UNA MIRADA A INVESTIGACIONES SOBRE LA DERIVADA DESDE LA PERSPECTIVA DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Adriana Engler y Alberto Camacho
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral, Argentina
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
aengler@fca.unl.edu.ar, camachoalberto@hotmail.com

RESUMEN

Este artículo se centra en investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. Se describen y analizan aportes de investigadores que estudiaron la problemática en el aula. Se incluye la revisión de libros y artículos de investigación. El trabajo se centra en el aporte de Crisólogo Dolores y algunos investigadores de habla hispana. En el análisis se tuvo en cuenta la identificación del problema, los objetivos que guiaron las investigaciones, las distintas metodologías utilizadas, las formas y condiciones en las que fueron llevadas a cabo, así como los resultados obtenidos.

Palabras clave: derivada, pensamiento y lenguaje variacional, enseñanza, aprendizaje

INTRODUCCIÓN

El surgimiento del cálculo se asocia con diferentes aspectos: el reconocimiento de los procesos infinitos, la aparición del concepto de límite como organizador de ideas y métodos, el desarrollo del concepto de infinitesimal, el nacimiento del concepto de función, entre otros. Durante los siglos XVI y XVII, dada la necesidad de resolver problemas de movimiento de los astros, el flujo de los líquidos, el trazado de la tangente a una curva, las condiciones para obtener máximos y mínimos, la velocidad de los cuerpos en movimiento, aparecieron nuevos métodos matemáticos. La medición del cambio ha estado estrechamente ligada con la idea de *variación* -aspecto esencial y eje central en la formación del concepto de derivada-. En el aula de matemática, el cálculo permite explorar la naturaleza del cambio y del movimiento y proporciona herramientas como la razón de cambio, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, etc., y un lenguaje para lograrlo. Brinda la posibilidad de crear modelos matemáticos para describir los fenómenos asociados al cambio y la medición de la variación, como por ejemplo la difusión de calor sobre algún objeto, la vibración, etc.

Los vínculos del cálculo, tanto con la matemática elemental como con la avanzada y su papel en las ciencias lo transforman en un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico indispensable en la educación superior. El currículo de matemática y los métodos de enseñanza durante mucho tiempo fueron inspirados sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia. Frecuentemente el estudiante se ve imposibilitado de percibir las relaciones que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a la vida cotidiana y se priva de experimentar sus propios aprendizajes en escenarios diferentes a los que se les proveen en el aula. En este sentido, Moreno (2005) expresa:

> La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien a realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas (p. 82).

Para el trabajo en el aula universitaria, es importante debatir cómo los alumnos acceden al discurso matemático escolar (dME). Cantoral y Mirón (2000) señalan:

> (…) la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aún siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación (pp. 269-270).

La construcción del concepto de derivada no es fácil, por ejemplo, para los estudiantes de ingeniería. Sin embargo, su significado y uso en la resolución de problemas en la vida profesional es indispensable. Así por ejemplo, un ingeniero civil utiliza estas y otras herramientas de la matemática para diseñar un puente y un ingeniero industrial puede usarlas para pronosticar las ventas anuales en la compañía donde trabaja, entre otras herramientas. En el caso de los licenciados en administración de empresas, es fundamental el uso de la derivada en la determinación del interés que arroja una cantidad de dinero depositada a cierto tiempo en el banco. En este nivel, se requiere de una base sólida de conocimientos matemáticos para poder interpretar y dar respuesta a la mayor cantidad de interrogantes del saber de su especialidad. Sin negar el lugar de los conceptos y procedimientos en el currículo de matemática, es necesario que el alumno construya matemática, ocupándose de actividades que emerjan de situaciones problemáticas que requieran pensamiento y razonamiento creativo, recolección y ampliación de información, descubrimiento, invención, comunicación de ideas y comprobación de las mismas a través de la reflexión crítica y argumentada.

Debido a la complejidad de los procesos que intervienen en el cálculo (abstracción, demostración, generalización, visualización, entre otros), que además tienen que ver con tópicos avanzados que van más allá del álgebra elemental, las investigaciones en relación a esos temas se ubican dentro del campo denominado *Pensamiento Matemático Avanzado*. A principios de la década de los noventa, las investigaciones comienzan a considerar que en el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento no se pueden dejar de lado aspectos sociales y culturales.

Cantoral y Farfán (2000) buscaron construir una base de significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático, especialmente en el nivel universitario. La base de significados se refería a nociones de orden variacional, como fue el caso de la predicción, semejantes a los conceptos del cálculo, es el caso de la derivada. Consideraban que las causas que hicieron que los sectores académicos universitarios se ocuparan del estudio de los procesos de pensamiento avanzado se debían al creciente interés de los matemáticos profesionales en cuestiones de enseñanza y aprendizaje y la estabilidad y madurez que alcanzaron comunidades de investigación organizadas en torno de grupos académicos con paradigmas propios. Fue a partir de la investigación que se cita que se dio inicio a una etapa buscando caracterizar la derivada a través del pensamiento y lenguaje variacional, considerando este argumento como aquel con el que se pueden recuperar significados asociados a la derivada, los mismos que en la actualidad ayudan para experimentar posibilidades de enseñanza de este concepto en el salón de clase. El pensamiento y lenguaje variacional se ocupa de estudiar las prácticas sociales que generan la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos.

El desarrollo de investigaciones de temas relacionados con el cálculo en general, y con la derivada en particular, en las últimas décadas, abre la posibilidad de nuevas propuestas de investigación fundamentadas en el análisis de los procesos involucrados en el aprendizaje.

Este artículo se centra en el análisis de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, realizadas en el marco de la Matemática Educativa y desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. Se describen y analizan aportes realizados por investigadores que trabajaron durante los últimos quince años las dificultades que surgen en el aula de matemática al tratar el tema derivada. Se incluye la revisión de libros y artículos de investigación. El trabajo muestra la producción del profesor Crisólogo Dolores y los resultados de otros investigadores de habla hispana que se encuentran preocupados y están dedicados a producir aportes para mejorar el trabajo en el aula de cálculo, en particular al tratar la derivada.
En el análisis se tomó en cuenta la identificación del problema y los objetivos que guiaron las propias investigaciones, las distintas metodologías utilizadas, las formas y condiciones en las que fueron implementadas, así como los resultados obtenidos en cada una de ellas. A continuación se presenta lo obtenido a partir de la lectura profunda de algunos trabajos.

