EL TEOREMA DEL CAMBIO DE BASE DE LOGARITMOS: UNA NOTA DE CLASE

Juan Gabriel Molina Zavaleta, Apolo Castañeda Alonso, Alejandro Rosas Mendoza
jmolinaz@ipn.mx, alerosas@ipn.mx, apcastane@gmail.com
Instituto Politécnico Nacional (México)

RESUMEN

En este documento se esboza una clase de matemáticas para estudiar el Teorema del Cambio de Base de los Logaritmos; en el desarrollo del tema, los argumentos se apoyan en representaciones gráficas de funciones exponenciales concretas, para construir el teorema citado. La clase está pensada para estudiantes de nivel medio superior.

Palabra clave: logaritmos, cambio de base, nota de clase

INTRODUCCIÓN

En el trabajo de Castañeda, Rosas y Molina (2010), discutimos una caracterización del manejo escolar del logaritmo en ciertos libros de texto, a través de analizar el discurso matemático escolar; uno de los aspectos en que centramos la investigación citada es relativo al tipo de recursos didácticos empleados por los autores de los libros citados, particularmente observamos el uso que hacen de las gráficas y el sentido que éstos les asignan:

> En la obra de Bromwich observamos dos gráficas que ilustran la representación de una ecuación trigonométrica en un diagrama de Argand, no se desprende ninguna discusión a partir del gráfico. En la obra de Thomas pudimos observar dos clases de usos a sus gráficas, la primera para ilustrar el área bajo la curva (lo que le permite después argumentar su definición), la segunda con una función más amplia, pues la gráfica apoya al análisis de las propiedades de la curva. Finalmente en el libro de Sullivan observamos que las gráficas tienen mayor participación en el estudio del logaritmo; por una parte abre una discusión sobre *operaciones a las funciones* y sus efectos gráficos y por otra parte hay un análisis de la naturaleza de la curva, su crecimiento, etc. Sin embargo, coincidimos con Montiel (2005), *el gráfico se vuelve necesario en el discurso... para salvar la distancia entre el rigor y la intuición*, pues notamos que la obra de Sullivan tiene un predominante enfoque algorítmico. (Castañeda, Rosas y Molina, 2010, p. 17).

Este análisis nos ha permitido proponer un enfoque didáctico innovador, porque aunque partimos de un rasgo que identificamos en los autores de los libros estudiados: la relación inversa que establecen entre logaritmos y exponentes, el enfoque que asignamos a la discusión en la clase, es diferente. En esta aproximación, la representación gráfica justifica los planteamientos algebraicos usados, utilizando argumentos sutiles.

La idea de esta nota de clase nace de leer el trabajo de Lestón (2005), en el que a través de argumentar una propuesta didáctica, relacionada con funciones exponenciales y logarítmicas, analiza las ventajas y dificultades de introducir la computadora en la clase de matemáticas. Esta nota de clase que proponemos, es pertinente en el contexto sugerido por Lestón, el uso de un software graficador para el estudio del tema; además consideramos que para varios profesores podría resultar de interés.

NOTA DE CLASE

Objetivo: Utilizar argumentos basados en gráficas, para construir el Teorema de Cambio del Base de Logaritmos.

Desarrollo

Consideremos la función $y_1 = 5$ y grafiquémosla:

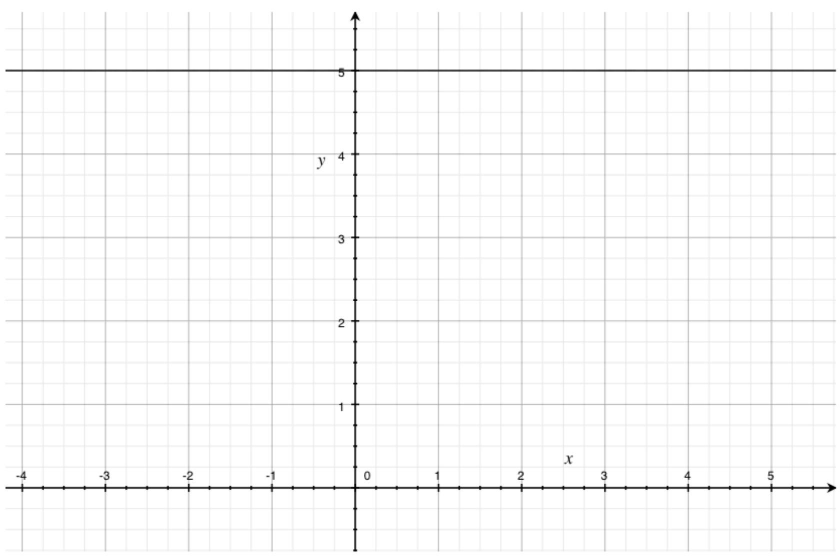

Fig. 1. Gráfica de la función $y_1 = 5$

Si dibujamos en el mismo plano a las funciones y_1 y $y_2 = 3^x$ se obtiene:

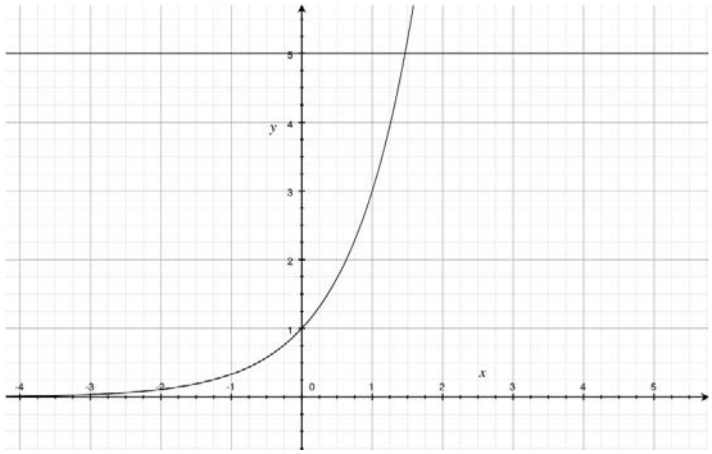

Fig. 2. Gráfica de las funciones $y_1 = 5$ e $y_2 = 3^x$

Al observar las gráficas de las funciones mostradas en la figura 2, se puede afirmar que para algún número real m:

$$y_2\,(m) = y_1\,(m)$$
$$3^x = 5 \qquad \text{(Ec.1)}$$

La ecuación 1 se resuelve aplicando la función inversa de y_2 , $\log_3 x$, en ambos lados de la igualdad, por tanto la solución de Ec.1 es:

$$m = \log_3 5$$

A continuación, involucramos un nueva función, $y_3 = 2^x$ y la graficamos junto con las funciones y_1 y y_2.

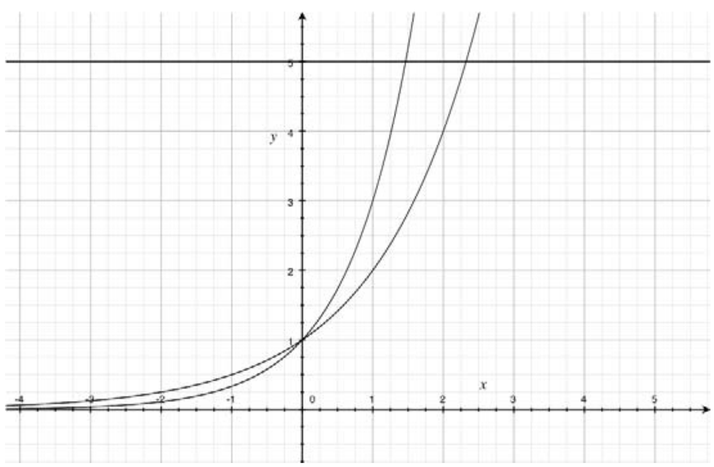

Fig. 3. Gráfica de las funciones $y_1 = 5$, $y_2 = 3^x$ y $y_3 = 2^x$

Entre las graficas de las funciones y_1 y y_3, acontece una situación semejante a la que se dio entre las funciones y_1 y y_2:

Para algún número real n,

$y_3(n) = y_1(n)$

$\downarrow$

$2^x = 5$ (Ec.2)

$\downarrow$

$n = \log_2 5$

Por tanto, de las ecuaciones 1 y 2 se tiene que, para ciertos números reales m y n:

$$3^m = 2^n = 5$$

$$3^m = 2^n \qquad \text{(Ec.3)}$$

Pregunta: ¿Existe algún número real q tal que $3^q = 2$? Claro que sí, si graficamos la función constante $y_1 = 2$, cortará a la función $y_2 = 3^x$ en algún valor q.

