimental basado en realizaciones didácticas en la clase cuya validación surge de la comparación entre el análisis a priori y a posteriori. (Carnelli y Marino, 2012, p. 40).

La importancia de esta metodología radica en que el proceso de validación que tiene su origen en la Teoría de las Situaciones Didácticas, desarrollada por Buy Brousseau, está a cargo del docente y por lo tanto, no viene impuesto por investigadores externos sino que tiene un carácter interno. Surge de la interrelación misma entre el docente, alumno y conocimiento.
De Faria Campos (2006) propone la siguiente caracterización de la Ingeniería Didáctica como metodología de la investigación:

– Por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
– Por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En el presente trabajo, la ingeniería didáctica que se propone se ubica en el nivel de "micro-ingeniería" (Artigue, 1995; De Faria Campos, 2006) ya que tiene como objeto de específicamente los conceptos de proporcionalidad y semejanza en un dos cursos particulares y atendiendo a las problemáticas de los mismos.

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica consta de cuatro fases (Artigue, 1995, De Faria Campos, 2006, Carnelli y Marino, 2012): análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posterior y validación.

En el análisis preliminar, Artigue (1995) distingue tres dimensiones:

- La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego.
- La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
- La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

En la segunda fase, correspondiente al análisis a priori, se determinan las variables globales o específicas que se pondrán en juego cuando el alumno se enfrente a la situación. En esta etapa, se formulan hipótesis que luego se contrastarán con los resultados observados en el análisis a posteriori. Se prevén comportamientos posibles.

La fase de experimentación, es la puesta en escena de la secuencia diseñada y la observación de comportamientos y respuestas de los alumnos frente a las mismas.

Finalmente, en la cuarta fase, partiendo de las observaciones realizadas en la fase anterior, se inicia el proceso de validación interna en contraste con el análisis a priori.

A continuación, se desarrolla un ejemplo de ingeniería didáctica construida para el estudio de la proporcionalidad y semejanza.

ANÁLISIS PRELIMINAR

Dimensión epistemológica

Para realizar un análisis epistemológico de las nociones de proporcionalidad y semejanza será necesario detenernos en el análisis de los conceptos de *razón* y *función* ya que están estrechamente relacionadas entre sí.

> Partiendo de una perspectiva epistemológica se muestran algunas evidencias de cómo desde la antigüedad, en culturas como la china, babilónica, egipcia y griega aparece las nociones de proporcionalidad y linealidad. La base de dichas aportaciones son las razones y proporciones, las cuales, desde nuestra percepción son sustento epistemológico de la proporcionalidad, forman parte del antecedente de la misma noción de linealidad. Arquímedes, da la definición de recta más empleada hasta nuestros días. Euclides probó que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros. Arquímedes retoma esta consideración para la relación entre el volumen del cilindro y el de la esfera insertada (Acosta Hernández, Rondero Guerrero, Tarasenko, (sf)).

- ***La noción de razón***

  Se entiende por *razón* a la relación entre dos magnitudes (objetos, cantidades, personas, etc.). En este punto, hay que recalcar que la noción de *razón* no equivale al de *fracción*.
  La principal diferencia radica en que las razones no siempre son números racionales. Por ejemplo, la razón entre la longitud de una circunferencia y su radio es el número π, que sabemos que no es un número racional.
  De la misma manera, no siempre las razones están expresadas en forma fraccionaria. Por ejemplo, se puede expresar la razón *"50 habitantes por metro cuadrado"*.
  Sin embargo, es muy común que los alumnos confundan estos conceptos y los entiendan como equivalentes. Esto ocasiona grandes dificultades en la comprensión y adquisición de nuevos conocimientos. Por ejemplo, cuando se trabaja con proporciones es común que confundan con el concepto de fracciones equivalentes. Esto ocasiona un obstáculo al trabajar con una proporción como la que aparece en el ejemplo:

$$\frac{7}{4} = \frac{8}{x}$$

Para los estudiantes, esta igualdad no tiene sentido en el contexto de fracciones equivalentes fuertemente arraigado en sus estructuras de conocimientos.

