EL NÚMERO IRRACIONAL: UNA VISIÓN HISTÓRICO – DIDÁCTICA

Juan Carlos Sánchez yCarmen Valdivé
UPEL-IPB, UCLA (Venezuela)
jsanchezcolmenarez@gmail.com, carmenv@ucla.edu.ve

RESUMEN

El estudio que se presenta se realizó con el propósito de estudiar: (1) desde un punto de vista histórico-epistemológico la evolución de la noción de número irracional, (2) desde un punto de vista didáctico, la enseñanza del concepto de número irracional a través del currículo y los libros de texto. En este manuscrito sólo mostramos el primer propósito. Entre los hallazgos encontramos cuatro esquemas conceptuales en su acepción epistemológica: el irracional asociado a una aproximación entre razones, asociado a lo aritmético, a una aproximación de un número racional cercano y el irracional asociado a un número.

Palabras clave: número irracional, esquemas conceptuales epistemológicos, evolución histórica

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa han descrito las diversas dificultades que poseen los estudiantes al enfrentarse con el concepto de número y sobre todo al momento de resolver operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) que involucran el objeto matemático en cuestión Cuello (2001); Cabañas, Guillén y Galeana (2004); Valdivé (2004); Conde (2007) y Crespo Crespo (2009).

Arcavi, Bruckheimer y Ben-Zvi; Peled y Hershkovitz, (citados por Sirotic y Zazkis, 2006) así como también Fischbein, Jehiam y Cohen (1995) afirman que a veces son sorprendentes las deficiencias de los estudiantes de la especialidad de Matemática y profesores de Matemática en la comprensión del número irracional, calificándolas como ideas vagas, incoherentes y fragmentarias, añadiendo que las causas que han provocado esta problemática es la presentación del número irracional en los libros de textos en conexión con muy pocos ejemplos como el número π o las raíces cuadradas de los números 2 ó 3. Deficiencias que nos hacen reflexionar, analizar y estudiar sobre la enseñanza y aprendizaje de número, en particular del número irracional, concepto fundamental en la enseñanza del Cálculo.

Al existir un problema didáctico en el aprendizaje del concepto de número, en particular, el número irracional invita a estudiar cuáles son los motivos que lo han originado. Interesa como didactas indagar los sistemas didácticos, en especial el que tiene que ver con el propio objeto matemático en cuestión: *su evolución histórica*. Algunas investigaciones indican que a pesar de las marchas y momentos de ruptura por las que pasa la evolución de un concepto en la historia, con sus retrocesos y desviaciones, su estudio constituye una herramienta y un punto de partida, en manos del didacta (Berge y Sessa, 2003; Fernández y Valdivé, 2006; Santamaría y Valdivé, 2006; Escobar y Valdivé, 2006, Valdivé y Garbin, 2008 y Valdivé, 2008; Crespo Crespo, 2006). En este escenario, sería de gran utilidad peguntarse ¿cómo los matemáticos a lo largo de las diferentes épocas llegan al origen de un concepto matemático? y ¿cómo a través de estos conceptos se pueden plantear definiciones formales? O bien como expresa Zapico (2006, p. 3):

> mostrar a los jóvenes de qué modo se fue construyendo nuestra Ciencia (en el transcurso de milenios que nos precedieron) y de presentar a sus creadores (cosa que se hace habitualmente en otras áreas, por ejemplo: Literatura) la muestra tal cual es: un producto de la actividad humana que se gestó a partir de diferentes estímulos, en ocasiones para resolver problemas prácticos y otras veces por motivos de orden artístico o espiritual.

Boyer (2003) expresa que el origen del número irracional está estrechamente relacionado con el descubrimiento de los segmentos inconmensurables (segmentos que no poseen una unidad común). Posteriormente, el estudio de las razones de segmentos conmensurables, o de segmentos inconmensurables pasan a ser cocientes y las proporciones se convirtieron en igualdades numéricas. Más aún, las razones entre segmentos conmensurables sufrieron la metamorfosis que las llevó a números racionales y aquellas razones entre inconmensurables pasaron a ser números irracionales (Jiménez, 2004). En el caso del número irracional sólo se reconoce su existencia por la mayoría de los matemáticos, en el siglo XIX, debido a la contribución de Dedekind, Cantor y Weierstrass en el intento de aritmetización del Análisis, estudiando la completitud del conjunto de los números reales (Berge y Sessa, 2003; Valdivé y Garbin, 2008, Edwards, 1979).

Considerando los planteamientos antes expuestos, se presenta en este artículo un estudio, que forma parte de una investigación en Educación Matemática cuyo propósito es estudiar la conceptualización de la noción de número irracional en la historia (los esquemas conceptuales epistemológicos de la noción de número irracional), en los libro de texto escolares, y los esquemas conceptuales asociados a la noción en los estudiante para profesores de matemática y en profesores de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto, mismos que han cursado la asignatura e impartido la asignatura Sistemas Numéricos, respectivamente.

