DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN TRIGONOMETRÍA COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Julio Cesar Barreto García
Instituto Universitario de Tecnología "Antonio José de Sucre". San Felipe- Venezuela
Liceo Bolivariano "José Antonio Sosa Guillen". Palito Blanco-Venezuela
Liceo Bolivariano "José Antonio Páez". Boraure-Venezuela
juliocbarretog@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo mostraremos el Teorema de Pitágoras en trigonometría partiendo de su acepción geométrica, es decir, tomando en consideración el área de las figuras geométricas que están sobre los lados de un triángulo con un ángulo oblicuo (agudo u obtuso) y que denominamos triángulo oblicuángulo. En particular, esta demostración la vamos a realizar usando el método científico (que conjuga la inducción y la deducción) partiendo del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica en el cual dado un triángulo rectángulo tenemos que, si colocamos sobre sus lados tres cuadrados que tengan las mismas longitudes que los lados del triángulo rectángulo entonces entre dichos cuadrados se cumple cierta relación entre estos cuadrados y luego la extenderemos a casos más generales donde se usen triángulos oblicuángulos .

Palabras clave: Productos Notables, Procesos Cognitivos, Teorema de Pitágoras, Ley del Coseno

INTRODUCCIÓN

Toda acción didáctica que se emplee en el aula de clase supone la adquisición de objetivos en función de la formación de nuestros estudiantes, además la escuela no tendría razón de ser si no tuviese en cuenta la conducción del alumno hacia determinadas metas y el logro de diversas competencias que proporcionen un cambio de comportamiento y conocimientos en ellos. Por tanto, en este artículo pretendemos una modificación del comportamiento de nuestros estudiantes fomentando la unión grupal mediante talleres en donde trabajen coordinadamente, creando figuras geométricas hechas con foami, cartones o en cartulinas de diferentes colores, para de esta manera manipularlas como si fueran piezas de un rompecabezas, y así lograr un aprendizaje más significativo en nuestros estudiantes. En ese sentido, pretendemos que nuestros alumnos adquieran conocimientos a partir de la construcción del mismo, para de esta manera no se cree una memorización de la teoría y así no se olvide lo aprendido con el paso del tiempo. Así mismo, pretendemos lograr que en ellos haya un desenvolvimiento de la personalidad y posiblemente una orientación profesional, debido a que al motivarlos a estudiar la matemática de una forma activa, les hará entender la matemática desde la propia matemática y al mismo tiempo mostraremos algunas aplicaciones de la misma, pero teniendo en cuenta que desde del trabajo constructivo le damos una formalidad matemática a lo aprendido para que no se convierta en una didáctica de la matemática sin la matemática.

RELEVANCIA Y PERTINENCIA

Recordemos que una de las principales debilidades de nuestros estudiantes es la falta de base en las principales operaciones matemáticas con lo cual se hace difícil un avance en otras áreas tanto geométricas como trigonométricas, pero esto no debe ser siempre una óptima disculpa para la mala enseñanza, al contrario allí es donde más se debe hacer uso de la didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Así, es fundamental para el profesor, una adecuada preparación didáctica a fin de poder dirigir de manera satisfactoria el aprendizaje de nuestros alumnos en donde tanto los métodos como las técnicas son fundamentales en el proceso de la enseñanza y deben estar, lo más próximo que sea posible, adaptados a la manera de aprender de los alumnos. Por lo tanto, se deben propiciar actividades con procedimientos activos y no pasivos de forma tal que los propios alumnos construyan su conocimiento pero teniendo presente que el profesor debe prestar un asesoramiento adecuado para que ellos logren los objetivos planteados en los diferentes temas. De esta manera podemos medir si en realidad a través de nosotros se logro que el educando viva lo que está siendo objeto de aprendizaje y estar seguro de que tengan un aprendizaje significativo.

La didáctica está representada por el conjunto de técnicas a través de las cuales se realiza la enseñanza; para ello reúne y coordina, con sentido práctico todas las conclusiones y resultados a que arriban las ciencias de la educación, a fin de que dicha enseñanza resulte más eficaz. La didáctica es una disciplina orientada en mayor grado hacia la práctica, toda vez que su objetivo primordial es orientar la enseñanza. Por esto es importante mencionar que realizamos un estudio geométrico que permitirá a nuestros estudiantes entender la teoría relacionada con el teorema de Pitágoras.

MARCO TEÓRICO (COGNICIÓN Y PROCESOS COGNITIVOS)

Según D´Amore y Godino (2007) el uso del término cognitivo es conflictivo en sí mismo, ya que puede aludir al conocimiento subjetivo o a los procesos mentales que los sujetos ponen en funcionamiento cuando se enfrentan a los problemas. Se pueden distinguir en la cognición matemática- y en la cognición en general la dualidad cognición individual - cognición institucional que establece relaciones dialécticas complejas. La cognición individual es resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante cierta clase de problemas, mientras que la cognición institucional surge del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos ante cierta clase de problemas.