PRINCIPALES INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON LA DERIVADA EN EL MARCO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Se decidió organizar el trabajo tomando en cuenta dos bloques. En un primer apartado se describe la obra realizada por C. Dolores a partir del año 1996 dado que, desde la perspectiva de la presente revisión, es uno de los investigadores que se dedicó al estudio de manera continua y desde diferentes enfoques a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Se presentan luego los trabajos de diferentes autores de habla hispana que realizaron importantes aportes hacia entender la problemática en torno a la enseñanza y aprendizaje de uno de los conceptos más importantes de la matemática de la variación y el cambio, la derivada.

El trabajo de C. Dolores

El autor abordó como objeto principal de estudio al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática de las variables en el bachillerato, dado que numerosos trabajos realizados desde 1996 por él mismo han mostrado que estudiantes, tanto en ese nivel como los que inician la universidad, manifiestan un escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y, por consiguiente, escasa comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas. Este es el problema central en las investigaciones realizadas por este.

En la dirección de la enseñanza y aprendizaje de la derivada, Dolores (1996a) presentó en su tesis doctoral un profundo análisis de la problemática en relación a la enseñanza del Cálculo Diferencial y en especial del concepto de derivada. Analizó las causas que hacen que los estudiantes del nivel medio superior comprendan escasamente las ideas básicas del cálculo y en especial las relacionadas con la derivada. Como logro principal, enunció una propuesta didáctica para la enseñanza del tema en el bachillerato. En su diseño adoptó a la variación física como eje rector de los contenidos. Logró un acercamiento intuitivo a la derivada utilizando problemas de rapidez de la variación (sin un tratamiento riguroso de los contenidos del cálculo). Los resultados mostraron que los estudiantes difícilmente desarrollan un pensamiento y lenguaje variacional, incluyendo aquellos que cursan sus estudios preparatorios y que inician estudios superiores. Señaló que las causas atribuidas a esta problemática se relacionan tanto con los procesos de asimilación de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas, así como con la planificación y ejecución del proceso de enseñanza. Esta problemática no es exclusiva de México, país donde se desarrolló el proyecto, sino que se extiende a otros países latinoamericanos -en el apartado 2.2 se presentan algunas investigaciones que refuerzan esta afirmación-.

Consecuentemente, en Dolores (1996b) se dieron a conocer los resultados de un estudio exploratorio en estudiantes de bachillerato sobre las ideas que se forman de la derivada en sus cursos ordinarios de Calculo Diferencial. El autor diseñó y aplicó un cuestionario donde, por un lado, se exploraron las ideas que preceden a la derivada y, por otro, las ideas relacionadas directamente con el concepto. El objeto fundamental de la investigación fue que los estudiantes pusieran en juego sus ideas acerca de la derivada. En la primera parte investigó la cuantificación simple de la variación y la velocidad media. El análisis de las repuestas arrojó que los alumnos mostraron un escaso manejo de la noción de variación. Sobre un total de 112 alumnos a los que se les aplicó el cuestionario, sólo el 24% contestó correctamente. En la segunda parte del cuestionario se exploraron las ideas de los estudiantes sobre la derivada como límite, como la pendiente de la recta tangente y como velocidad instantánea. El autor detectó numerosas deficiencias acerca de las concepciones de la derivada como un límite. Solamente el 3,5% se mostró capaz de interpretar consistentemente la simbología utilizada en la definición de derivada. Los estudiantes no fueron capaces de reconocer que, mediante la posición límite de la secante (tangente), se puede obtener la derivada de la función. Casi la mitad contestaron que la derivada se mide en dos puntos y solamente el 17,8% dio la respuesta correcta. Presentaron dificultades también en la interpretación geométrica. El 37,5% respondió dando el valor de la función en el punto al preguntarles por el valor de la pendiente de la recta tangente (consideraron $f(x) = f'(x)$).

Solamente el 8% logró relacionar a la derivada como un proceso de variación y la velocidad instantánea. El 74,1% asoció el valor de la función en el punto solicitado con el valor de la velocidad instantánea. Dolores asegura que los resultados obtenidos en la investigación exploratoria coinciden en gran medida con los obtenidos por otros investigadores -Orton, 1983; Vinner, 1992-. En particular, Orton entrevistó a 60 estudiantes ingleses del College y 60 del preuniversitario, el 39% no fue capaz de percibir que la sucesión de secantes tiende a la tangente y solamente el 31% tuvo una idea correcta de la derivada como límite o la asociaron correctamente con su significado geométrico.

Alrededor de la variación, Dolores (1998) abordó el problema de la escasa comprensión de las ideas variacionales que subyacen al concepto de derivada en el bachillerato. Partió de la hipótesis de que el desarrollo de las ideas variacionales puede favorecer una mejor comprensión del concepto. Diseñó una experiencia pedagógica que se implementó en el aula. El eje central fue el concepto de derivada y su introducción guiada a través del enfoque variacional. La experiencia se realizó con 32 estudiantes y se estructuró en tres fases. La primera incluyó el estudio de las variables y funciones, luego, la formación del concepto de derivada (partiendo del problema de la determinación de velocidades medias) y, finalmente, la ampliación y profundización de la idea de razón de cambio instantánea en la resolución de problemas no relacionados directamente con la variación física. Mediante un cuestionario exploró inicialmente el estado de algunas ideas variacionales en los estudiantes participantes de la propuesta y aplicó el mismo cuestionario para analizar los cambios producidos. El análisis de los resultados fue de carácter cualitativo. Estudió el desarrollo de las ideas de rapidez de la variación, variación positiva, negativa y nula en relación con algunos indicadores (poder calcular velocidades instantáneas, poder resolver problemas sobre rapidez instantánea) de la comprensión de la derivada.