El estudio que se presenta, tiene como propósito inicial, indagar la conceptualización de la noción de número irracional en la historia, lo cual permitirá poseer un marco y desde allí aproximarnos a los esquemas conceptuales asociados a la evolución histórica del concepto de número irracional, así como también analizar los elementos didácticos que sobre el número irracional aportan los libros de textos escolares y los esquemas conceptuales asociados que poseen los estudiantes para profesores de matemática. Estudios que requerirían de otro manuscrito para su exposición. Los hallazgos encontrados, proporcionan insumos significativos para el didacta, permitiendo diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción de número irracional de los matemáticos más representativos en una época histórica.

Este manuscrito se desarrolla de la manera siguiente: Primeramente la fundamentación teórica, la cual permite ubicar el objeto de estudio de investigación (número irracional) dentro de una aproximación teórica cognitiva (Pensamiento Matemático Avanzado-PMA), en particular el constructo esquema conceptual epistemológico que incorporan al PMA Valdivé y Garbin (2008) y la metodología de la investigación. Esta última como proceso que permite alcanzar el propósito trazado. La tarea de categorización y descripción de los esquemas conceptuales epistemológicos propuestos es realizada a partir del estudio de la evolución histórico-epistemológica de un concepto tal como lo proponen Valdivé y Garbin (2008). Luego mostramos los hallazgos y finalmente las conclusiones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Teoría Cognitiva Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

El estudio que se presenta como se dijo en la introducción, se enmarca en el llamado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), la cual es una aproximación teórica cognitiva que ha sido desarrollada según Valdivé y Garbin (2008) por Tall (1991, 1992, 1995, 2001, 2004, 2005) y Dreyfus (1990, 1991).

Tall (1991) afirma que el PMA es una teoría cognitiva que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático, así como también, los procesos cognitivos que emplea el estudiante para el aprendizaje de algún conocimiento matemático. Por su parte Valdivé (2008, p. 15), sostiene que el objetivo principal de esta teoría se enfoca "hacia la descripción de la naturaleza del conocimiento matemático de los estudiantes a la hora de estudiar un concepto matemático y de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de estos conceptos, intentando aclarar lo que ocurre en la mente de un individuo". Dentro de esta teoría nos interesa en particular, los esquemas conceptuales como herramienta teórica de investigación.

Esquemas Conceptuales

El esquema conceptual es definido según el PMA, como "una estructura cognitiva total que está asociada con el concepto, el cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades asociadas y los procesos" (Tall y Vinner, 1981, p. 152). Es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser “una representación visual del concepto, en caso de que el concepto tenga alguna representación visual, también puede ser una colección de impresiones o experiencias” (Vinner, 1991, p. 67). Asimismo, la parte del esquema conceptual que es activado en un contexto particular, es llamado esquema conceptual evocado. Varias veces, aparentemente las imágenes contrarias pueden ser evocadas (Valdivé y Garbin, 2008).

Actualmente se hace una distinción entre el esquema conceptual previo (Met-before) (Chin y Tall, 2001; Tall, 2004; Tall, 2005) y un esquema conceptual. El met-before está asociado a los conocimientos o experiencia previa que es evocada para darle sentido a una situación. Chin y Tall (citados por Valdivé, 2008).

Valdivé (2008) considera que el esquema conceptual en su carácter epistemológico, puede referirse a "la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto" (p. 419).

APROXIMACIÓN A LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL NÚMERO IRRACIONAL

La aproximación a la evolución histórica del concepto de número irracional se presenta indicando los aportes de matemáticos y civilizaciones antiguas que impulsaron el estudio de este concepto. Hemos llegado a la siguiente clasificación: Edad Antigua, Edad Media, Renacimiento, Edad Moderna y Contemporánea. Esta aproximación se hace desde la aparición intuitiva del número irracional mediante el estudio entre segmento inconmensurable (Edad Antigua), hasta su reconocimiento como número en el siglo XIX en virtud de la aritmetización del Análisis (Edad Contemporánea). Cada época se ha identificado con un título caracterizador que recoge la idea fundamental de la misma.