Ahora bien, Torregosa y Quesada (2007) dicen que durante los procesos cognitivos nuestros estudiantes aprenderán los conceptos matemáticos construyendo su própio aprendizaje, partiendo de sus capacidades de visualizaciones de diferentes figuras geométricas, a partir de lo cual luego manipulara cambiando inclusive la forma de las mismas usando cambios configurales o haciendo una reconfiguración de las figuras geométricas que de ellas se derivan, para de esta manera obtener ciertos resultados mediante razonamientos, los cuales les permitirá internalizar los contenidos matemáticos de una forma secuencial y deductiva. Además, compartirán experiencias y conocimientos sin hacer memorizaciones de fórmulas matemáticas que a la larga se les olvidan y de esta manera obtener un aprendizaje que sea verdaderamente significativo segun el psicólogo cognitivo David Ausbel (1978), de forma tal que se cree desde esta etapa una autonomia en el apropiamiento del conociento en nuestros estudiantes.

La visualización la restringiremos a la aprehensión, en la cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar", según el Diccionario de la Real Academia Española (2001) y nos desplazaremos de una en la cual el estudiante realice por ejemplo una aprehensión operativa de reconfiguración (Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle -sinónimo de un rompecabezas- y se refiere a piezas planas según la Real Academia) el cual se usa al hallar la fórmula para calcular el área de un romboide a partir de la fórmula para calcular el área de un rectángulo en Barreto (2008a), y según la cual dicha fórmula se logra a través de un razonamiento discursivo como un proceso natural (Es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación). Además, tenemos otro proceso cognitivo llamado aprehensión operativa de cambio figural (Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones), como por ejemplo al colocar un triángulo congruente con otro dado para formar un romboide, al cual le habíamos deducido la fórmula para calcular su área de acuerdo a lo mencionado anteriormente, y a partir de allí nos originan una conjetura sin demostración (Permite resolver el problema aceptando las conjeturas simples y que conduce a la solución de un problema).

ANTECEDENTES (DEDUCCIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS)

Definición 1 (Triángulo rectángulo): Un triángulo se dice rectángulo si tiene un ángulo recto (igual a 90^0). Veamos la **Figura 1** de abajo:

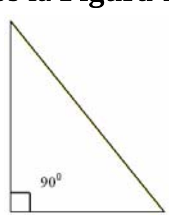


Figura 1: Triángulo rectángulo.

Podemos deducir el Teorema de Pitágoras de acuerdo con lo desarrollado por Barreto (2008b) apelando a los *procesos cognoscitivos* que según González (2005), plantea que son mecanismos de naturaleza intelectual que una persona utiliza para adquirir, procesar y organizar información en su estructura cognoscitiva e intervienen en la *resolución de un problema*[1] lo cual nos permite deducir que: $c^2 = a^2 + b^2$. Cumpliéndose además que:

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right).$$

Esto lo logramos tomando $2ab = 4\left(\frac{ab}{2}\right)$, es decir 4 triángulos rectángulos los cuales son congruentes con el triángulo rectángulo original más un cuadrado negro de lado $(a-b)$ en el cambio dimensional el cual se da cuando se cambia la información desde una perspectiva unidimensional o tridimensional, ya que son dados siempre bidimensionalmente sobre el papel o la pantalla de un ordenador según Torregrosa y Quesada (2007).

Al hacer una *aprehensión operativa de reconfiguración* obtenemos lo mostrado en la **Figura 2**:

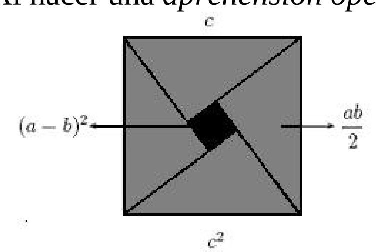


Figura 2: Se muestra como es el cuadrado que esta sobre la longitud de la hipotenusa y que tiene lado c. Este cuadrado de lado c usando los 4 triángulos rectángulos como el original de la **Figura 1** (Que es blanco y en este caso lo colocamos gris) y un cuadradito negro.

Así de acuerdo con un *razonamiento como un proceso configural* el cual es la coordinación entre la *aprehensión discursiva* y la *aprehensión operativa*, teniendo presente que la primera es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas) y la segunda es la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Este vínculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se denomina cambio de anclaje según Torregrosa y Quesada (2007), así nos queda lo siguiente como veremos en la **Figura 3**:

Figura 3: A la izquierda se muestra la conclusión geométrica del Teorema de Pitágoras, cumpliéndose: $C_C = A_C + B_C$. Y a la derecha una configuración hecha con foami con los participantes del **IV CIEM ULBRA** realizado en Canoas R/S-Brasil en el 2007.

[1] La *resolución de un problema* permite la adquisición de enfoques generales que ayudan a enfrentar situaciones matemáticas diversas, posibilitan la realización de descubrimientos originales y ayudan a "aprender a aprender" de acuerdo con González (1987).