En Dolores (2000a) se refiere un artículo como producto del Proyecto de investigación: *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el preuniversitario*, que tenía como objetivo la elaboración de una instrucción didáctica que contribuyera a la comprensión del concepto de derivada tomando en cuenta las ideas variacionales. En particular, se enfatiza la noción de rapidez de la variación. El investigador aseguró que, en la práctica, la enseñanza de la derivada generalmente depende de los textos que utilizan los profesores. En ese sentido, distinguió dos tendencias:

- Tendencia en la que predomina la organización del contenido clásico como se estructura en el Análisis Matemático para, en una segunda etapa, buscarle las aplicaciones (se observan el enfoque algebraico, el numérico, el formal, el infinitesimalista y el de la aproximación afín).
- Tendencia en la que el contenido se genera de la necesidad de resolver problemas de aplicación, por lo que los conceptos se forman a partir del problema de la recta tangente y de su significado físico (se distinguen el enfoque geométrico y el variacional).

En su trabajo hizo énfasis en que el enfoque variacional nació en el campo de los investigadores y que su uso no era masivo entre los profesores. Esta línea surgió del grupo de trabajo de R. Cantoral (1991), quien propuso cambiar el dME poniendo como eje principal a la variación física en cualquier curso de Cálculo, y del grupo de E. Wenzelburger (1993), quien pretendía presentar las ideas fundamentales en forma significativa con un empleo mínimo de formalismo matemático.

Presentó además los resultados de aplicar un cuestionario exploratorio de ideas y habilidades (en especial relacionadas con la derivada) aplicado a 112 alumnos del preuniversitario del centro del Estado de Guerrero, México. El autor obtuvo evidencias que le permitieron asegurar que la mayoría de esos estudiantes no tenían formadas las ideas correctas sobre la derivada y no relacionaban este concepto con los problemas de variación. Manifestó que este último fue un motivo importante para elaborar una propuesta didáctica que contribuyera a la comprensión del concepto de derivada, convencido de que el desarrollo de ideas variacionales (fundamentando en el origen histórico del tema) ayudaría al logro del objetivo. El estudio de la variación en la propuesta es el eje rector del que se desprende el contenido matemático. En su planteamiento tuvo presente que no se debe perder de vista que hay que enseñar la derivada, no porque sea un concepto matemático interesante, sino porque es útil en diversos problemas relacionados con la variación. Aseguró que se debe pensar en una introducción intuitiva e informal que tiene como punto de partida las necesidades de la práctica. Siguiendo la línea impulsada por Wenzelburger (1993), la propuesta fue estructurada en tres fases:

- Preparatoria: en ella pretendía crear las condiciones mínimas para comenzar el proceso de formación del concepto. Partía de la modelación de problemas sencillos de la física (se trabajaron las nociones de variable y función).
- De formación del concepto: comenzó trabajando con la rapidez de la variación (velocidad y aceleración promedio) para luego impulsar la rapidez instantánea mediante un acercamiento intuitivo al límite y la utilización de infinitesimales.
- De fijación: amplió la definición de derivada a funciones que no dependen del tiempo, introdujo la definición de función derivada y dedujo y utilizó las reglas de derivación. Se resolvieron, además, problemas de aplicación.

En otro trabajo, Dolores (2000b) aseguró que en México, en los últimos años, fue creciente el interés por perfeccionar la enseñanza de la matemática. Manifestó que, en coincidencia con estudios realizados en otras partes del mundo, varias investigaciones afirman que después de haber cursado Cálculo Diferencial, los alumnos adquieren un dominio razonable de algoritmos algebraicos necesarios para el cálculo de límites y derivadas, pero se observan serias dificultades en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite en la noción de derivada -Sierpinska, 1985; Wenzelburger, 1993; Artigue, 1991; Vinner, 1992- así como dificultades en la resolución de problemas de aplicación. Al respecto, el autor expresa:

> Cantidades significativas de estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente comprenden el significado de los algoritmos que realizan, inclusive, difícilmente logran asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación, a pesar de que históricamente del estudio de estos últimos se generaron las ideas que le dieron origen. (p. 9)

Señaló que las causas que se pueden relacionar con esta problemática responden a la planificación y ejecución del proceso de enseñanza del cálculo diferencial y a los procesos de asimilación de los conceptos básicos. Analizó los programas utilizados en el estado de Guerrero, México, observando que, en general, están estructurados con una abundante cantidad de contenidos que no obedecen a una sistematización en términos de los objetivos y métodos de enseñanza. En algunos casos, los programas consisten solamente en un listado de contenidos. Con respecto a las causas ligadas a los procesos de asimilación, éstas se han encontrado en el campo cognitivo y epistemológico. En general se puede decir que tales dificultades son ocasionadas por las preconcepciones, las imágenes conceptuales y los obstáculos epistemológicos. Este último artículo toma importancia porque aborda los temas de la variación y el cambio. El autor analizó algunos elementos teóricos acerca de la naturaleza de la variación y su relación con los principales conceptos de la matemática del cambio. Se esforzó primero en la idea de variación y manifestó que se encuentra asociada a la medición y al cambio. Explicó que la medición es un procedimiento creado por el hombre para entender la realidad, mientras que el cambio es el componente básico del movimiento. La medición a lo largo de la historia jugó un papel importante en el desarrollo de la matemática, pues propició la interconexión entre la aritmética y la geometría, entre lo discreto y lo continuo, entre el número y la magnitud. Para entender el proceso de la variación de las funciones es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Estableció que, al momento de realizar la medición de la variación, es importante tener en cuenta que los cambios se pueden medir a partir de comparaciones. Los procesos de variación están compuestos de estados sucesivos y suceden cambios entre un estado y el que sigue o cualquier otro. Para medir lo que cambia en $y = f(x)$, es necesario considerar un estado inicial x_i al que le corresponde $y = f(x_i)$. Si se tiene en cuenta el cambio que experimenta la variable independiente *x* del estado inicial, al estado final $x_i + \Delta x$, $f(x)$ también sufrirá un cambio hacia un estado final que tendrá la forma $f(x_i + \Delta x)$. Siempre a un cambio de la variable independiente le corresponde un cambio de la variable dependiente. La diferencia es el modelo matemático básico para medir la variación y el cambio, ello permite predecir una gran cantidad de aspectos del comportamiento variacional de las funciones. Aclaró además que, cuando se estudian procesos de variación, no interesan solamente los cambios por sí mismos. En muchos casos es importante poder relacionar un cambio con otro, es decir, plantear una razón entre cambios, un cociente entre números. Así surgió un nuevo término matemático: *razón de cambio*.