Edad Antigua *"Origen de los segmentos inconmensurables"*
En la culturas antigua (*cultura egipcia, cultura mesopotámica, cultura china y la cultura griega*) se reflejan el estudio temprano de segmentos inconmensurables, a través de la búsqueda del área de un circulo o la relación existente entre los elementos de un cuadrado, lo que lleva a las primeras aproximaciones de los números irracionales π y $\sqrt{2}$.
En la cultura egipcia el problema 50 del escriba Ahmes muestra que "el área de un campo circular de 9 unidades de diámetro es la misma que el área de un cuadrado de lado 8 unidades" (Boyer, 2003; p. 39). Esta situación muestra el uso de una aproximación de π . Lo conciben como $\pi = 3{,}16$. *En la cultura mesopotámica* se observó en tablillas de texto cuneiforme el uso una figura cuadrada con sus diagonales, cuyo valor del lado es 30 y aparecen los números 42; 25, 35 y 1,24, 51, 10 a lo largo de la diagonal que en fracciones sexagesimales se representa $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$. Números que evidencian, según Boyer (2003) la “razón del lado y su diagonal y que muestran una exactitud bastante fiel de $\sqrt{2}$ como número irracional” (p. 52).
En *la cultura china* se intenta encontrar valores cada vez más exactos de π Entre estos se encuentran el indicado en la obra de Tsu Ch’ung-Chih (430 a.C.), el cual dio para π el valor de 3,1415927 como un valor por exceso y 3,1415926 como valor por defecto. Finalmente, *en la cultura griega*, se llevo a cabo el descubrimiento de los segmentos inconmensurables, lo cual se le atribuye a Hipaso de Metaponto (450 a.C.). Lo logra al resolver la Sección Áurea. Al descubrirse estos segmentos se devasta según Boyer, (2003) la filosofía pitagórica.
Los matemáticos Teodoro de Cirene (390 a.C.), Eudoxo de Cnido (355 a.C.) y Arquímedes de Siracusa (287 a.C.) ofrecen aportes importantes en el estudio de segmentos inconmensurables. Teodoro de Cirene (390 a.C.) "contribuyó al desarrollo temprano de la teoría de las magnitudes inconmensurables, pues demostró la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos (desde el 3 hasta el 17 ambos incluidos)" Boyer (2003; p. 123). Por su parte, Eudoxo de Cnido (355 a.C) presentó una teoría general de proporciones que “permitió resolver uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por el descubrimiento de los segmentos inconmensurables” (Edwards, 1979, p. 13; Berge y Sessa, 2003, p. 175). Finalmente, Arquímedes de Siracusa (287 a.C.) obtuvo una aproximación de la razón de

una circunferencia y su diámetro mediante el cálculo de perímetros de polígonos inscritos. Su aproximación al valor de π es expresado por la desigualdad $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}$.

Edad Media "*hacia el reconocimiento del irracional como número*"
Los estudios de los matemáticos Brahmagupta (628 d.C.), Omar Khayyam (1050 d. C), Al-Kashi (1436 d.C.) y Leonardo de Pisa (1180 d.C.) revelan nuevos aportes en el estudio intuitivo del número irracional. Determinan valores más exactos para el número irracional π y ϕ. Es importante resaltar, que para este período, en la cultura hindú "se utilizaron los números enteros y racionales, además del número irracional, introduciendo nuevas reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir con estos números" (Boyer, 2003; p. 285).
Según Edwards (1979), Omar Khayyam (1050 d.C) reemplazó la teoría de proporciones geométricas de Euclides, por un planteamiento numérico. Omar se acercó al concepto del número irracional y trabajó de hecho con el concepto de número real en general. Por su parte, para Al-Kashi (1436 d.C.) su "aproximación de π fue 3,14159265358979" (Boyer, 2003; p. 316). Consideró además que "cualquier razón, constituida o no por segmentos conmensurables, debía poder expresarse como un número" (Edwards, 1979, p. 81).
Finalmente, Nicole Oresme (1323 d.C) en su obra Algorismus Proportionum realizó interesantes generalizaciones en la teoría de proporcionalidad. Además, se "anticipó en cierto sentido a lo que hoy en día escribimos como $x^{\sqrt{2}}$ que no es más que el estudio de potencias irracionales". Pero la falta de terminología y de una notación adecuada, le impidió desarrollar de manera efectiva su concepción sobre estas potencias (Boyer, 2003; p. 338).
Leonardo de Pisa (1180 d.C.), mostró una de las "aproximaciones más precisa de una raíz irracional de una ecuación algebraica en Europa hasta ese momento e incluso durante los 300 años siguientes". Otra contribución fue la sucesión de Fiboncci: $1,1,2,3,5,8,13,21,...,u_n$ donde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ y su límite es igual a la razón que define la sección áurea $(\sqrt{5}-1)/2$ (Boyer, 2003, p.329).

Renacimiento "*reconocimiento del irracional como número mediante aproximaciones a números racionales*"
Jerónimo Cardano (1501 d.C) y Chuquet (1450 d.C) aceptaron los números irracionales con naturalidad, "a pesar de que no estaban fundamentados de una manera rigurosa, puesto que se les podía aproximar a un número racional" (Edwards, 1979; p. 94).