Esto es un *truncamiento* el cual es cuando la coordinación proporciona la "idea" para resolver deductivamente el problema (conjeturando afirmaciones que se prueban) y conduce a la solución del mismo teniendo presente que:

A_C : Es el área del cuadrado de lado a, es decir, $A_C = a^2$.

B_C : Es el área del cuadrado de lado b, es decir, $B_C = b^2$.

C_C : Es el área del cuadrado de lado c, es decir, $C_C = c^2$.

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 1: En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de sus catetos.

En la **Proposición 47 del libro I de Los Elementos de Euclides** en una Traducción de M. L Puertas C (1996) aparece este Teorema de la siguiente forma:

Proposición 47 I: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

En la **Proposición 31 del libro VI de Los Elementos de Euclides** en una Traducción de M. L Puertas C (1996) se demuestra que si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen figuras rectilíneas semejantes, el área de la figura rectilínea construida sobre la longitud de la hipotenusa será igual a la suma de las áreas de las figuras rectilíneas semejantes construidas sobre la longitudes de los catetos. Esta es la extensión de la proposición anterior y del mismo **Teorema 1** para lo cual se puede revisar Barreto (2009a) y se generaliza usando cálculo integral según Barreto (2010).

DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN TRIGONOMETRIA

Definición 2 (Triángulo oblicuángulo): Un triángulo es oblicuángulo cuando no tiene un ángulo interior recto (90^o), es decir que sea un ángulo agudo (Mayor de 0° y menor de 90°) o un ángulo obtuso (Mayor a 90° y menor a 180°). Veamos la **Figura 4**:

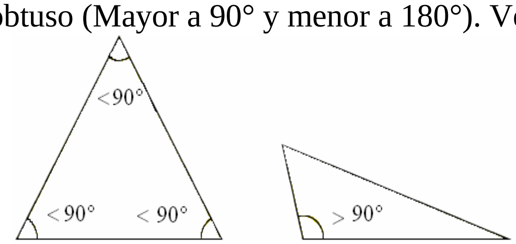


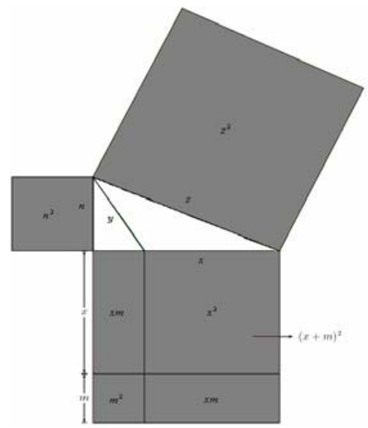
Figura 4: Un triángulo se llama acutángulo si sus tres ángulos son agudos (Menor de 90^o). En particular el triángulo equilátero es un ejemplo de triángulo acutángulo, figura a la izquierda. Un triángulo se dice obtusángulo si tiene un ángulo obtuso (Mayor de 90^o) y los otros dos ángulos menores de 90^o, como vemos en la figura a la derecha.

Ahora, dado el siguiente triángulo oblicuángulo en la **Figura 5** de abajo:

Figura 5: A la derecha se muestra un configuración geométrica del triángulo oblicuángulo de la izquierda en el cual podemos formar un triángulo rectángulo más grande agregándole un triángulo rectángulo de catetos m y n e hipotenusa y .

Ahora, hagamos unos cuadrados sobre las longitudes del triángulo rectángulo más grande usando una *aprehensión operativa de cambio figural*, pues añadimos a la configuración inicial nuevos elementos geométricos (cuadrados), creando nuevas subconfiguraciones como veremos en la **Figura 6** de la izquierda.

Figura 6: Acepción geométrica del **Teorema 1**.



Ahora de acuerdo al **Teorema 1** enunciado arriba tenemos que se cumple lo siguiente

$$z^2 = n^2 + (x+m)^2.$$

Lo cual lo podemos ver en la **Figura 6** de arriba. En el cuadrado grande tenemos la configuración geométrica de un cuadrado de lado $(x+m)$, esto de acuerdo al producto notable del cuadrado de una suma de acuerdo con Barreto, J (2009) está representado geométricamente pasando al razonamiento algebraico como sigue:

$$(x+m)^2 = x^2 + 2xm + m^2.$$

Pero en el triángulo rectángulo gris de la **Figura 6** tenemos que: $n^2 + m^2 = y^2$. Es decir, ahora tenemos:

$$z^2 = x^2 + y^2 + 2xm. \quad (1)$$

Lo cual geométricamente lo podemos ver en la **Figura 7** de abajo de la siguiente manera:

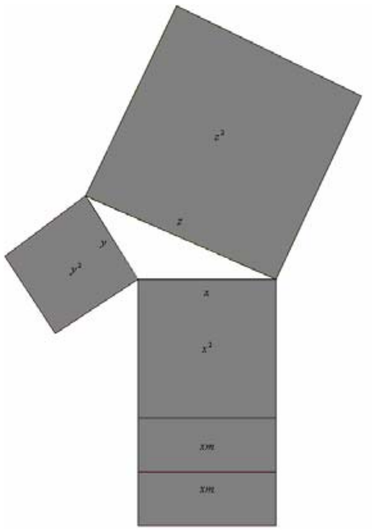


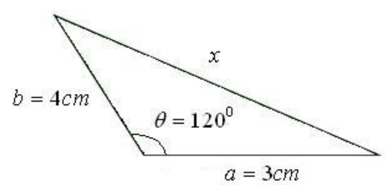
Figura 7: Deducción geométrica del Teorema General de Pitágoras para un triángulo oblicuángulo. Aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración* con los dos cuadrados y los dos rectángulos sobrantes podremos manipularlos como piezas de un rompecabezas y formar el cuadrado grande.

Nota Histórica: La formulación de la época se dice que es arcaica ya que tiene la ausencia de funciones trigonométricas y del álgebra, lo que inevitablemente obligó a razonar en términos de diferencias de áreas para enunciar la **Proposición 12 II** enunciada abajo. De donde se dice lo siguiente: *La aplicación de área suele recibir en nuestro tiempo la denominación de "álgebra geométrica" de los griegos.* Los Elementos. M. L Puertas (1991). Pág. 68.

En la proposición 12 del libro II de los Elementos de Euclides aparece el enunciado de lo anteriormente presentado de la siguiente forma:

Proposición 12 II: En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

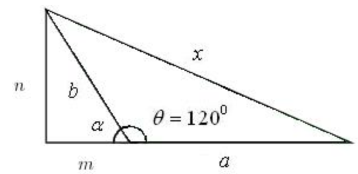
Ejemplo: Hallar la longitud del lado desconocido en el triángulo oblicuángulo, conocida las longitudes de dos de sus lados y el ángulo que forman entre estos dos lados. Véase la figura:



Solución: Dado el triángulo oblicuángulo de la figura de arriba podemos identificar lo siguiente:

Datos (Variables Conocidas)	**Incógnitas (Variables Desconocidas)**
$a = 3cm$	$x = ?$
$b = 4cm$	
$\theta = 120^0$	

Ahora se la siguiente *aprehensión operativa de cambio figural*. Esta *aprehensión operativa de cambio figural* (Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones), pues colocamos un triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el lado común b y dos nuevos lados (catetos) denominados m y n con un ángulo desconocido α.



Luego, como $\alpha + \theta$ forman un ángulo llano, es decir, $\alpha + \theta = 180^0$ o bien $\alpha = 180^0 - \theta.$ Así, como $\theta = 120^0$ entonces $\alpha = 180^0 - 120^0 = 60^0.$ Ahora, de En la proposición 12 II tenemos: $x^2 = a^2 + b^2 + 2am.$ De esta ecuación, desconocemos la longitud de m pero de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo de la figura de arriba tenemos que $\frac{m}{b} = \cos\alpha.$ Luego, $m = b\cos\alpha$ y sustituyendo los valores de estas dos magnitudes obtenemos que:

$$m = 4cm\cos 60^0 = 4cm\left(\frac{1}{2}\right) = 2cm$$

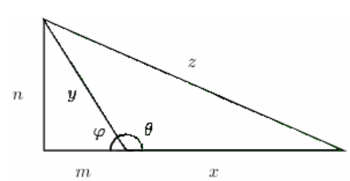
Así,

$$\begin{aligned} x^2 &= (3cm)^2 + (4cm)^2 + 2(3cm)(2cm) \\ &= 9cm^2 + 16cm^2 + 12cm^2 \\ &= 25cm^2 + 12cm^2 \qquad\qquad (*) \\ &= 37cm^2 \end{aligned}$$

O bien, $$x = \sqrt{37}cm \approx 6.08cm$$

Observación: Notemos que en $(*)$ como el triángulo es oblicuángulo, es decir, el ángulo es mayor de 90^0 entonces a $a^2 + b^2 = c^2 = 25cm^2$ le debemos sumar una cantidad debido al aumento del ángulo de 90^0 a $120^0,$ puesto que antes era la longitud de la hipotenusa ($c = 5cm$) y ahora es la longitud $x.$ Debido a este ángulo ahora aumento un área de $12cm^2$ y nos da aproximadamente una longitud de $x \approx 6.08cm.$

Ejercicio: Razonar el ejemplo anterior en términos geométricos, haciendo figuras en foami, cartulina o cartones de diversos colores.
Ahora en general, tomando en consideración el triángulo con los siguientes ángulos, de acuerdo a la figura:



Como en el ejemplo $\theta + \varphi = 180^0$, o bien $\theta = 180^0 - \varphi$. Ahora en el triángulo rectángulo anterior tenemos que $\cos\varphi = \frac{m}{y}$, o bien $m = y\cos\varphi$. Y notando que $\cos\varphi = \cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta$ y reduciendo tenemos que:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta. \quad (2)$$

Y podemos enunciar lo siguiente:

Teorema del Coseno (Ley del Coseno): En los triángulos obtusángulos, el cuadrado de la longitud del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados que forman el ángulo menos dos veces el producto de estos lados por el coseno del ángulo que ellos forman.