- ***La noción de función***

  La noción de función ha evolucionado con el correr del tiempo. Luisa Ruiz Higueras (1998), organizó el análisis histórico por etapas: la función como variación, como proporción, como gráfica, como curva, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y como terna. A continuación se explican brevemente las dos primeras etapas por estar relacionadas con el tema que ocupa a este trabajo:

  <u>Primera etapa</u>: *La función como variación*

  Los babilónicos son los primeros en desarrollar un *instinto de funcionalidad* tabulando datos, interpolando y extrapolando, en busca de regularidades estableciendo relaciones entre las variaciones de dos conjuntos.

  <u>Segunda etapa</u>: *La función como proporción*

  Para los griegos, la búsqueda de proporcionalidad era la relación privilegiada entre magnitudes variables. Sin embargo, sólo establecían proporciones con magnitudes homogéneas: comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas, etc.

  Según algunos investigadores, es posible que esta homogeneidad en las comparaciones de las magnitudes pueda constituirse en un obstáculo en el desarrollo de la noción de función ya que se descarta la posibilidad de encontrar dependencias entre variables de diferentes magnitudes propias de las relaciones funcionales.

  La proporcionalidad directa, es un caso particular del estudio de la variación de las funciones lineales. Las funciones de proporcionalidad directa son de la forma $y = mx$ donde m es la constante de proporcionalidad.

Dimensión didáctica

El análisis de los contenidos curriculares y de los libros de texto nos permite identificar las concepciones de los conceptos de proporcionalidad y semejanza que subyace y que, de alguna manera, contribuyen a la formación de las concepciones de los alumnos.

- ***En los contenidos curriculares***

  En los contenidos curriculares de la Provincia de Buenos Aires, Brisuela y Rodríguez (2006) proponen el estudio de razones y proporciones desde el 1º año de la Escuela Secundaria (ES).

  En un primer momento, se propone introducir el concepto de razón por medio del análisis de las fracciones como parte de un todo. Luego, se plantea en forma explícita el contenido “proporcionalidad”. En este bloque, se hace mención a las aplicaciones en la vida cotidiana, porcentajes, regla de tres simple y estudio de funciones de dominio discreto (para proporcionalidad directa e inversa), pero mediante la organización de la información en tablas. No se hace mención a la construcción y análisis de gráficos.

En el 2º año de ES Guil, Maqueda, Brisuela y Rodríguez (2007) plantean (entre otros) los siguientes objetivos específicos:

- Transformar unidades de medida mediante un uso dinámico de la proporcionalidad en el marco de la resolución de problemas de perímetros, áreas y volúmenes, capacidades, pesos y ángulos.
- Realizar un uso dinámico de la proporcionalidad y sus propiedades superador de construcciones tales como "a más, más" o la regla de tres simple.
- Usar propiedades de la proporcionalidad para realizar estimaciones, anticipaciones y generalizaciones.

Se propone presentar la función de proporcionalidad directa como caso especial de la función lineal las condiciones que debe cumplir una función lineal para que sea de proporcionalidad directa. Además, se recomienda trabajar con contraejemplos para clarificar y alertar sobre cuándo una relación es directamente proporcional. Por otro lado, también se introduce la función de proporcionalidad inversa. Sin embargo, cabe aclarar, que el tratamiento de ambas funciones es a partir de la confección de tablas de valores con dominios acotados.

Guil, Maqueda, Brisuela y Rodríguez (2008) proponen para el 3º año de ES, trabajar el concepto de proporcionalidad en un contexto geométrico. De esta manera, se introduce el Teorema de Thales y la aplicación en el estudio y construcción de figuras semejantes.

- ***En los libros de textos***

En los libros de textos más usuales en la Escuela Secundaria, se respeta el marco que brinda el diseño curricular expuesto anteriormente, que podemos agrupar en tres momentos:

Primer momento: se introduce el concepto de razón y proporción desde un punto de vista algebraico. Se resuelven problemas de proporcionalidad directa e inversa, priorizando el trabajo algebraico con propiedades y planteo de ecuaciones. Es notable la cantidad de ejercicios y problemas destinados a esta sección.