Edad Moderna y Contemporánea: "*el irracional como un número*".
Se acepta y se define en este período el irracional como número a través de las contribuciones de Méray (1836 d.C), Weierstrass (1815 d.C), Dedekind (1831 d.C) y Cantor. Méray "consideraba que una sucesión convergente determinaba o bien un número racional como límite o un número ficticio" (Boyer, 2003; p. 694). Para Weierstrass los números irracionales eran conjuntos de racionales y no meras sucesiones ordenadas de racionales (Edwards, 1979; Cantoral y Farfán, 2004). Por su parte, Dedekind, define la construcción de un sistema numérico completo (conjunto de los números reales) a través del concepto de cortadura. Este estudio de las cortaduras permite

“definir formalmente al número irracional” (Boyer, 2003, p. 695; Edwards, 1979, p. 331; Berge y Sessa, 2003, p. 182). De igual forma Cantor presenta una construcción de un sistema numérico completo (conjunto de los números reales). Cantor presenta una construcción de los números reales mediante el estudio de sucesiones regulares, lo cual permite definir el número irracional.

METODOLOGÍA

El estudio está enmarcado en uno de tipo cualitativo. Es de carácter descriptivo, interpretativo y documental. Es de carácter interpretativo, dado que se estudian a los actores, respetando sus actuaciones, puntos de vistas para poder encontrar elementos que permitan determinar las dificultades que se presentan en una situación matemática (Hernández, Fernández y Batista, 2006). Es documental y descriptivo porque permite detallar la evolución histórica de los números irracionales con el apoyo, principalmente, en trabajos previos, informaciones y documentos divulgados por medios impresos y electrónicos (Manual de Trabajos de Grado de especialización y maestría y tesis doctorales UPEL, 2006).

Los actores sociales son los libros los cuales han llegado a ser considerados como instrumentos cuasi-observables que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador en situaciones inaccesibles (Woods, citado por Valdivé, 2008). Para el estudio de la evolución histórica se utilizan las siguientes fuentes secundarias: Boyer (2003); Berge y Sessa (2003); Edwards (1979); Kline (1985); y Valdivé y Garbin (2008).

METODOLOGÍAS ESPECÍFICAS DE ANÁLISIS

La metodología de recolección y análisis de la información se desarrolla a través de cuatro actividades, acordes con el método inductivo, siguiendo lo propuesto por Rodríguez, Gil y García (1999) y en concordancia a la metodología propuesta por Valdivé y Garbin (2008).

ACTIVIDADES DE ANÁLISIS

Fragmentación de la información

Se redujo la información haciendo una reconstrucción histórica provisoria de la noción de número irracional, considerándose para ello cuatro períodos históricos resaltantes como se explicita en la sección anterior. La información se separa en unidades de análisis (segmentos relevantes y significativos) tal como lo propone Valdivé (2008).

Identificación y clasificación de las unidades de análisis.

Se examina cada “unidad de análisis (cada período histórico) para identificar en ellas, componentes temáticos que permitan clasificarlas en una u otra categoría” Valdivé (2008, p 113).

Disposición y Organización de la Información.

Para el análisis epistemológico “se sitúan y transforman los períodos históricos en un conjunto organizado de información, presentándolos en forma de matriz. Luego se categoriza utilizando las redes sistémicas. Ésta última presenta procesos y producto, relaciones y agrupamientos conceptuales" Valdivé (2008, p 113).

Las redes sistémicas se estructuran según Valdivé y Garbin (2008, p. 243) de la siguiente manera:

> … en forma de árbol con ramas que se subdividen en "clases" (se usa como formalismo la barra (|), que son categorías que se excluyen entre ellas), y en "aspectos" (se usa la llave ({) para indicar que son categorías no excluyentes). Con la llave (}) se indica que la nueva categoría incluye las anteriores. Al final de cada rama aparece el nombre del matemático representativo de cada categoría y/o subcategoría, o el número del actor social (n) que corresponda.

Descripción estructurada: Los Hallazgos.

La descripción y los hallazgos se detallaran en el siguiente apartado.

HALLAZGOS

A continuación se presenta una matriz que describe los cuatro períodos considerados provistos por la reconstrucción historia, acompañados de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados por períodos (en este trabajo, al hacer referencia al esquema conceptual epistemológico usaremos las iniciales ECE_n, la "n" indica el número del esquema conceptual epistemológico). Son en total cuatro esquemas conceptuales epistemológicos (ECE_n) tres de ellos previos ($ECEM_n$) (Valdivé, 2008; Valdivé y Garbin, 2008; Sánchez, 2010).

PERÍODO HISTÓRICO	ECE
Edad Antigua *Origen de los inconmensurables.*	El irracional asociado a una aproximación entre razones. **$ECME_1$**
Edad Media *Hacia el reconocimiento del irracional como número.*	El irracional asociado a lo aritmético. **$ECME_2$**
Renacimiento *Reconocimiento del irracional como número mediante aproximaciones a un número racional cercano.*	El irracional asociado a una aproximación de un número racional cercano. **$ECME_3$**
Edad Moderna y Contemporánea *El irracional como un número.*	El irracional asociado a un número. **ECE_1**

TABLA 1: Esquemas Conceptuales Epistemológicos (ECE_n) por período.