¿Será que podemos formar el cuadrado de forma parecida al cuadrado de la **Figura 2** con triángulos oblicuángulos de este tipo?

La respuesta es afirmativa, veamos la **Figura 8** a continuación:

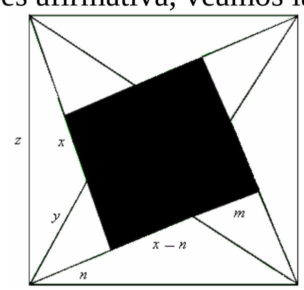


Figura 9: En este cuadrado de lado z hay cuatro triángulos rectángulos formados por un triángulo oblicuángulo de lados x, y e z cada uno. Los cuales son como el original más un triángulo rectángulo de lados m, n e y.
En el centro tenemos un cuadrado negro que más adelante veremos cómo se forma.

De acuerdo a la **Figura 8** de arriba, la unión del triángulo rectángulo blanco con el triángulo oblicuángulo blanco nos da una configuración de un triángulo rectángulo blanco más grande, tenemos que su área denominada A_U es de acuerdo con la fórmula para calcular el área de un triángulo:

$$A_U = \frac{(x+m)n}{2} \quad (**)$$

Recordemos que estas son figuras elementales y por tanto son aditivas de acuerdo con Barreto J (2008a), es decir, si denotamos por A_{TO} el área del triángulo oblicuángulo blanco grande y por A_{TR} el área del triángulo rectángulo blanco pequeño tenemos que:

$$A_{TO} = \frac{xn}{2} \quad \text{y} \quad A_{TR} = \frac{mn}{2}$$

De donde tenemos que se cumple $(**)$ sumándolos algebraicamente nos queda lo siguiente:

$$A_{TO} + A_{TR} = \frac{mn}{2} + \frac{xn}{2} = \frac{(x+m)n}{2} = A_U.$$

O bien, tenemos un área entera denotada por A_E entre estos cuatro triángulos que están en la **Figura 8** de arriba:

$$A_E = 4A_U = 4\frac{(x+m)n}{2} = 2(x+m)n = 2xn + 2mn \quad (I)$$

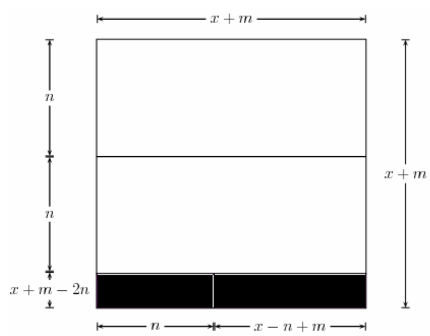
Luego, en el cuadrado de en medio que tiene lado $x-n+m$ tenemos que su área la denotamos por A_C, y de acuerdo con la fórmula para calcular el área de un cuadrado tenemos que:

$$\begin{aligned} A_C &= (x-n+m)^2 \\ &= x^2 - 2xn + 2xm - 2mn + n^2 + m^2 \quad (II) \quad \text{(Desarrollando el producto notable)} \end{aligned}$$

Luego, sumando (I) y (II) obtenemos que el área total de este cuadrado que tiene lado de longitud z de acuerdo con la **Figura 8** de arriba es:

$$\begin{aligned} z^2 &= 2xn + 2mn + x^2 - 2xn + n^2 + 2xm - 2mn + m^2 \\ &= x^2 + n^2 + m^2 + 2xm \qquad \text{(Simplificando)} \\ &= x^2 + y^2 + 2xm \text{ (Pues } n^2 + m^2 = y^2\text{).} \end{aligned}$$

Que es lo obtenido en la ecuación (1) como vimos arriba. Ahora bien, tomando el cuadrado de la **Figura 6** de arriba y hagámosle esta nueva configuración como la mostrada en la **Figura 9** de abajo:



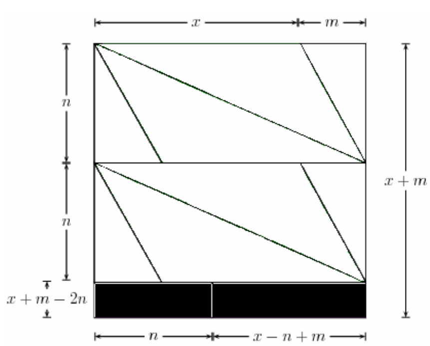


Figura 9: Otra nueva configuración para el cuadrado de lados $x+m$ de la **Figura 6** se ve en la figura de la izquierda.