La investigación realizada por Solache, Díaz y Dolores (2000), tuvo como objetivo desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de bachillerato. Los autores estudiaron la aplicación en el aula de las principales actividades y secuencias diseñadas en Dolores (1999). Según el autor, el objetivo central del Cuaderno fue el de aportar elementos didácticos que permitan lograr una mejor comprensión de las ideas y conceptos básicos del cálculo (en especial los relacionados con la derivada) mediante una introducción intuitiva que ayudara a reconocer la naturaleza variacional a partir del planteo y resolución de situaciones variacionales elementales. En el documento presentaron los resultados de estudiar las influencias que ejercen las situaciones didácticas enunciadas en la obra para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes de bachillerato en situación escolar. Las principales habilidades que se exploraron tienen que ver con dos grandes bloques: por un lado, variables y funciones y, por otro, variación y derivada. La experiencia se realizó en un curso ordinario de Matemáticas IV de Cálculo Diferencial con dos grupos de estudiantes de bachillerato en programación del Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios de Chilpancingo (Guerrero, México). Los resultados de esta última fueron valorados a través de exámenes que, para los estudiantes, fueron de validez oficial y, por eso, obligatorios.

En un primer examen plantearon nueve preguntas para explorar la noción de variable, su representación geométrica por medio de desigualdades y análisis del comportamiento de una gráfica de una función, la evaluación y la graficación por tabulación. Los resultados globales mostraron que el 69% de los estudiantes desarrollaron la idea de variable como la letra que puede adquirir valores sucesivos. En un segundo examen diseñaron ocho preguntas sobre la variación y el cambio. Si bien de los resultados globales se desprende que el 78% de los estudiantes desarrollaron una idea de variación aceptable (casi todos coinciden en que son cambios), solamente el 17% indicó que los cambios se miden restando y lograron desarrollar la idea propuesta. Con respecto a los procedimientos para calcular cambios por medios gráficos, el 24%, en promedio, lo hizo correctamente. En el cálculo por medios analíticos, el 26% de los estudiantes lo hicieron bien en el caso en que la variable dependiente no cambia. Para casi el 28% de los estudiantes, es clara la idea de mayor rapidez a partir de una tabla. El 30% logró reconocer la idea de menor rapidez en un grafico, mientras que la *falta de variación* el 69%. En el tercer examen plantearon seis preguntas para explorar la noción de velocidad instantánea, la habilidad en la interpretación de la simbología utilizada en la definición de derivada sobre la base de su interpretación gráfica, la habilidad para operar numérica y algebraicamente con la velocidad instantánea y el desarrollo de habilidades en la obtención de diferenciales de funciones algebraicas. En los resultados globales se observó que el 61% de los estudiantes desarrollaron una idea de velocidad instantánea relacionándola con los cambios infinitamente pequeños y a la velocidad de una partícula en un instante. El 26% mostraron evidencias de poder relacionar e interpretar la expresión de la definición de la derivada con la velocidad instantánea, la pendiente de la recta tangente. La mitad de los estudiantes lograron identificar correctamente la expresión que se emplea para obtener la pendiente de la recta tangente. En un cuarto cuestionario se exploró la noción de derivada, las habilidades de los estudiantes en la utilización de las reglas básicas de la derivación, la idea de rapidez de crecimiento de la curva sobre la base de un gráfico, la habilidad para calcular la pendiente en un punto de la curva y la obtención de la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto dado y, analizando la gráfica de $f(x)$, la posibilidad de representar el gráfico de $f'(x)$. Una cantidad significativa de estudiantes pudieron calcular derivadas de funciones polinomiales sencillas (30%). El 65% desarrollaron ideas aceptables acerca de la derivada, un 48% la asociaron con la razón o la división entre diferenciales y un 17% con el cambio o la velocidad instantánea. El 65% contestó correctamente con respecto a la idea de rapidez de crecimiento de una curva, pero solamente el 21,7% intentó dar una respuesta (poco convincente) respecto a la argumentación. Un solo alumno pudo obtener una aproximación de la ecuación de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado.

Estos datos resultan muy interesantes porque reflejan claramente qué ocurre en el aula al trabajar las distintas ideas que giran alrededor de un concepto tan rico para el estudiante y futuro profesional.

En otro proyecto, Dolores y Catalán (2000) trabajaron con 24 estudiantes de bachillerato tecnológico. El objetivo de la investigación fue propiciar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en el aula. Estudiaron la deducción de la ecuación de la recta tangente a partir de su comportamiento variacional y la deducción del comportamiento variacional partiendo de la ecuación de la recta. Después de siete sesiones de clases de 50 minutos, realizaron un cuestionario buscando obtener información y medir algunos aspectos que indicaran dicho comportamiento. En una primera fase utilizaron las gráficas como elemento principal para determinar cambios. Prácticamente el 50% de los alumnos lograron determinar los cambios, en tanto las mayores dificultades las tuvieron cuando las funciones eran decrecientes y los cambios de la variable dependiente negativos. La cuarta parte de los estudiantes pudieron interpretar la ecuación pendiente-ordenada al origen y lograron representarla gráficamente. Llama la atención que, a pesar de haber estudiado los procesos de cambio desde los últimos grados de educación primaria, no los utilizan. Si bien se desarrollan procesos de cambio en la escuela primaria el estudio de la función $y = mx + b$ se realiza mediante tablas y gráficas cartesianas. Resulta una forma estática de estudiar un proceso de variación, se pone atención sólo en uno o dos puntos por donde pasa la recta y su pendiente, y no en el comportamiento que experimentan las variables en todo el dominio.

En general, los autores encontraron que los estudiantes revelaron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas mostrándose más seguros al realizar operaciones.

El estudio de Dolores (2001) se ocupó del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de primer año de universidad. El objetivo principal fue mostrar los resultados obtenidos en una instrucción didáctica que involucró el diseño de actividades, su aplicación en el aula y la valoración de los resultados obtenidos. Con las diferentes actividades diseñadas se buscó pasar del sistema de representación analítico al geométrico, del geométrico al analítico y del geométrico al geométrico al analizar el comportamiento variacional de funciones utilizando los significados variacionales que subyacen en la función derivada e integral y su relación de reversibilidad. En el estudio participaron 28 estudiantes de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero. Para el diseño de las situaciones variacionales se tuvieron en cuenta los siguientes criterios:

1. Que permitieran el análisis del comportamiento variacional de gráficas de funciones.
2. Que a partir del comportamiento variacional expresado analíticamente puedan obtener la gráfica.
3. Que dada la gráfica de la función derivada pudieran esbozar la gráfica de la función y viceversa.