En este aparado se presenta la descripción y análisis de los cuatro esquemas conceptuales determinados en la reconstrucción histórica. Hallazgos obtenidos con la ayuda de la representación en redes sistémicas. Luego de cada red, se presenta para cada esquema conceptual epistemológico su descripción y su caracterización.

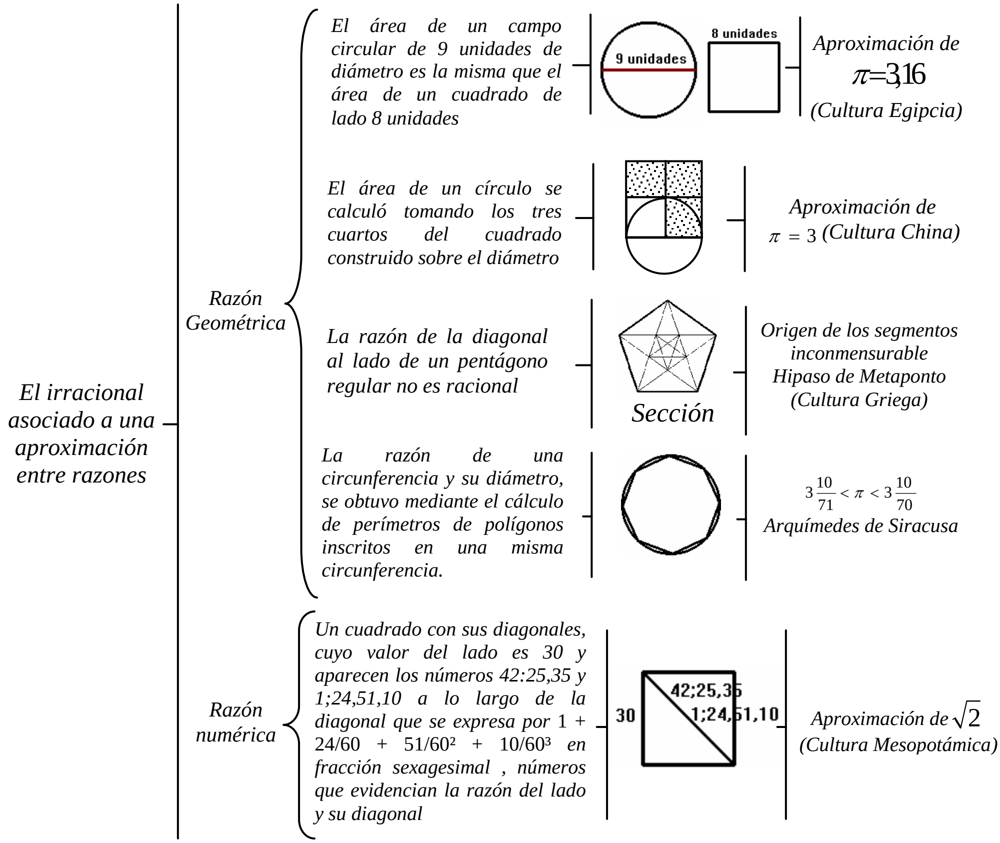

Figura 1: ($ECEM_1$) El irracional asociado a una aproximación entre razones.

Descripción del $ECEM_1$:

En las diversas culturas antiguas tales como la china, la egipcia, la babilónica, la hindú y finalmente la griega se da origen a ideas nacientes que posteriormente reflejaron la necesidad de una nueva clase de números, esto es, el número irracional.

El reconocimiento del estudio de proporciones entre razones geométricas y numéricas que dio origen a los segmentos inconmensurables implica el surgimiento de algunas ideas sobre la noción de número irracional, siendo ellas (las razones) imágenes que permiten que emerja. Esas representaciones están ligadas a una razón geométrica o numérica y a la idea central pitagórica “todo es número” por ser estos los conceptos prevalecientes en que se movían los matemáticos.

Caracterización del $ECEM_1$

Ideas:

La razón asociada a las “ideas nacientes” de la noción de número irracional

Representaciones asociadas al concepto que lo hacen emerger: Gráficas de: polígonos inscritos y circunscritos en figuras curvilíneas. Divisiones indefinidas de segmentos y lados de polígonos. Pentágonos inscritos mediante el uso de sus diagonales.

Contexto: geométrico

Procedimientos:

a) geométricos: comparar magnitudes e inscribir y circunscribir polígonos en una circunferencia, encontrar razones geométricas y

b) aritmético: encontrar la razón numérica con el uso de fracciones sexagesimales.

Conceptos asociados: Teoría de la proporcionalidad entre razones de magnitudes de diferentes y del mismo tipo (números, longitudes, áreas y volúmenes), equimúltiplos, razón geométrica y numérica.

Métodos: 1) Método de exhauscíón de Eudoxio,

2) "el Método" de Arquímedes y

3) Método de reducción al absurdo de Aristóteles y Teodoro.

