EXPLORANDO CON LOS PRIMOS, UN TEMA QUE TIENE HISTORIA

Viviana Julia Condesse, Claudia Lilia Minnaard
UNLZ – UBA, IIT&E –UNLZ-UCAECE
Buenos Aires, Argentina.
minnaard@uolsinectis.com.ar

RESUMEN

En el presente trabajo se describen experiencias con números primos en distintos niveles educativos, pasando por el reconocimiento de los números primos, la Criba de Eratóstenes, los primos de Fermat y los polígonos construibles.

Palabras clave: Números primos, Experiencias en distintos niveles educativos

INTRODUCCIÓN

"Un área de la matemática rica en problemas antiguos sin resolver es la teoría de los números primos. La secuencia de los números primos no sigue un patrón y estos parecen no cumplir ninguna regla. Al explorar entre los números naturales es posible encontrar regiones ricas en primos, pero, por alguna razón desconocida otras regiones carecen totalmente de ellos. Durante siglos los matemáticos han fracasado en el intento de explicar el patrón subyacente que rige a los primos."(Singh, 2006).

Una de las primeras definiciones de la teoría de números es la clasificación que se hace de los números en primos y compuestos. Recordemos que un entero positivo p mayor que 1 es un *número primo* si los únicos divisores positivos de p son 1 y p. (Otra definición posible es la siguiente: Un número entero positivo es primo si tiene exactamente dos divisores). Todo número entero positivo mayor que 1 que no es primo se denomina *compuesto.*

Un acercamiento a la teoría de números puede hacerse en forma continua y gradual, abordando distintos temas en los diferentes niveles de la enseñanza matemática. Por su simplicidad en la definición, por las propiedades que de ellos se infiere y por la curiosidad histórica que han despertado, creemos que los números primos son ideales para este fin.

PRIMOS EN ESCUELA PRIMARIA

Una primera actividad, es el reconocimiento de los números primos. Cuando se trata de números menores que 100, basta en general, que recuerden las tablas de multiplicar y algunos criterios de divisibilidad; pero ¿cómo saber si por ejemplo 131 es un número primo? ¿y 1453? ¿ y si subimos la apuesta y preguntamos por 7511?

El alumno en general va probando con los distintos números menores que el dado y efectúa cada división con la ayuda de la calculadora. Pero, hasta que número es necesario dividir? Nos parece importante entonces, detenernos en una propiedad muy importante referida a los números compuestos

Todo número compuesto tiene un factor primo

Para alumnos de E.P.B. , se induce a partir de la observación de la descomposición en factores de distintos números y la actividad concluye en el enunciado de la propiedad; para alumnos de la escuela secundaria, es factible su demostración por no presentar mayor grado de dificultad. Su aplicación la presentamos como reconocimiento de los números primos.

Volvamos a la propuesta original, ¿es 131 un número primo? Pero aplicaremos la propiedad anterior:

> Si 131 es compuesto, debe contener algún factor distinto de 1 y 131. Ese factor debe ser menor o igual que $\sqrt{131}$, por qué? Porque todo factor mayor que $\sqrt{131}$ debe poseer un factor asociado menor que $\sqrt{131}$ con el fin de que su producto sea igual a 131. Por lo tanto, para determinar si 131 es primo o compuesto, sólo necesitamos determinar la existencia de factores menores o igual que $\sqrt{131}$
> Como $11<\sqrt{131}<12$, en este caso el único factor posible menor o igual que 11 es 11. ¿Es 11 un factor de 131? No, por lo tanto 131 es primo
>
> Podemos plantear qué sucede con 151, se trata de un número primo o compuesto? Evidentemente el alumno propondrá resolverlo en forma similar.
>
> Como $12< \sqrt{151} <13$ buscará los factores positivos de 12, es decir 2, 3, 4, 6 y 12.

¿Deberemos probar con todos los factores de 12? ¿Qué sucede si el número es compuesto? Estas preguntas llevan a relacionar conceptos con el teorema enunciado. Todo número compuesto tiene un factor primo, es decir, que basta con verificar si los primos son factores de 151. Sólo nos quedan 2 números: 2 y 3. Dos no es factor por tratarse de un impar y 3 tampoco lo es pues la suma de los valores absolutos de sus cifras (1+5+1) no es múltiplo de 3. Por lo tanto 151 es primo

De esta manera, el alumno descubre si un número es primo o no analizando si es o no compuesto. Enunciamos propiedades a partir de la inducción haciéndolos ingresar al mágico mundo de los números primos.

PRIMOS EN ESCUELA SECUNDARIA

Una técnica muy usada para obtener una lista de números primos es la llamada Criba de Eratóstenes[1]. Esta técnica consiste en escribir una lista de los naturales mayores que 1 y menores o iguales a un número n, para luego "pasar por un tamiz" o tachar los múltiplos de 2 (mayores que 2), luego los de 3 (mayores que 3); luego los de 5, 7 … y así sucesivamente para todos los primos menores que $\sqrt{n}$. (Éste también es un momento propicio para recordar la propiedad mencionada anteriormente). Mediante este procedimiento muchos números son tachados más de una vez, pero los que quedan luego del tamizado son los primos menores o iguales a n.