La puesta en aula se hizo en cuatro etapas: en primer lugar el autor trabajó la relación entre las curvas y sus tangentes, luego la relación variacional entre la derivada y su primitiva, en la tercera etapa el análisis del comportamiento variacional a través de gráficas y, por último, el análisis de las gráficas de funciones elementales según sus expresiones analíticas.

Como conclusiones generales de la experiencia, se estableció que prácticamente el 50% de los alumnos tienen inconvenientes para transferir información del sistema gráfico al analítico ya que hacen corresponder al valor de la función en un punto (dado gráficamente) con el valor de la derivada en ese punto (dado analíticamente). El 75% mostró confusión entre el comportamiento variacional de la función y la ubicación de la gráfica en el plano cartesiano. El autor consideró que seguramente la simbología $f'(x_o)$ no les sugirió comportamiento variacional en torno a x_o. En lo que respecta a la habilidad para transferir información del plano gráfico al gráfico, menos de la mitad de los alumnos logró hacer gráficos de $f(x)$ conocida su derivada.

Por su lado, Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) investigaron las concepciones relativas a la lectura de gráficas cartesianas que representan movimiento físico. En especial centraron la atención en las nociones de velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de cuerpos en movimiento que se desprenden de la lectura de gráficas cartesianas que incluyen coordenadas tiempo, distancia y posición. A partir de esto, discutieron el significado de la derivada en el contexto del movimiento a través de gráficas cartesianas. Trabajaron con 80 estudiantes de secundaria, 100 de preparatoria y 15 de la universidad, así como también con 13 profesores de física de secundaria y 40 de preparatoria. Reportaron que, a pesar de que los alumnos hayan estudiado el movimiento en la física escolar, las lecturas e interpretaciones que hacen de las gráficas no son las mismas que las de los libros de texto y las de los expertos. Los resultados no son mejores para los profesores.

Si bien se esperaba que los estudiantes interpretaran aceptablemente las representaciones cartesianas del movimiento, ya sea en el contexto matemático como en el físico, los resultados mostraron que esto no tiene lugar realmente en su cognición.

La mayoría de estos últimos asociaron mayor velocidad (más precisamente mayor velocidad media) a la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura. En cuanto a la velocidad negativa, tanto estudiantes como profesores la asociaron mayoritariamente con la gráfica cuyas ordenadas son negativas. Para el caso de la caída libre, la mayoría de docentes y alumnos asumieron la gráfica cartesiana con la trayectoria del movimiento físico.

El libro de Dolores (2007a) resulta un valioso aporte acerca de esta última problemática puesto que aborda el problema de la escasa comprensión de la derivada en estudiantes de bachillerato, los cuales no logran reconocer las ideas asociadas de éste concepto en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio. Es, además, un compendio de los diferentes trabajos de investigación realizados por el autor y sus colaboradores a lo largo de más de diez años de trabajo, muchos de los cuales fueron enunciados anteriormente. El objetivo principal del libro fue aportar los elementos fundamentales para el desarrollo de una propuesta para la enseñanza de la derivada. Del análisis que realizó de sus investigaciones surgieron algunos aportes interesantes a tener en cuenta y, entre otras cuestiones, el investigador recomendó:

> (…) ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica (p. 198).

Después del estudio realizado sobre la noción de derivada, tanto en el plano histórico como en el de su enseñanza, y el diseño y puesta en práctica de la propuesta concluyó que:

> Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática, priorizan el desarrollo de los procesos de pensamiento sobre la mera transferencia de contenidos, en particular en el Cálculo Diferencial se centra la atención en la comprensión de las ideas fundamentales y el desarrollo de ideas claves que le dieron origen: las tangentes y la variación. (p. 129).

El trabajo de Dolores (2007b) constituye un capítulo importante en el que el autor presenta un análisis completo de la enseñanza de la derivada analizada desde la perspectiva de los textos del cálculo diferencial más utilizados en el bachillerato de la región de Guerrero (México) y de los programas de estudio utilizados en las diferentes modalidades. Concluyó que en los textos analizados, para el tratamiento de la derivada, se sigue casi inevitablemente la secuencia: incrementos, límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, notación, regla general para la derivación e interpretación geométrica. Con el afán de dar rigor matemático al concepto, el énfasis es puesto en el aprendizaje de algoritmos y en los textos se omiten las relaciones que el concepto tiene con la variación. En general, para el tratamiento de la derivada se siguió una línea que hace que sea presentado como un concepto abstracto que existe sólo dentro de la matemática. Los textos priorizan el trabajo algorítmico por sobre el desarrollo de ideas y significados variacionales.

Describió además las diferentes tendencias sobre la enseñanza de la derivada. Una de ellas considera que el contenido se genera a través de la necesidad de resolver problemas prácticos de manera que los conceptos básicos se forman partiendo del problema de las tangentes o su significado físico. En esta tendencia, el enfoque variacional considera como núcleo organizador del discurso la idea de predicción para conocer las cantidades por medio de las variaciones. La derivada deja de ser un concepto matemático abstracto y se transforma en un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. El autor concluyó:

> Bajo estas premisas, no se construye la matemática del Cálculo para después buscarle aplicaciones como lo hacen los libros de textos tradicionales y lo sugieren los programas, se genera el conocimiento en contextos prácticos o de aplicación de modo que la derivada en particular se forma mediante su significado variacional. Siguiendo estas líneas generales en su tratamiento didáctico es posible propiciar condiciones para que los estudiantes comprendan este concepto. (p.198)

El trabajo de otros investigadores de habla hispana

Otros grupos, en diferentes regiones, han producido diversas investigaciones alrededor de la derivada. Azcárate (1990, citada por Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas, 1996) analizó los perfiles cognitivos de los alumnos y su evolución a lo largo del proceso de aprendizaje, en el cual los conceptos de velocidad media e instantánea, desempeñaban un papel importante. Sus estudios revelan la importancia de ofrecer itinerarios didácticos que faciliten los procesos de construcción comprensiva y paulatina de las concepciones de los individuos.