- *El irracional asociado a lo aritmético*
  - *Como valores de π.*
    - *Valor de π práctico (3) y el valor exacto $\sqrt{10}$ (Brahmagupta)*
    - *Aproximación de $\pi = 3{,}14159265358979$ (Al-Kashi)*
  - *Como un uso práctico.*
    - *Uso de los números enteros, racionales, además de los irracionales, introduciendo reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir con esos números (Cultura Hindú)*
  - *Asociado al estudio de la teoría de proporcionalidad.*
    - *Reemplazo de la teoría de proporciones geométrica de Euclides, por un planteamiento numérico.*
      - *Acercamiento al concepto del número irracional y al concepto del número real en general. (Omar Khayyam)*
    - *Generalización de la teoría de proporciones presentada por Bradwardine incluyendo reglas para potencias y una notación especial para las potencias de exponentes fraccionarios.*
      - *Fórmulas: $\frac{1\cdot p\cdot 1}{4\cdot 2\cdot 2}$ para representar: $\sqrt[4]{2\ \frac{1}{2}}$*
        - *Inicio del estudio de potencias irracionales pero por falta de una terminología y una notación adecuada impidió su desarrollo (Nicole Oresme)*
  - *Aproximaciones de una raíz irracional de una ecuación algebraica.*
    - *Mediante el estudio de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.*
      - *Se obtiene la aproximación más precisa de una raíz irracional de una ecuación algebraica mediante el uso de fracciones sexagesimal (Leonardo de Pisa)*

Figura 2: ($ECEM_2$) El irracional asociado a lo aritmético.

Descripción del $ECEM_2$:

Las aproximaciones aritméticas para el cálculo de las raíces no racionales de una ecuación cúbica mediante el uso de fracciones sexagesimales, el reemplazo de la teoría de proporciones a planteamientos aritméticos por parte de algunas civilizaciones y el uso de valores numéricos aproximados de π, permite asociar al irracional hacia lo aritmético.

En la cultura hindú, Brahmagupta, propone dos valores de π, el valor práctico igual a 3 y el valor exacto $\sqrt{10}$. Asimismo, los hindúes (Edad Media) ya utilizaban con naturalidad los números enteros, racionales e irracionales e introdujeron reglas que permitían sumar, restar, multiplicar y dividir con estos números. Estas operaciones no tenían fundamento lógico, dado que los hindúes carecían de una distinción clara entre los resultados exactos e inexactos.
Por otra parte, en la cultura árabe, Omar Khayyam, reemplazó la teoría de proporcionalidad de Euclides por planteamientos aritméticos lo que le permitió acercarse al concepto de número irracional. Fibonacci obtuvo la mejor aproximación de la raíz irracional de una ecuación cúbica mediante el uso de fracciones sexagesimales.
En este momento histórico, el irracional está asociado a lo aritmético cuando se considera el reemplazo de la teoría de las proporciones geométricas reducible a conceptos aritméticos y al estudio de aproximaciones de raíces irracionales de ciertas ecuaciones mediante fracciones sexagesimales.

Caracterización del ECEM$_2$
Representaciones asociadas al concepto que lo hacen emerger:

a) fracciones decimales y sexagesimales, aproximaciones de π, ecuaciones cúbicas.

Contexto: Aritmético – Algebraico.
Procedimientos:

a) Aritmético: reglas de operaciones entre irracionales propuestas por los hindúes, reemplazo de la teoría de proporcionalidad de Euclides y aproximación de raíces irracionales

b) algebraico: estudio de ecuaciones algebraicas.

Conceptos asociados: Teoría de la proporcionalidad geométrica, raíces de una ecuación.

- *El irracional asociado a una aproximación de un número racional cercano*
  - *Como medición*
    - *Todo lo que se puede medir se logra representar por un segmento (Nicole Oresme)*
      - *El conocimiento debería basarse en la medida, la cual puede reflejar un número racional o una aproximación de un número racional (Nicolás de Cusa)*
  - *Como cálculo de la raíz de una ecuación*
    - *Se consideraba una nueva clase de número (el número irracional), que Cardano llamó numeri ficti,*
      - *El número irracional ya era utilizado con frecuencia (a pesar de no estar fundamentados rigurosamente) mediante aproximaciones a números racionales (Jerónimo Cardano)*

Figura 3: (ECEM$_3$) El irracional asociado a una aproximación de un número racional cercano.

Descripción del ECEM$_3$:
Nicolás de Cusa toma en cuenta las contribuciones dadas por Oresme en el período anterior (Edad Media). Oresme afirmó que *todo lo que se puede medir es posible expresarlo mediante un segmento*.
Cardano divulga la solución no sólo de la ecuación cúbica, sino también de la ecuación cuadrática. Esto condujo a las primeras consideraciones significativas de una nueva clase de

número (el número irracional), que Cardano llamó numeri ficti. Este ya era utilizado mediante aproximaciones a números racionales cercanos. En este momento histórico, el estudio de medidas y el cálculo de radicales y raíces de una ecuación permite asociar al número irracional a una aproximación de un número racional. En esta categoría (ECME$_3$) el esquema conceptual previo asociado al número irracional podríamos decir, que está relacionado a los conocimientos o experiencias previas sobre el número racional que le dan sentido a la noción.
Las representaciones siguen no estando vinculadas a la noción propiamente, sino que son imágenes que permiten que ella emerja (Valdivé y Garbin, 2008).