En la figura más abajo tenemos otra nueva configuración para el cuadrado de lados $x+m$ de la **Figura 6**.
Tomando la figura de arriba a la izquierda de acuerdo con una *aprehensión operativa de reconfiguración*, formamos uno triángulos rectángulos (un triángulo rectángulo más pequeño y un triángulo oblicuángulo como el original) de la **Figura 8**, notemos que estos pueden formar el cuadrado de la **Figura 10** de arriba y por tanto el cuadrado de la **Figura 6** de lado $x+m$.

Podemos formar el cuadrado de lados $x-n+m$ que está en el medio del cuadrado de la **Figura 8** de arriba, lo único que hay que agregarle es un cuadrado de lado n que no es más que el mismo cuadrado gris de la **Figura 6** que nos faltaba por agregar. Veamos la **Figura 10** de abajo:

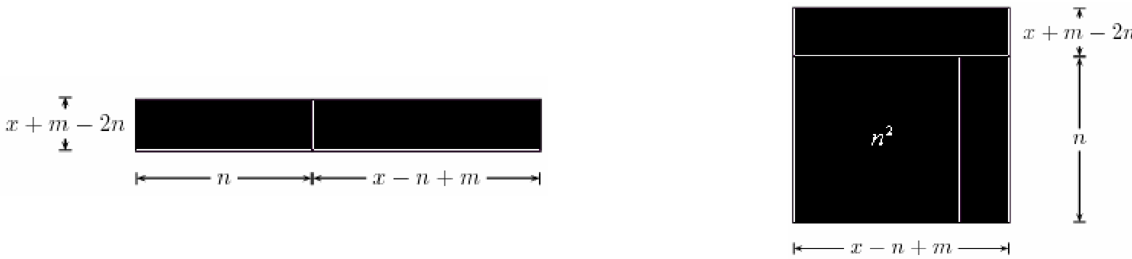
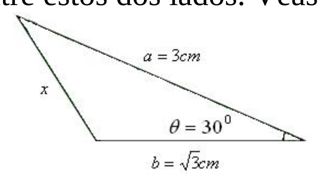


Figura 10: A la izquierda tenemos el rectángulo negro de la **Figura 9**, luego mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración* notamos que podemos formar el cuadrado negro más grande que está en la **Figura 8** agregándole un cuadrado de lado n .

Nota Histórica: Esta configuración de la parte derecha de la **Figura 10** formada por los rectángulos es llamada según los griegos antiguos "gnomon" y es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño (o según Aristóteles es la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados pero no altera su forma). Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general.

Ejercicios:

1) Hallar la longitud del lado desconocido en el triángulo oblicuángulo, conocida las longitudes de dos de sus lados y el ángulo que forman entre estos dos lados. Véase la figura:



2) Razonar el ejercicio anterior en términos geométricos, haciendo figuras en foami, cartulina o cartones de diversos colores.
3) Deducir la fórmula para los otros dos lados del triángulo oblicuángulo, aplicando un método parecido al anterior usando como guía inclusive el ejercicio en la parte 1 anterior, es decir, formando un triángulo rectángulo respecto a los otros lados.

Figura 11: Se muestra un configuración para demostrar geométricamente la ley del coseno para el ángulo agudo

Bosquejo: Una configuración que podemos hacer en la **Figura 11** en la parte izquierda de la parte de arriba puede ser la vista en la **Figura 12** de abajo:

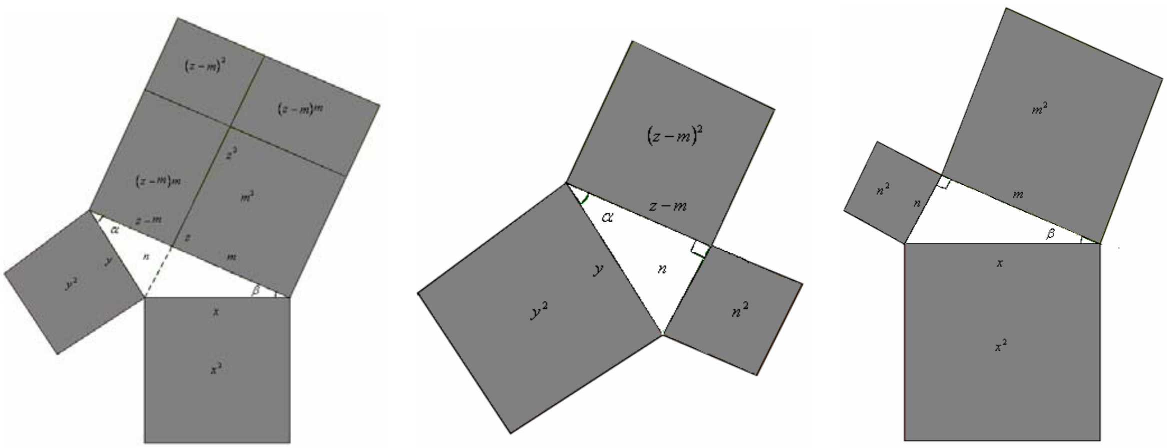


Figura 12: A la izquierda tenemos una configuración hecha para demostrar la ley del coseno para ángulos agudos. En el centro y a derecha tenemos una nueva configuración de la **Figura 14**, separándolo en dos nuevas configuraciones o partes de acuerdo con la separación que permite hacer la altura n.