A lo largo de su obra, Wenzelburger (1993) sugirió presentar las ideas fundamentales del cálculo diferencial con un empleo mínimo de formalismo matemático y desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar cambios asumiendo a la razón de cambio como su concepto fundamental. Para concretar estas ideas, partió de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y arribó a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite.

La autora presentó su trabajo bajo la consigna de trabajar y mostrar las nuevas tendencias en la Didáctica del Cálculo Diferencial. Su obra está estructurada en dos Secciones: Lectura para los maestros y Actividades para los alumnos. En la primera sección, al inicio, expresa:

> Si comparamos textos de Cálculo de los años sesenta con los que se editaron en los años ochenta se pueden observar nuevas tendencias en el tratamiento metodológico que dan estos libros al contenido. Estas nuevas tendencias se reflejan en el intento de reemplazar las introducciones tradicionales al Cálculo que consistían en un estudio formal de series, sucesiones y límites, por una consideración intuitiva, haciendo referencia a las aplicaciones.
>
> Parece que hay más conciencia entre los autores de texto y tratados didácticos del Cálculo, de que el tratamiento tradicional es matemática y lógicamente exacto pero no contribuye mucho a la comprensión de los conceptos fundamentales. (p. 1)

En la sección Alumnos se enuncian una serie de actividades para llegar al concepto de derivada sin conocer la teoría de límites. A modo de introducción en el punto 1.1 Consideraciones Generales se hace hincapié en los cambios y la necesidad de estudiarlos. La autora manifiesta:

> Vivimos en mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios. Justamente esto es el propósito del cálculo diferencial, que *es la matemática de los CAMBIOS*.
>
> Todo el cálculo diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la *razón de cambio*. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. (p. 33).

Trabajó en todas las actividades con la velocidad para estudiar la razón de cambio.

Santibáñez (2001) investigó el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de bachillerato al implementar las actividades propuestas por Dolores

(1999). Exploró las habilidades desarrolladas por 59 alumnos a través de la aplicación de varios exámenes. En sus conclusiones expresó que con respecto a las actividades que exigían la cuantificación de los cambios de una función, sólo el 24% de los alumnos logró cuantificar los cambios de la función a partir de su expresión analítica, y al mismo tiempo pudieron describir su comportamiento. En lo que se refiere a la deducción de la fórmula que les permitiera medir los cambios de una función, el 30% consiguió obtener la fórmula para hacerlo, a partir de su expresión analítica. Por medio del análisis visual de la gráfica de una función, el 66% de estudiantes cuantificó como se esperaba los cambios de la función.

La investigación de Carabús (2002) se centró en el diseño, validación, aplicación y evaluación de un test construido para obtener información sobre las estrategias de aprendizaje de alumnos en la apropiación del concepto de derivada de una función y, a partir de ellas, evaluó los niveles de comprensión logrados. Las actividades se presentaron en marcos diferentes (coloquial, algebraico, gráfico numérico, informático) con sus respectivos registros y las traducciones entre los mismos. La prueba se aplicó a 100 estudiantes de primer año de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de Catamarca (Argentina). Para abordar el proceso de conceptualización de la derivada de una función, se relevaron “las imágenes conceptuales” de la derivada, concepciones construidas por los alumnos al resolver las situaciones planteadas. La investigación sostuvo como hipótesis central que la apropiación del concepto de derivada, por parte de los alumnos universitarios, se puede facilitar a la luz de la didáctica del cálculo, con el uso de los distintos marcos en que este concepto puede ser presentado (geométrico, algebraico, numérico, coloquial, gráfico, icónico e informático). Consideró que esta estrategia didáctica funciona como movilizadora y facilitadora de la construcción del concepto de derivada porque, en el contraste de marcos y lenguajes y las traducciones correspondientes, el alumno podrá ir construyendo las distintas “imágenes conceptuales”, que le permitirán acercarse al concepto matemático. Al aplicar a los alumnos un cuestionario se detectó la dificultad que tienen para relacionar eficazmente los diferentes registros semióticos que permiten trabajar funciones y sus derivadas y relacionar puntos de vista puntual, local y global en el tratamiento de las representaciones que han usado. En general, advirtió dificultades para adquirir el pensamiento propio del cálculo: el pensamiento funcional o variacional y el fuerte uso del pensamiento numérico y algebraico. La misma autora (Carabús, 2007) abordó el problema actual de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en la universidad y focalizó la atención en la comprensión de sus objetos matemáticos. En este sentido, la investigadora diseñó y aplicó ingenierías didácticas buscando facilitar la apropiación del concepto derivada de una función en una variable real, a manera de favorecer la comprensión de este último, lo que lleva al mejoramiento del desempeño académico de los alumnos. El trabajo de campo se desarrolló con alumnos de Análisis Matemático I de la carrera Ingeniería en Informática de la misma facultad en la que venía trabajando. La investigadora recomendó asociar la noción de derivada de una función a la noción de razón de cambio o tasa de variación instantánea, es decir con situaciones que impliquen dependencia y variabilidad. De esta manera, los alumnos están en condiciones de contextualizar el concepto de derivada, con aspectos vinculados a su génesis histórica-epistemológica. Resaltó la necesidad de crear situaciones de enseñanza a través de ingenierías didácticas que permitan al alumno alcanzar la solución por motivaciones de origen matemático y no sólo por los acuerdos implícitos del contrato didáctico. Reconoce y valora el uso de diferentes marcos y registros como una herramienta muy útil para la visualización de los conceptos matemáticos, aportando significado y sentido a lo estudiado. Sostuvo que la incorporación de los mismos facilita la comprensión, por lo que consideró que debe ser un presupuesto básico en el diseño de las ingenierías didácticas. Más allá de que se parte del supuesto de que los niveles de comprensión están relacionados con las situaciones didácticas que se llevan al salón de clase, en la investigación en Matemática Educativa surge la necesidad de hacer intervenir la tríada profesor–alumno–saber, que a su vez está afectada por el contrato de enseñanza. En esta última componente influyen las concepciones de matemáticos, pedagogos y la sociedad en general, lo cual supone considerar dicho esquema como un modelo de enseñanza de carácter sociocultural.