La idea que subyace en las definiciones y ejemplos de este tratamiento es que dos magnitudes son proporcionales cuando al aumentar o disminuir una, la otra aumenta o disminuye de la misma manera. Para el caso de la proporcionalidad directa, si aumenta (disminuye) una, aumenta (disminuye) la otra, y en el caso de la inversa, si aumenta (disminuye) una, disminuye (aumenta) la otra.

Esa "misma manera" de aumentar o disminuir se relaciona con la noción de factor de proporción, coeficiente de proporcionalidad o reducción a la unidad.

Segundo momento: se estudian las funciones de proporcionalidad. Cabe aclarar que en varios libros se trabaja con funciones proporcionales como primera aproximación al concepto de función.

En esta revisión es posible encontrar definiciones formales, algebraicas o coloquiales, que indican que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente entre dos valores correspondientes es una constante. Y en el caso de la proporcionalidad inversa, indicando que en ese caso el producto entre dos valores correspondientes es constante.

Generalmente estas definiciones van acompañadas de ejemplos y ejercicios que involucran el completar tablas y representar en un sistema de coordenadas para identificar que curva determinan los valores encontrados.

Tercer momento: se aplica el concepto de proporcionalidad directa en contextos geométricos. Se introduce el Teorema de Thales y construcción y propiedades de figuras semejantes.

En este momento, se encuentran definiciones que determinan que dos figuras son semejantes si tiene la misma forma. Esto ocurre cuando los ángulos homólogos son iguales y los segmentos homólogos son proporcionales. A continuación, se presenta la guía de ejercicios principalmente de construcciones de figuras semejantes y se enuncia el Teorema de Thales, cuyas actividades se reducen al planteo de ecuaciones para determinar medidas de lados en construcciones geométricas.

Dimensión cognitiva

Las concepciones de los alumnos en referencia a la proporcionalidad son las siguientes:

- No diferencian razones de fracciones. Seguramente, esto de deba a la elección de ejemplos triviales por parte del docente al introducir el concepto de razón y proporción.
- En general, el estudiante asocia el concepto de proporción al de un tipo particular de ecuación. Esto se debe a que el trabajo con proporciones es principalmente algebraico y carente de sentido para el alumno. En reglas generales, las clases de matemática se ven invadidas por largos procedimientos algebraicos carentes de significatividad, esto conduce a una algoritmización de los contenidos y vaciamiento de conceptos.
- Todos los problemas donde a medida que crece una variable, ocurre lo mismo con la otra variable, es de proporcionalidad directa. O bien, si aumenta una y disminuye la otra, es de proporcionalidad inversa. Esto se debe a definiciones simplistas del tipo “a más-más y a menos-más”.
- Las funciones lineales representan relaciones de proporcionalidad directa. Existe una ruptura entre el trabajo realizado al introducir los conceptos de proporcionalidad y sus representaciones gráficas. Normalmente, se trabajan como contenidos aislados.

DISEÑO DE LA SECUENCIA

Características del grupo

La actividad se llevó a cabo en cursos de 3º año de la Escuela Secundaria (ex 9º año) de 34 y 36 alumnos cada uno. Son grupos son conformados por chicos trabajadores pero con un bajo rendimiento en las evaluaciones. Los alumnos ya habían estudiado temas de proporcionalidad los años anteriores. Esta actividad se desarrolló con el objetivo de que los alumnos adviertan el alcance proporcionalidad directa en confección de escalas.

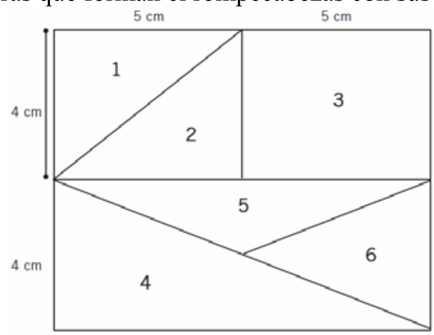
La clase anterior al desarrollo de la actividad se les pidió que traigan hojas lisas, reglas, escuadras, compás, transportador y tijeras. Se los organizó en equipos de 4, 5 y 6 alumnos.