Donde podemos notar que de acuerdo con el **Teorema 1** ocurre que $y^2 = (z-m)^2 + n^2$. (3)

Y también tenemos que $x^2 = m^2 + n^2$.

Pero el **Teorema 1** también se puede usar para diferencias de cuadrados, obteniendo lo siguiente $n^2 = x^2 - m^2$. Este es la relación que se enuncia del teorema de Pitágoras para un cuadrado que esta sobre la longitud de uno de los catetos en función de la longitud de la hipotenusa y la longitud del otro cateto, revisar Barreto (2011).

Luego, sustituyendo en la ecuación (3) tenemos que: $y^2 = (z-m)^2 + x^2 - m^2$. Y de acuerdo con el producto notable del cuadrado de una diferencia Barreto (2009b), tenemos que: $y^2 = z^2 - 2zm + m^2 + x^2 - m^2$. De donde nos queda que $y^2 = x^2 + z^2 - 2zm$.

En la **Proposición 13 del libro II de los Elementos de Euclides** en una Traducción de M. L Puertas C (1996) aparece este **Ejercicio** enunciado de la siguiente forma:

Proposición 13 II: En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la recta interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

Y notemos que en realidad ocurre lo planteado allí, pues aquí sobran los dos rectángulos de la **Figura 12**, para formar el cuadrado más pequeño, por lo cual se dice que es menor en contraposición con la **Proposición 12 II**, en donde más bien sobran.

POR DESGLOSE DE ÁREAS[2]

En un cierto número de las demostraciones del teorema intervienen un cálculo de áreas.

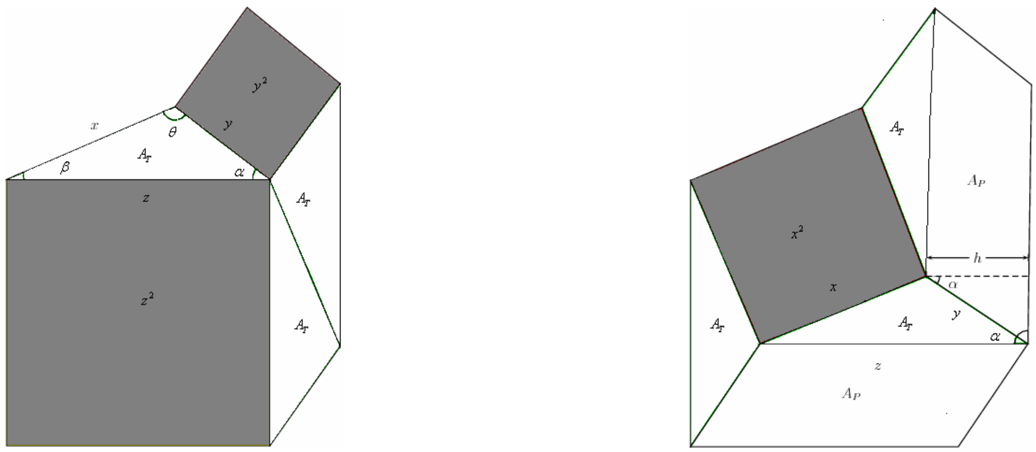


Figura 13: Configuración heptagonal para demostrar el teorema, cuando el ángulo es agudo.

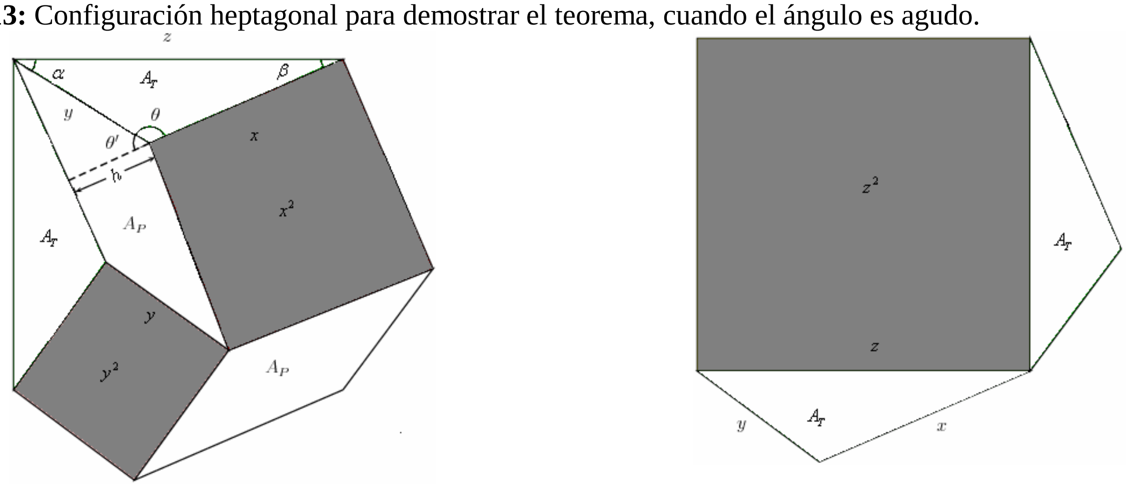


Figura 14: Configuración hexagonal para demostrar el teorema del coseno, cuando el ángulo es obtuso.