Testa (2004) enmarcó su investigación, relativa al estudio de la derivada, en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Señala, a partir de un estudio bibliográfico, de la observación de clases y de cuestionarios aplicados a alumnos y docentes, que el aspecto variacional de este concepto no juega un papel fundamental en los cursos, ya que sólo se toma en cuenta su definición, su interpretación geométrica y su cálculo mediante reglas de derivación. Manifiesta que no se pone en juego una enseñanza que favorezca las diferentes miradas del concepto, sus relaciones con otros conceptos y las imágenes ya adquiridas de estos. En su tesis trabajó con jóvenes uruguayos, algunos cursantes de sexto año de educación secundaria y otros de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. También indagó a docentes de los alumnos entrevistados. La autora expresó que la definición de derivada de una función real se refiere al cálculo de un límite, por lo que aparecen las limitaciones para este concepto. Con la definición no se sugiere cómo cambia la función y la relación entre los cambios y esta última. Tanto en los libros de texto como en las metodologías utilizadas en los diferentes cursos, al introducir la derivada de una función en un número real, generalmente se trabaja observando la variación de la recta secante para determinar que el límite de ésta es la recta tangente al gráfico. Sin embargo, este tipo de tipo razonamiento se deja de lado y se calculan analíticamente límites sin realizar suficientes interpretaciones gráficas que permitan reforzar la idea de variación. Los aspectos variacionales son directamente olvidados cuando se comienzan a aplicar reglas de derivación. Para calcular la derivada de funciones muy sencillas, como por ejemplo del tipo $f(x) = ax$, los alumnos recurren frecuentemente a aplicar reglas, en este caso del producto. La derivada de esta función podría determinarse mentalmente si se tuviera en claro cuál es la función en juego así como que la derivada está relacionada con su variación. La autora sostiene que si se promueve el trabajo excesivo con reglas, el estudiante busca establecer un fuerte vínculo entre el concepto de derivada y las técnicas de derivación, en detrimento de la relación establecida entre ésta y la variación de la función. Si bien es importante reconocer las ventajas del uso de las reglas, y por eso no deben ser abandonadas, su utilización indiscriminada produce un alejamiento de los significados de los conceptos en juego. La investigadora avanzó en su trabajo (núcleo de su tesis) y colocó en primer plano el estudio del significado gráfico que asignan los estudiantes de Uruguay al valor numérico de la segunda derivada, y cómo éste puede ir evolucionando así como las herramientas que entran en juego en este proceso de desarrollo.

En su proyecto, Sealey y Flores (2005) defendieron la postura de que, para que los alumnos logren una comprensión avanzada de la derivada, es necesario que entiendan el concepto en tres niveles diferentes: como razón de cambio, como límite y como función. Propusieron diferentes estrategias de enseñanza para cada nivel y discutieron algunos obstáculos que se pueden presentar a los alumnos. Afirmaron además que es importante para la comprensión, que puedan relacionarla con otros conceptos del cálculo como por ejemplo la aproximación lineal a funciones y la razón de cambio de la función que da el área bajo una curva.

Serna (2007), en su tesis sobre el estudio de la tangente, ha expresado que una de las dificultades en la formación del concepto de derivada puede estar dada por su introducción a través de la vía geométrica basada en la concepción de tangente formada en los alumnos, ya que puede obstaculizar el paso de una concepción global (propia de la Geometría Euclidiana), a una concepción local (propiedad fundamental del cálculo) y dificultar la aceptación de que la recta, además de tocar, pueda cortar a la curva y ser tangente en la zona del corte.

El autor manifestó, a partir de los estudios realizados por otros investigadores, que los estudiantes no están familiarizados con la derivada como pendiente de la recta tangente. Aunque se defina a la pendiente como un proceso de aproximación de una secante a la tangente, este significado se pierde después de un tiempo y no es bien aprendido por los estudiantes. Esto último se manifiesta, por ejemplo, cuando se les pregunta por el signo que tiene la derivada en determinado punto, presentando dificultad para relacionarlo con el signo de la pendiente de la recta tangente en dicho punto. Cuando los alumnos se enfrentan a problemas en donde se encuentra involucrada la derivada, no reconocen que en ella está presente el concepto de recta tangente. El investigador afirmó que no se construye el concepto de derivada íntegramente al no saber relacionar la recta tangente a un punto de una curva con la derivada evaluada en ese punto.

Sánchez-Matamoros, García, y Llinares (2008) presentaron un amplio artículo relacionado con la comprensión de la noción de derivada en estudiantes de bachillerato y primeros años de Cálculo en la universidad. Realizaron una revisión de numerosas investigaciones y las organizaron tomando en cuenta los siguientes bloques:

- Diferentes maneras de mirar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada.
- La comprensión de la razón de cambio.
- La relación entre la razón de cambio y el cociente incremental. La tasa de variación.
- Los sistemas de representación como herramientas para pensar la derivada.
- Lo local y lo global: la relación entre la derivada en un punto y la función derivada.
- El desarrollo de la comprensión del esquema de derivada.
- La aplicación del concepto de derivada, el desarrollo del concepto de derivada y el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena.

Analizada la información, concluyeron que se puede pensar en dos ámbitos que se relacionan con la manera de cómo los estudiantes llegan a entender el concepto de derivada. Son los siguientes:

1. *Las características de los significados del concepto de derivada que elaboran.* En este sentido aseguraron que los estudiantes no conectan automáticamente un proceso

vinculado con la idea de derivada (razón, límite, función, etc.) dado en un cierto contexto cuya noción se sugiere de manera diferente. La idea es que se logrará la comprensión completa de la derivada cuando se reconozcan y reconstruyan los significados de razón, límite y función en diferentes contextos. Los resultados indican que los significados que elaboran los alumnos están vinculados a determinados modos de representación *y estos significados no están conectados*. Los estudiantes suelen considerar a los contextos gráficos y algebraicos de manera separada aplicando algoritmos sin relación para resolver problemas. Construyen sus conexiones influidos por su experiencia previa, presentando grandes inconsistencias entre representaciones, especialmente en cuestiones referidas a procedimientos y comprensión de conceptos.

2. *El desarrollo de esos significados.* Las investigaciones reportadas en el trabajo permitieron afirmar que el desarrollo del concepto de derivada está vinculado a la integración de sus significados en un punto y al concepto de función derivada, al igual que a las conexiones entre los modos gráficos y analítico.