Podemos pedir a los alumnos de la escuela secundaria que realicen el algoritmo para hallar todos los primos menores, por ejemplo que 120. No existe una única disposición para realizar la criba, analicemos por ejemplo la siguiente, presentada por Pettofrezzo y Byrkit (1995) donde son remarcados en color los números que quedaron luego del tamizado

	2	**3**	**4**	**5**	**6**
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
37	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
43	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**
55	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**
67	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**
73	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**
79	**80**	**81**	**82**	**83**	**84**
85	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**
97	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**
103	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**
109	**110**	**111**	**112**	**113**	**114**
115	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**

[1] Astrónomo, filósofo, matemático y geógrafo de la Antigua Grecia (284 aC.- 192 aC)

¿Qué actividades podemos proponer a partir de esta tabla?

Por simple observación, los alumnos podrán notar que todos los primos menores que 120, a excepción del 2 y del 3 se encuentran ubicados en la primera o en la quinta columna. Consideramos que desde los primeros años de la escuela secundaria, los alumnos deberían ser capaces de expresar en forma simbólica los números que ahí están ubicados. Estimamos que al ser 6 (o múltiplo de 6) la diferencia ente los números primos pertenecientes a la misma columna y haciendo analogía con la expresión utilizada para los números impares, la deducción de que los primos ubicados en esas columnas son de la forma *6k+1* o *6k-1* donde *k* es un entero positivo.

¿Podremos conjeturar alguna propiedad a partir de esta conclusión? Por supuesto,

> *Todo número primo distinto de 2 y de 3 es de la forma 6k+1 o 6k-1 siendo k un entero positivo*

Es importante incentivar a los alumnos a elaborar este tipo de conjeturas, revisando distintos enunciados, proponiendo otros, propendiendo el debate y la autocorrección.

A partir de tercer año, esta propiedad debe escribirse en forma simbólica

$$\boxed{Si\ \ p\ es\ \ primo\ \ \ impar\ \ \wedge\ p \neq 3 \Rightarrow\ p = 6k+1\ \vee\ p = 6k-1\ \ (k \in Z^{+})}$$

En todo momento de la enseñanza es imprescindible plantear nuevos interrogantes, generar dudas, evitar generalizaciones que los alumnos “intuyen”. Una posibilidad es analizando la veracidad de la propiedad recíproca.

En los primeros años de la escuela secundaria, será expresando en lenguaje coloquial la propiedad, por ejemplo *Significa entonces que todo número que pueda expresarse como 6k+1 o 6k-1 será primo?*

Más allá de la demostración formal que creemos necesaria en un nivel terciario o superior, la codificación y análisis de la propiedad, de su recíproca, de la contraria y de la contra recíproca, deben ir introduciéndose desde un lenguaje coloquial hasta alcanzar cierto grado de abstracción.

Encontrar el contraejemplo, propiciar el debate, plantear nuevas conjeturas, rearmar la criba de Eratóstenes en diferentes números de columnas para que verifiquen y analicen las conclusiones, son procedimientos para lograr que el alumno sea el artífice de su propio aprendizaje. Mostramos de esta forma que la matemática no es un conocimiento totalmente acabado, que los conceptos que se aprenden, son en realidad estructuras que se amplían y se enriquecen.

PRIMOS EN NIVEL TERCIARIO

Un análisis más exhaustivo de la criba de Eratóstenes sugiere propiedades adicionales que según la orientación o nivel (terciario o universitario) en el que nos encontremos enseñando podrán ser deducidas, inducidas, demostradas o aplicadas.

En un nivel medio puede introducirse una función que asigna a cada número entero, la cantidad de primos menores o iguales a dicho entero. Los alumnos de nivel medio pueden hallar imágenes de algunos números. Si llamamos a dicha función $\pi(x)$ podrán calcular:

$\pi(1) = 0$ (no hay primos menores o iguales a 1)
$\pi(2) = 1$
$\pi(3) = 2$ (pues 2 y 3 son los primos menores o iguales a 3)
$\pi(4) = 2$ (2 y 3 son los dos primos menores o iguales a 4)
$\pi(10) = 4$ (los primos menores que 10 son 2, 3, 5 y 7)

Es verdad, que este tipo de funciones prácticamente no se utilizan en nuestra enseñanza. Sin embargo, podríamos comenzar con funciones que "cuenten" números pares o impares con anterioridad a la función $\pi(x)$. Si definimos por ejemplo, imp(x) a la función que asigna a cada natural la cantidad de números positivos impares menores que x, los alumnos serían capaces de calcular imágenes para luego analizarlas e inducir propiedades relativas a ellos. A modo de ejemplo señalamos:

Imp(3) = 1 (1 es el único impar menor que 3)
Imp(4) = 2
Imp(5) = 2 (los impares menores que 5 son 1 y 3)
Imp(100) = 50
Imp(101) = 50

de donde serán capaces de deducir en forma intuitiva, la distribución de los números impares, expresando en forma analítica $\frac{imp\,(x)}{x}$. Es decir, que sin conocer el concepto de límite analizarán el comportamiento de este cociente para valores "grandes" de x.