El trabajo se realizó en dos clases de 60 minutos cada una. La primera clase, se destinó a la experimentación de cada grupo. Luego, en la segunda clase, se hizo la puesta en común de las soluciones propuestas por cada equipo. Sólo dos equipos llegaron a la respuesta correcta.

Actividad Propuesta

Los alumnos trabajan en equipos. Cada equipo recibe un sobre el enunciado de la actividad con las piezas de un rompecabezas recortadas y numeradas. Una representación del rompecabezas original queda expuesta en el pizarrón.

El esquema muestra las figuras que forman el rompecabezas con sus medidas:



ACTIVIDADES

a) Construir el mismo rompecabezas de manera tal que lo que mide 4 cm pase a medir 7 cm.

b) Se necesita un modelo más pequeño. Construir el mismo rompecabezas pero de tal forma que lo que mide 5 cm (o 5 unidades) pase a medir 3 cm.

Objetivos

Los objetivos propuestos en el desarrollo de la actividad planteada son:

- Determinar si los alumnos son capaces de generar estrategias personales para resolver problemas en contextos geométricos aplicando conocimientos previos de razones y proporciones.
- Valorar y aplicar conceptos de proporcionalidad y semejanza en la ampliación y reducción de formas en cualquier escala.
- Introducir el estudio al análisis y aplicación de escalas.

ANÁLISIS A PRIORI

* Con esta actividad se espera que el alumno sea capaz de advertir que para la construcción de las figuras pedidas es necesario conservar las medidas proporcionales a la figura original.

* Debido al tratamiento del concepto de proporcionalidad directa en años anteriores, muchos alumnos reducen sus conocimientos de proporcionalidad a comentarios del tipo *"a más, más y a menos, menos"*. Como consecuencia, suelen incurrir en errores epistemológicos. Por lo tanto, es de esperar que los alumnos intenten "agrandar" el rompecabezas sumando los centímetros faltantes a las figuras originales, lo que provocará que al intentar armar nuevamente el rompecabezas, se encuentren con que las figuras no "encajan".
* Se descarta la posibilidad de que los alumnos, frente a varios intentos, piensen que no es posible reconstruir el rompecabezas. Esta postura es fácilmente rebatible con el argumento de que es posible la construcción de planos de casas (a escalas menores que la vivienda real), la ampliación de fotocopias, las fotografías (reducción a escala de imágenes reales), etc.
* Se espera que utilicen el Teorema de Pitágoras para calcular las medidas de las diagonales.
* Puede ocurrir que surjan dificultades en la construcción de triángulos con regla y compás.

EXPERIMENTACIÓN

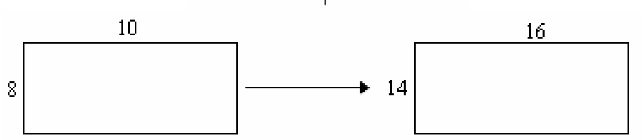
Los alumnos se organizaron en equipos de 4, 5 y 6 alumnos y se les entregó un sobre con la consigna de la actividad y las piezas del rompecabezas recortado y comenzaron a experimentar y discutir entre ellos.

En este trabajo, se realiza el comentario de las actividades desarrolladas por tres equipos. La elección de los mismos se debe a que el trabajo realizado por el resto de los equipos es similar al de los dos seleccionados y por lo tanto, no aportan datos que resulten relevantes.

Comentarios de la experimentación del Equipo 1

El equipo 1 trabajó con el rompecabezas entero. Es decir, con el rectángulo de 8 *cm* x 10 *cm*. Y luego, trazaban las figuras interiores uniendo puntos medios, vértices, etc. Para comenzar a trabajar, en la actividad **a** realizaron el siguiente razonamiento volcando los datos en una tabla y realizando el esquema:

ANTES	AHORA
4 cm	7 cm
8 cm	14 cm
5 cm	8 cm
10 cm	16 cm

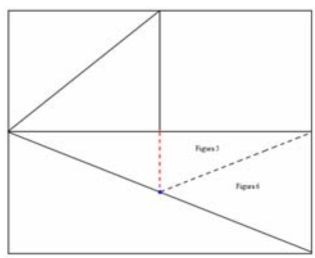


El razonamiento de ellos fue el siguiente:

> *"El de 4 cm tiene que medir 7 cm. Entonces, el lado de 8 cm (4+4) medirá 14 cm (7+7). Además, el de 5 cm medirá 8 cm (1 cm más que el de 4 cm) y el de 10 cm (que son dos de cinco) medirá 16 cm (porque son dos de 8 cm)".*

Comenzaron la construcción del rectángulo de 14 cm x 16 cm. En un primer momento, tuvieron algunas dificultades para la construcción de los ángulos rectos (recordar que trabajaban en hojas lisas) pero al poco tiempo, uno de los integrantes sugiere el uso de la escuadra. Luego, trazaron puntos medios, diagonales y quedaron construidas las figuras 1, 2, 3 y 4. Faltaban las figuras 5 y 6.

Tuvieron varios intentos para la construcción de ambas figuras, hasta que unos de los integrantes realiza el siguiente esquema para explicarles a sus compañeros de qué forma podrían construir las dos figuras faltantes.



"Si seguimos la línea roja, queda el punto que lo unimos con el vértice del opuesto y así quedan las figuras 5 y 6".

No fue difícil convencer a sus compañeros de la validez de esta argumentación.

De esta manera, quedó construido el rompecabezas de este equipo. El equipo está totalmente convencido de que la figura construida es correcta. En este punto, la docente interviene solicitando la construcción de una tabla (similar a la que había construido el equipo inicialmente) donde figuren las medidas de todos los lados y ángulos interiores de ambos esquemas (el original y el ampliado) y se les solicita que deduzcan y argumenten por escrito las relaciones que deben existir entre los lados de ambas figuras. Cabe aclarar, que la intención de esta actividad es que los alumnos detecten una inconsistencia en el razonamiento empleado para ampliar el rompecabezas. Pues la relación establecida en la tabla original no se verificará para las diagonales trazadas.

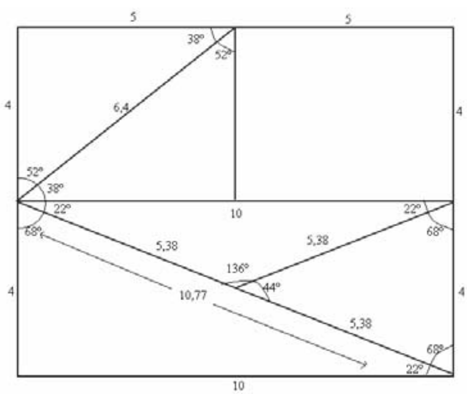
De esta forma, el equipo se divide la tarea y trabajan midiendo ángulos y lados de las figuras. Algunos de los integrantes, aplicaron el Teorema de Pitágoras para calcular las medidas de las diagonales, en cambio otros, midieron utilizando la regla. Esto originó una discusión en el equipo, pero rápidamente se convencieron que la forma más exacta de medir las diagonales era utilizando el Teorema de Pitágoras.

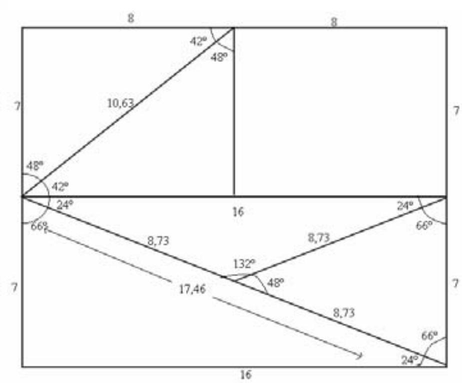
Por otro lado, llegaron a los siguientes acuerdos:

- Las figuras 1 y 2 son iguales. Por lo tanto, no es necesario realizar dos veces las mediciones.
- De la figura 3, no van a realizar las mediciones de los ángulos pues es un rectángulo.
- Las figuras 5 y 6 son triángulos isósceles.
- Es válido aplicar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Y detectaron varios pares de ángulos suplementarios y complementarios en el esquema. Esto agilizó la medición de las figuras.