Caracterización del ECEM$_3$

Representaciones asociadas al concepto que lo hacen emerger:

Segmentos de recta, estudio de radicales que reflejan raíces irracionales.

Contexto:

Aritmético – Geométrico.

*Procedimientos***:**

a) Aritmético: aproximación de raíces irracionales de ecuaciones cúbicas

b) Geométrico: representación de un número (medida) mediante segmento.

Conceptos asociados: Raíces de una ecuación, medida.

El irracional asociado a un número

- *Como el límite de una sucesión regular.*
  - *Una sucesión convergente determina, o bien un número racional como límite, o un número ficticio como su límite ficticio, estos números ficticios pueden ordenarse y son los que conocemos como número irracional (Méray 1835 d.C)*
  - *Los números irracionales se definen de una manera aún más general como conjuntos de racionales, más bien que como meras sucesiones ordenadas de racionales (Weierstrass 1815 d.C)*
  - *Sean A el conjunto de números racionales y B el conjunto de los límites de una sucesión fundamental de racionales. Así como el sistema A ha dado lugar al sistema B los dos sistemas A y B generan un nuevo sistema C*
    - *Mientras que los sistemas A y B son tales que se puede igualar cada uno de los* ***a*** *con un* ***b*** *pero no todo* ***b*** *a un* ***a****, se puede por el contrario, igualar no solamente casa uno de los* ***b*** *con un* ***c*** *sino también cada uno de los* ***c*** *a un* ***b****. (Cantor 1845 d.C)*
- *Como el ínfimo o supremo de un conjunto*
  - *Cualquier partición de los números racionales en dos clases disjuntas A y B tales que todo número de la primera clase A sea menor que todo número de la segunda clase B existe uno y sólo un número real que produce esta cortadura*
    - *Si en A hay un número máximo o en B un mínimo entonces la cortadura define un número racional. Si en A no hay máximo ni en B un mínimo entonces la cortadura define un número irracional (Dedekind 1831 d.C)*

Figura 4. (ECE$_1$). El irracional asociado a un número

Descripción del ECE$_1$:

En este período histórico, Vieta (1540 d.C) da una expresión numérica para π bajo la forma de un producto infinito que puede escribirse como sigue:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$$

Lambert en 1770 y Legendre en 1794 demuestran que tanto π y π^2 son irracionales. Por otra parte, el estudio de las series infinitas hizo posible definir los números reales (Méray, Weierstrass, Dedekind y Cantor) con su aritmética propia que permitiese reducir el Análisis a la Aritmética. Esto, producto del abordaje de la unificación de los aspectos continuos y discretos de la Matemática bajo el concepto de grupo (Valdivé y Garbin, 2008; Sánchez, 2010).

Lo anterior permite demostrar la existencia de manera formal del irracional como un número, el cual heredaría las operaciones dadas en los números reales (adición, sustracción, multiplicación y división).

Méray al realizar el estudio de las convergencias de las sucesiones de Cauchy consideraba que una sucesión convergente determinaba o bien un número racional como límite o un número ficticio. Weierstrass por su parte propone una definición de número irracional independientemente del concepto de límite. Define así al número irracional de una manera aún más general como conjuntos de racionales, más bien que como meras sucesiones ordenadas de racionales.

Dedekind reconociendo la densidad de los puntos sobre una recta y observando que los racionales gozan de esta propiedad, a pesar de no formar un continuo, establece el estudio de las cortaduras como herramienta para construir un nuevo conjunto que llenara los vacíos que dejaban los racionales. Esto permite el reconocimiento formal del irracional como número. Finalmente Cantor presenta una construcción de los números reales mediante el estudio de sucesiones regulares, el cual también permite el reconocimiento formal del irracional como número.

Caracterización del ECE$_1$

Idea: El número real, continuidad.

Representaciones asociadas a la noción:

"n", "$\{a_n\}$", "$\{a_n\}-\{b_n\}$", $\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$

Representaciones que la hacen emerger:

a) límite de una sucesión regular y

b) ínfimo o supremo de un conjunto ordenado.

Contexto: aritmético y analítico.

Procedimientos:

a) Aritmético: encontrar el valor π, encontrar el valor de L.

Conceptos asociados: números reales, sucesiones convergentes, continuidad.