La **Figura 13** de arriba divide un heptágono de dos maneras diferentes para demostrar el teorema del coseno en el caso de un ángulo agudo y en la **Figura 14** de arriba se desglosa un hexágono de dos maneras diferentes para demostrar el teorema del coseno en el caso de un ángulo obtuso.

2 Tomada parcialmente de pagina Web: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno

Igualando las áreas en la **Figura 13** y en la **Figura 14** en cualquiera de los dos casos y cancelando las figuras iguales se obtiene en que

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2xy\cos\alpha, \qquad z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta.$$

Verificarlo usando las configuraciones geométricas de las figuras de arriba, haciendo las figuras en foami o cartulinas de diversos colores.

El teorema del coseno es también conocido por el nombre de teorema de Pitágoras generalizado, ya que el teorema de Pitágoras es un caso particular de este: Cuando el ángulo θ es recto o, dicho de otro modo, cuando $\cos 90^0 = 0,$ el teorema del coseno se reduce a $z^2 = x^2 + y^2$. Que es precisamente la formulación del teorema de Pitágoras.

INTERPRETACIONES Y CONCLUSIÓN

En esta experiencia realizada con los estudiantes se evidenció que el trabajo en equipo es muy importante sobre todo cuando se construye el aprendizaje a partir de figuras geométricas realizadas en cartulinas de colores o en foami, los cuales le permite a los integrantes del grupo configurar y reconfigurar los procedimientos a través de procesos llegando luego a razonamientos que les permiten crear un aprendizaje significativo, teniendo presente que la comunicación en el aula de matemática es muy importante ya sea de diversos modos de comunicación que no se restringen únicamente a la verbal.

Ahora bien, según Bruno D´Amore y Godino (2007) dos grandes investigadores de Didáctica de la Matemáticas debemos clarificar, comparar y articular los enfoques teóricos que nos ocupan actualmente debido a que estamos vinculados con otras disciplinas como son la epistemología, la psicología, la pedagogía y la propia matemática entre otras, las cuales usan instrumentos y presupuestos teóricos divergentes cuya coherencia y utilidad no es tan obvia y no se puede dar por asumida tan fácilmente.
En ese sentido se ha vencido el encierre teórico y las desarticulaciones conceptuales y metodológica entre teorías emergentes de nivel intermedio no solo entre teorías que comparten un mismo paradigma epistemológico de base, sino también entre paradigmas y escuelas del pensamiento lejanas, bien sean el pragmatismo, el realismo, el constructivismo, el cognitivismo, etc. Teniendo presente que para hacer una comparación y articulación es preciso construir un sistema de referencia más global, que permita situar cada teoría en el panorama comprensivo de la educación matemática y de igual modo, tener en cuenta simultáneamente las distintas dimensiones implicadas en los problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática –epistémica, intruccional, política- y los diversos niveles de análisis lo cual nos permite además contextualizar los contenidos para lograr un aprendizaje verdaderamente significativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1978). *Educational Psychology: A Cognitive View* (2[a] ed.). New York: Holt, Rinehart & Winston. Barreto, J. (2008a). *Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos.* Revista Números (69). Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.pdf.

Barreto, J. (2008b). *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.* Revista Números (69). Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.pdf.

Barreto, J. (2009a). *Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico*. Revista Números (70). Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf.

Barreto, J. (2009b). *Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica.* Revista Números (71). Revista Números (71). Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_02.pdf.

Barreto, J. (2010). *Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras*. Revista Números (75). Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Articulos_01.pdf.

Barreto, J. (2011). *Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*. Revista Matematicalia. Vol. 7. No. 2. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.matematicalia.net/articulos/v7n2jun2011/jbarreto.pdf.

D´Amore B y Godino J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (2), 191-218.

Euclides. (1996). *Elementos*. [Traducción de M. L Puertas C.]. (tres vols.). (1[a] ed.). Editorial Gredos: España.

González, F. (1987). Trascendencia de la resolución de problemas de matemáticas. *Paradigma, 8* (2), 247-259. Junio-Diciembre. Venezuela.

González, F. (2005). *Resolución de Problemas*. Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Colección Aula. ULA. Mérida, República Bolivariana de Venezuela, Agosto.

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22[a] ed.). Consultado en: http://www.rae.es/rae.html.

Torregosa, Germán y Quesada, Humberto. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (2), 273-300.