En lugar de armar una tabla, el equipo decidió volcar las medidas sobre las dos figuras como se ve en los siguientes esquemas:

Figura Original ***Figura Ampliada***





<u>Aclaración</u>: En el momento en que se desarrolla esta actividad, los alumnos no había estudiado aún las relaciones trigonométricas por lo tanto, la medición de los ángulos se hizo con transportador.

Luego de realizar todas las mediciones, se dieron cuenta que las medidas de la figura ampliada no mantienen ninguna relación con la original.

Lo primero que llamó la atención a varios integrantes del equipo es que los ángulos no midieran lo mismo. Para ellos, resultaba bastante obvio que los ángulos de ambos esquemas debían ser iguales. Intentaron convencer al resto de los integrantes argumentando que las medidas de los lados debían ser más grandes, pero los ángulos debían ser iguales porque de otro modo, se "deformaba" el esquema original. Uno de los integrantes, puso el ejemplo del plano de una casa:

"Si el ángulo que forman dos paredes es de 150º en la realidad, también debe medir 150º en el plano".

Otro de los integrantes, observó que al ampliar la figura algunos ángulos aumentaban, pero otros no. Esto resultaba contradictorio pues lo lógico (para el alumno) era que *todos los ángulos aumentaran*.

Finalmente, no pudieron sostener sus argumentos iniciales respecto a la forma de ampliar el rompecabezas. Sin embargo, no pudieron detectar cuál era el error que cometieron.

Comentarios de la experimentación del Equipo 2

El equipo 2 trabajó con las piezas del rompecabezas por separado. Comenzaron con la figura 1. Pensaron en agrandar la figura 1 de la siguiente manera: *"Si a 4 cm le sumamos 3 cm para pasar a 7 cm, a 5 cm también le tenemos que sumar 3 cm y pasamos a 8 cm, y el 3º lado queda determinado".*

De esta manera, los alumnos construyen (con regla y escuadra) el triángulo rectángulo que corresponde a la figura 1 (ampliada). De la misma manera, construyen las piezas 2, 3 y 4.
Cuando llega el momento de construir las figuras 5 y 6 surgen algunos conflictos sobre cómo construir dichas figuras (recordar que trabajaban en hojas lisas). Uno de los integrantes busca en su carpeta los pasos para la construcción de triángulos con regla y compás. Finalmente, construyen las figuras 5 y 6 siguiendo el mismo razonamiento empleado para construir las anteriores.

Sin embargo, al intentar armar nuevamente el rompecabezas, observan que las figuras ampliadas no encajan como en el esquema original. Revisan las medidas y no encuentran el error.
Uno de los integrantes, propone volver a construir las figuras 5 y 6, pero esta vez, considerar la mitad de la hipotenusa de la figura 4 como medida de los lados de los triángulos 5 y 6. Sin embargo, varios integrantes sostuvieron que eso no era correcto pues esa medida no era 3 cm más grande que la original.

Los integrantes del equipo no pudieron buscar argumentos válidos para defender o refutar la construcción realizada. Detectaron la inconsistencia, pero no el error cometido.

Comentarios de la experimentación del Equipo 3

Al igual que el equipo 2, los integrantes de este grupo trabajaron con cada figura por separado. Para la construcción de cada figura usaron la regla de tres simple, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$4\text{ cm} \longrightarrow 7\text{ cm}$$

$$5\text{ cm} \longrightarrow x = \frac{5 \cdot 7}{4} = 8{,}75\,cm$$

De esta forma, fueron calculando las medidas de cada lado y con regla, escuadra y compás construyeron todas las figuras.

Cabe aclarar que para cada lado plantearon la regla de tres simple. En ningún momento, surgió la posibilidad de calcular la medida del segmento unidad lo que agilizaría el trabajo.
Al realizar la puesta en común, donde cada equipo expuso el trabajo realizado, un integrante de otro equipo que no había podido llegar a la solución correcta, observó que el trabajo del equipo 3 podría verse simplificado si simplemente se multiplica cada medida por $\frac{7}{4}$ que corresponde a la medida del segmento unidad. De esta forma, la actividad *b* de la fotocopia se redujo a la búsqueda de la medida del segmento unidad y luego, la construcción del resto del rompecabezas.