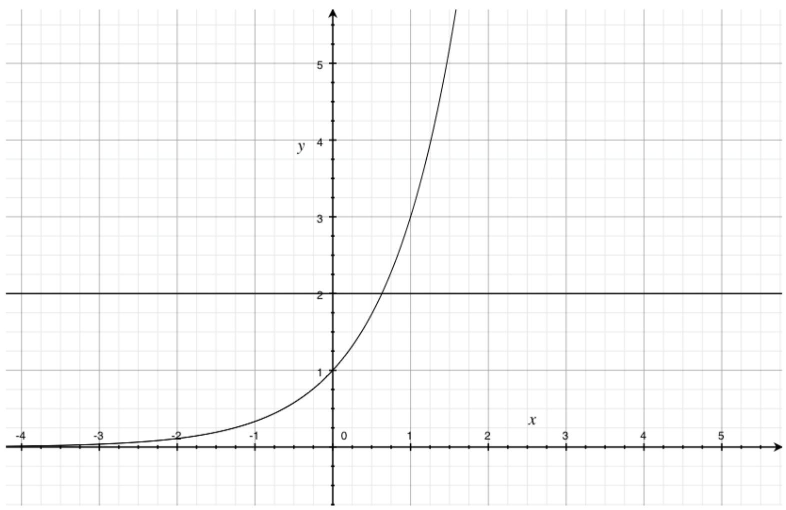

Fig. 4. Gráfica de las funciones $y_1 = 2$, $y_2 = 3^x$

Por tanto ocurre que $3^x = 2$. Sustituyendo este valor en Ec. 3, se tiene:

Para ciertos números reales m, n y q se cumple, $3^m = (3^q)^n$, y por las propiedades de los exponentes la expresión se reduce a:

$$3^m = (3^q)^n$$

De lo anterior se concluye que, $m = nq$ (Ec.4)

Por los desarrollos anteriores, se conoce el valor de m, n y q ($q = \log_3 2$). Por tanto Ec.4 puede expresarse:

$$\log_3 5 = \log_2 5 \cdot \log_3 2$$

De donde se obtiene que:

$$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2} \quad \text{(Ec.5)}$$

En la ecuación 5, se interpreta que el logaritmo con base dos de cinco, es expresado en términos de logaritmos con base tres, es decir, se ha realizado un cambio de base.

Pregunta para el estudiante: ¿Qué ocurre si en la Ec.5 se cambia el valor de la base 3 por algún otro valor?

a) Si es positivo
b) Si es negativo
c) Si es cero
d) Si es 1

Lo que se ha construido, es un caso particular del Teorema del Cambio de Base de un logaritmo, el cual expresa:

Para cualesquiera números reales positivos a, b y x, con a y b distintos de 1,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Si b se elige igual a e, la constante de Euler, la expresión anterior se reduce a:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Donde ln se conoce como el logaritmo natural.

Algunos asuntos para discutir en la clase pueden ser:

- ¿Cuál es la razón de que se excluyen los números negativos, el 0 y el 1 como bases?
- ¿Por qué razón al cambiar la base b, con valores permitidos, la igualdad se conserva?

COMENTARIOS FINALES

En esta nota de clase, se llega a la formulación de una generalización sobre el Teorema del Cambio de Base en Logaritmos, sobre la base de lo observado en las gráficas de funciones exponenciales concretas; tenemos la certeza de que varios profesores simpatizarán con esta propuesta porque permite una discusión interesante en la clase de matemática, y sin duda, con su experiencia docente, la adoptarán y harán las adaptaciones que consideren pertinentes de acuerdo a las características de sus estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castañeda, A., Rosas, A., y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto. *Premisa 12*(44), 3-18.

Lestón, P. (2005). El graficador como herramienta para la clase de matemática. *Premisa 7* (24), 9-15.