Vrancken, Engler y Müller (2010) presentaron los resultados de una investigación en la que diseñaron y pusieron a prueba una secuencia didáctica para la introducción del concepto de derivada, considerando como hipótesis básica que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión y apropiación de esta noción, adoptando la posición de que el manejo de sistemas de representación es fundamental para la actividad cognitiva del pensamiento. Para la elaboración de la secuencia tuvieron en cuenta investigaciones que llevaron a considerar que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión de la derivada. Coincidiendo con dolores (2007b) desarrollaron el contenido de modo que la derivada no fuera visto como un concepto matemático abstracto sino como un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Tomaron en cuenta además las ideas de Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1996) respecto a la necesidad de partir de las concepciones previas de los alumnos acerca de la velocidad, utilizando las representaciones gráficas de las funciones para visualizar ideas. Resaltan, coincidiendo con otros investigadores que, si bien la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente a una curva en un punto constituye otro aspecto fundamental en la construcción del concepto de derivada, su presentación como un proceso de aproximación de una secante a la tangente, resulta de gran dificultad didáctica. Las actividades fueron diseñadas para organizar la enseñanza en torno a situaciones inmersas en contextos variacionales, donde exista la necesidad de estudiar cambios entre magnitudes en fenómenos presentados en diversas representaciones (algebraica, numérica, gráfica y verbal), y que exijan además el uso de las rectas secante y tangente para caracterizar dichos cambios. La secuencia se llevó al aula con alumnos argentinos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral en el año 2008. Se dedicaron siete horas reloj distribuidas en cuatro clases. La primera parte de cada clase se dedicó a repasar lo desarrollado en la anterior. Teniendo en cuenta la importancia de la interacción en la construcción de los conceptos, los alumnos resolvieron las actividades de a pares, trabajando, además, distintos aspectos variacionales del concepto de derivada. La implementación de la misma permitió valorar importancia de la coordinación de diversos registros de representación en la comprensión, observando cómo ciertos registros favorecen más que otros determinados aspectos. Los resultados mejoraron al trabajar en el registro numérico, presentando mayores dificultades en el gráfico y en el algebraico.

Las investigadoras manifiestan que, según lo observado en el desarrollo de las clases y en los trabajos posteriores (parciales y evaluaciones finales), la resolución de las actividades permitió desarrollar una idea correcta de la noción de derivada a un número considerable de alumnos.

CONCLUSIONES

Al analizar el trabajo de C. Dolores se observa que mantiene un estrecho vínculo entre la teoría (pensada desde hacer Matemática Educativa) y la práctica (considerada como la intervención en la educación matemática). A lo largo de toda su obra describe una interacción continua entre sus investigaciones, su trabajo y transferencia al aula. Se nota además, que los abordajes al tema fueron cambiando y evolucionando y, de trabajar solamente cuestiones didácticas, se fueron agregando aspectos de naturaleza histórico-epistemológica para luego trabajar en proyectos que propicien al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los alumnos.

Se puede decir, también, que las perspectivas de análisis del concepto de derivada en cada uno de los autores analizados, es visto a través de sus significados asociados vigentes en el discurso escolar actual, como son el gráfico (a través de la recta tangente) y el algebraico. En los diferentes trabajos se percibe una preocupación por el control de los significados en uso. De esto último hay que destacar que no se observa el interés de los investigadores por involucrar significados que se usaron en otras épocas, como puede ser por ejemplo la diferencia y el diferencial, entre otros.

La inquietud principal es saber cómo “conectar” dichos significados en un diseño instruccional. Dicha conexión podría establecerse a partir de la cercanía epistemológica de cada significado, por ejemplo, se pueden conectar en un diseño de situación las nociones de variable y variación para enfatizar en el aprendizaje del concepto de función. En otros casos es posible hacer uso de las nociones diferencia y diferencial para abordar la derivada.

En ese sentido, no es lo mismo una buena intención para diseñar una situación o preparar una clase, que hacer uso de una metodología que permita conectar y controlar los significados.

Se espera que, esta síntesis de numerosos trabajos de investigadores preocupados por la enseñanza y el aprendizaje de un concepto tan rico como es derivada, constituya un aporte para los que se interesan por esta problemática y su trabajo cotidiano en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo Diferencial e integral*. Madrid: Editorial Síntesis.

Cantoral, R. (1991). Proyecto de investigación: Formación de la noción de función analítica. *Mathesis. Filosofía e historia de las matemáticas* 7*(2)*, 223- 239.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral, *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8* (pp. 69-91), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(3)*, 265-292.

Carabús, O. (2002). *El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión.* Producciones Científicas NOA. Sección: Educación y Sociedad. Catamarca. Recuperado el 13 de diciembre de 2006 de http://www.editorial.unca.edu.ar/NOA2002/Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf .

Carabús, O. (2007). *Ingenierías Didácticas. La comprensión en la conceptualización del Cálculo*. Catamarca: Editorial Científica Universitaria.

Dolores, C. (1996a). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el Bachillerato.* Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Pedagógico Enrique José Varona. Facultad de Ciencias. Cuba.

Dolores, C. (1996b). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272), México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (1998). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11,* 6-10. Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* Cuadernos Didácticos. Vol 6. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000a). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal*, *ICME-8* (pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000b). La matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Academia de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2(20),* 9-17.

Dolores, C. (2001). El Desarrollo del Pensamiento Variacional con Estudiantes Universitarios. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14,* 345-353. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (2007a). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Universidad Autónoma de Guerrero. Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2007b). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Universidad Autónoma de Guerrero. (pp.169-204). Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. y Catalán, A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En R. Farfán, C. Matias, D. Sánchez y A. Tavares (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13,* 36–41. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5(3)*, 225-250.
Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y la Sociedad Española de investigación en Educación Matemática SEIEM.
Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 11 (002)*, 267-296
Santibáñez, R. (2001). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.
Sealey, V. y Flores, A. (2005). Entender la derivada: sí se puede. En J. Cortés y F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 175-196). México: Morevallado Editores.
Serna, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la Tangente*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
Solache, J., Díaz, R. y Dolores, C. (2000). El desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia pedagógica en situación escolar en el bachillerato. En R. Farfán, C. Matias, D. Sánchez y A. Tavarez, (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13,* 42-48. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.
Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2010). *Una secuencia didáctica para la introducción del concepto de derivada. Resultados de su implementación.* En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 379-388. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo diferencial.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.