Una observación importante realizada por varios alumnos al finalizar las dos actividades fue la siguiente: *"Si multiplicamos cada medida de la figura original por un número mayor que 1, obtenemos una ampliación. En cambio, si multiplicamos por un número menor que 1, obtenemos una reducción"*.

CONCLUSIONES

En primer lugar, cabe destacar que la totalidad de los alumnos se sumaron al trabajo de cada equipo. Todos aportaban ideas y sugerencias. Esta participación activa por parte de los alumnos se debe a que el problema planteado en un contexto geométrico no presentaba dificultades de comprensión y resultaba fácil comenzar a hacer conjeturas, pruebas, mediciones. El problema invita a la experimentación y es raro que a un alumno no se le ocurra ninguna estrategia de resolución (correcta o incorrecta). Por otro lado, la participación activa de todos los integrantes de los equipos en búsqueda de estrategias de resolución, exige la búsqueda de argumentos sólidos para defender razonamientos propios o bien, para refutar los ajenos.

Cabe destacar que no era la primera vez que se resolvían actividades grupales; por lo tanto, en ocasiones anteriores se había hecho hincapié en la importancia de la participación de todos los integrantes y al mismo tiempo, establecer un orden para exponer ideas que sean escuchadas y entendidas por todos los compañeros. Luego, dar lugar a otras opiniones planteadas con respeto.
Otro punto importante a destacar es que la ventaja de este problema es que la validez, o no, de la estrategia empleada para su resolución no viene dada por la autoridad del docente sino por la situación misma, que evidencia que no funciona. Esta posibilidad de control, por parte de los alumnos, no siempre es posible.

Es notable que si bien el concepto de proporcionalidad directa se trabaja desde años anteriores y es considerado uno de los conocimientos más importantes (dentro y fuera del ámbito de la matemática) por sus múltiples aplicaciones, sólo dos grupos aplicaron correctamente este concepto en la resolución del problema. Esta experiencia, pone de manifiesto la necesidad de replantearse la enseñanza de este concepto partiendo desde las tres dimensiones (epistemológica, didáctica, cognitiva) desarrolladas al principio de este trabajo a fin de generar nuevas estrategias de enseñanza.

Finalmente, el desarrollo de estas actividades permitió resignificar contenidos previos e integrarlos en función de dar solución al problema planteado. Resulta interesante observar que la mayor parte de las dificultades que surgieron a lo largo de la resolución del problema, fueron solventadas por los mismos integrantes de los equipos; por ejemplo, construcción de triángulos con regla y compás, propiedades de triángulos, aplicación del Teorema de Pitágoras, etc. En ocasiones, debieron recurrir a los contenidos desarrollados en la carpeta, pero en otras ocasiones no fue necesario.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta Hernández, J., Rondero Guerrero, C., Tarasenko, A. (sf). *Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad*. Recuperado el 8 de febrero de 2012 de www.uaeh.edu.mx/.../bajarArchivo_web.php,

Artigue, M.; Duady, R. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brisuela, J. y Rodríguez, S. (2006). Matemática 1º año. En A. Zysman (coord.). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria: 1º año*. (pp. 171-195). Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación.

Carnelli, G. y Marino, T. (2012). Ingeniería Didáctica. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comp.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. (pp.39-62). Buenos Aires: Eduvim y Universidad Nacional de General Sarmiento.

De Faria Campos, E. (2006). *Ingeniería Didáctica*. Recuperado el 8 de febrero de 2012 de www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/12/17.

Guil, D., Maqueda, E., Brisuela, J., Rodríguez, S. (2007). Matemática 2º año. En A. Zysman (coord.). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria: 2º año*. (pp. 293-350). Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación.

Guil, D., Maqueda, E., Brisuela, J., Rodríguez, S. (2008). Matemática 3º año. En C. Bracchi (coord.). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria: 3º año*. (pp. 303-375). Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Jaén. España.