Método: Épsilon-Delta.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Siguiendo las orientaciones de Valdivé y Garbin (2008) se divide la historia de la noción en cuatro períodos y se estudian las situaciones problemas que se plantean, los matemáticos que le otorgan significado en cada período, los conceptos asociados a la noción de número irracional, el contexto, las ideas más representativas y los procedimientos que utilizan los matemáticos en los problemas que implicaba la noción, lo cual permite aproximarnos a la identificación, descripción y caracterización de cuatro esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción.

Los cuatros esquemas que en el estudio se identifican describen y caracterizan son: *el irracional asociado a una aproximación entre razones, el irracional asociado a lo aritmético, el irracional asociado a una aproximación de un número racional cercano y el irracional asociado a un número*.

El análisis expresado en los párrafos anteriores, nos permite visualizar los diferentes momentos en los cuales se ve envuelta la noción de número irracional, así como también las polémicas y contradicciones que produjo esta noción en el ámbito matemático. Estos elementos proporcionan insumos significativos para el didacta, permitiendo diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción de número irracional de los matemáticos más representativos en una época histórica.

Asímismo ensanchan las concepciones del investigador permitiendo redactar situaciones problemas contextualizadas a la hora de abordar su enseñanza ya que como expresa Crespo Crespo (2009, p. 29) “En muchas oportunidades, ese significado de los conceptos puede surgir de la consideración de los problemas que dieron origen al surgimiento histórico de los conocimientos matemáticos”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berge, C. y Sessa, C. (2003). Completitud y Continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 163-197.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza: Madrid.

Cabañas, G., Guillén, F. y Galeana, S. (2004). Situaciones Didácticas en la Comprensión del Concepto de Número Racional en Alumnos de Nivel Medio Superior. Chile. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 181-187. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfan, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México: Thomson Learning Editores.

Conde, J. (2007). *Estrategias Metacognitivas Presentadas a Estudiantes de Educación Básica para Resolver Problemas de Adicción*. Trabajo de Grado. Maestría Interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Crespo Crespo, C. (2006). Un paseo por el paraíso de cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 22-27. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Revista Premisa* 11(41), 21-30.

Cuello, V. (2001). *Niveles de Conocimientos y Estrategias Estimación Computacional Presentes en los Alumnos de Sexto y Noveno grado de Educación Básica y de Segundo Año del Ciclo Diversificado*. Trabajo de Grado no publicado. Maestría Interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking process. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Dordriech, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Escobar, H. y Valdivé, C. (2007). *Estudio y Comprensión de los Polinomios desde una perspectiva del Pensamiento Matemático Elemental*. Trabajo de Grado no publicado. Maestría Interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.

Euler, L. (2000). *Introducción al Análisis de los Infinitos*. España: SAEM. Thales.

Escobar, H. y Valdivé, C. (2006). Estudio de la Noción de Polinomio desde una perspectiva de la Matemática Elemental. Ponencia presentada en *la XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Maracaibo.*

Fernández, N. y Valdivé, C. (2006). Una Aproximación a los Esquemas Conceptuales Asociados al Concepto de Polinomio. Ponencia presentada en la *XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Maracaibo.

Fischbein, Jehiam y Cohen (1995). The concepto of irracional numbers in high – school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics* 29 (29 - 44)

Hernández, R., Fernández, C. y Batista, P. (2006). Metodología de la Investigación. Editorial Mc Graw Hill: México.

Jiménez, D. (2004). ¿Qué carrizo era un irracional para un matemático griego antiguo? Mimeo.

Kline, M. (1985). *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI.

Rodríguez, G.; Gil, J. y García E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Sánchez, J. (2010). *Estudio Didáctico y Epistemológico de la Noción de Número Irracional*. Trabajo de Grado. Maestría Interinstitucional en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto

Santamaría, J. y Valdivé, C. (2006). Esquema Conceptual asociado al Infinito Formal (los infinitesimales) en el Pensamiento de los Estudiantes. Ponencia presentada en la *XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Maracaibo*.

Sirotic N. y Zazkis R. (2007). Irrational Numbers: The Gap Between Formal And Intuitive Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49–76.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of tangente. *Proceedings of PME* 11. (volumen 3, pp. 69-75). Montreal.

Tall, D. (1989). Concept image, computers, and curriculum change. *For Learning of Mathematics*, 9(3), 37-42.

Tall, D. (1991). The nature of advanced mathematical thinking. In David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 3-21). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2006). Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales. Caracas – Venezuela.

Valdivé, C. (2004). El Dominio de las Operaciones de Adición y Sustracción con Fracciones. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 130-136. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(3), 413-450

Valdivé C. (2008). *Estudio de los Esquemas Conceptuales Asociados a la Noción de Infinitesimal y su Evolución en Estudiantes de Análisis Matemático*. Tesis Doctoral no publicada. Doctorado Interinstitucional en Educación UCLA-UNEXPO-UPEL.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-80). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Zapico, I. (2006). Enseñar matemática con su historia. *Revista Premisa* 9(29), 3-8.