Pero en un nivel superior de enseñanza, y volviendo a la función $\pi(x)$, sería interesante ampliar este concepto para analizar la distribución de los números primos, según sugiere Silverman(1997).

A partir de una tabla como la siguiente:

x	π(x)	π(x)/x
10	4	0.4
25	9	0.360
50	15	0.3
100	25	0.250
200	46	0.230
500	95	0.190
1000	168	0.168
5000	669	0.1338
7000	900	0.1286
10000	1229	0.1229

pueden obtenerse conclusiones interesantes. Plantear interrogantes de la forma: ¿Cómo se comporta π(x)/x a medida que x toma valores más grandes? ¿Cómo se traduce coloquialmente esta situación? ¿Qué puede inferirse de la distribución de los números primos?

De esta manera, aquél concepto intuitivo que un alumnos de secundario puede analizar construyendo distintas tablas de números primos, un alumno de nivel superior podrá deducir el teorema de los números primos:

Cuando x tiende a infinito, el número de primos menores que x es aproximadamente igual a $\frac{x}{\ln x}$ *; lo que es equivalente a expresar* $lím_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$

Karl Gauss (1775-1855) y Adrien-Marie Legendre (1752-1833) conjeturaron independientemente este teorema; sin embargo debió pasar casi un siglo hasta que el matemático francés Jacques Hadamard (1865-1963) y el matemático belga de la Vallée-Poussion (1866-1962), demostraran (casualmente también en forma independiente) el teorema del número primo.

LOS PRIMOS Y LA GEOMETRÍA

Otra posible aplicación de los números primos está relacionada con la geometría.

Son habituales las construcciones con regla y compás de polígonos regulares. Bastará en la enseñanza media con construir alguno de ellos (por ej. de cuatro, seis, o quince lados) e ir introduciendo algunos interrogantes sobre la posibilidad de poder construir cualquier polígono regular. Nuestra experiencia indica que mediante ensayo y error descubren que el heptágono no es factible de ser construido.

Para alumnos de nivel terciario en cambio, tanto el enunciado de esta propiedad como la búsqueda del número de polígonos regulares construibles, resulta sumamente atractivo por los diferentes conceptos que podemos relacionar:

*Un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y sólo si la descomposición en factores primos de **n** es de la forma:*

$n = 2^r . p_1 . p_2 .... p_k$

siendo $r \geq 0$ *y los* p_i *primos de Fermat distintos entre sí*

¿Cuáles son los primos de Fermat?

Fermat conjeturó que los números de la forma $2^{(2^k)} + 1$ eran primos para todos los enteros k no negativos. (Fraleigh, 1987)

Euler demostró que mientras $k \in Z^+ / 0 \leq k \leq 4$ dan los primos 3, 5, 17, 257 y 65537. Para $k \in Z^+ / 5 \leq k \leq 16$ se ha demostrado que todos los números de la forma $2^{(2^k)} + 1$ son compuestos. No se sabe si el número de primos de Fermat es finito o infinito

Retomando los polígonos construibles, podemos probar que, por ejemplo, el 60-gono regular es construible ya que 60 = (2^2). (3) .(5) y 3 y 5 son ambos primos de Fermat.

El heptágono regular no es construible, ya que 7 no es primo de Fermat.
El 25-gono regular no es construible con regla y compás ya que 25 = 5.5 y si bien 5 es primo de Fermat, la descomposición debe ser en primos de Fermat distintos entre sí
El 17-gono es construible ya que 17 es primo de Fermat

CONCLUSIÓN

Los números primos han fascinado tanto a matemáticos como a aficionados, Sus aplicaciones son múltiples, iniciándose con la factorización de los números naturales, pasando por la transmisión de mensajes secretos (criptografía) y llegando a la búsqueda de los primos records por su colaboración en internet. Muchos de los retos y desafíos matemáticos que se presentan como inalcanzables, son superados tiempo después. Por esa razón, transitar por los caminos que han transitado otros estudiantes y matemáticos a lo largo de los siglos creemos que es enriquecedor para nuestros estudiantes actuales, modelo Web 3.0.

Los números primos y en general toda la Teoría de Números ofrece excelentes oportunidades para esto, ricas desde el punto de vista histórico y desafíos que permiten una visión integrada de la matemática.

Estamos convencidas que el abordaje de un mismo contenido desde el punto de vista algebraico, geométrico y analítico, con distintos grados de profundización, como hemos presentado en este trabajo, favorecen esta visión integrada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fraleigh, J (1987). *Algebra Superior*. Washington: Addison-Wesley Iberoamericana

Pettofrezzo, A y Byrkit, D. (1995). *Introducción a la teoría de los números.* Madrid: Prentice-Hall Internacional

Silverman, J. (1997). *A friendly introduction to Number Theory*. Prentice Hall

Singh,S. (2006). *El último teorema de Fermat*. Buenos Aires: Grupo Editorial Norma.