CAMBIO CONCEPTUAL Y TRABAJO COOPERATIVO: UNA EXPERIENCIA EN EL AULA DE MATEMÁTICA [1]

Silvia del Puerto, Silvia Seminara
spuerto@fibertel.com.ar, sseminara@sinectis.com.ar
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Buenos Aires: Proyecto MEMFI[2]

RESUMEN

Este trabajo es continuación del que venimos realizando desde el año 2004, en el ámbito de la Universidad Tecnológica Nacional, con el objeto de intentar explicar algunos de los errores que con mayor frecuencia cometen los alumnos que cursan Álgebra y Geometría Analítica en las diferentes carreras de Ingeniería.
Desde hace dos años comenzamos a analizar el problema en el marco de la *Teoría del Cambio Conceptual*, que intenta explicar la ocurrencia de esos errores en función de los conocimientos anteriores que poseen los alumnos, y postula que las ideas previas a veces interfieren u obstaculizan la adquisición de los nuevos conocimientos pues dan origen a conflictos cognitivos difíciles de superar.
En esta oportunidad describimos una experiencia realizada con nuestros alumnos en la que se evidencia que el trabajo grupal parece contribuir al proceso hacia el anhelado cambio conceptual, obteniéndose una mejora en los resultados si se los compara con alumnos que realizaron un aprendizaje individual. Esto concuerda con lo que sostienen varios autores que sugieren que el trabajo cooperativo permite enfrentar ese conflicto cognitivo de modo más favorable, al ofrecer a los alumnos la posibilidad de discutir y confrontar las ideas previas con sus pares, en un ámbito que les brinda cierta sensación de seguridad.

Palabra clave: errores; conocimientos previos; cambio conceptual; trabajo cooperativo

INTRODUCCIÓN

Durante el año 2009 realizamos con nuestros alumnos de primer año de Ingeniería de la UTN FRBA una experiencia en la que constatamos la persistencia de ciertos errores en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, que pueden atribuirse al hecho de que sus ideas previas de geometría plana interfieren en la adquisición de los nuevos conocimientos referidos a rectas en el espacio (del Puerto y Seminara, 2010).

---

[1] Trabajo presentado en las "Segundas Jornadas para Profesores de Matemática. Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico". Universidad Tecnológica Nacional. Octubre de 2010.
[2] MEMFI: "Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática para la Formación del Ingeniero", Proyecto de Investigación y Desarrollo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología, Rectorado UTN (Cód. 25/C114 – UTI901)

En esa experiencia confirmamos la presencia de concepciones previas inadecuadas y la aparición de los llamados *modelos sintéticos*, que son esquemas mentales inacabados que revelan que los nuevos conocimientos no han sido completamente asimilados a la estructura cognitiva del alumno.

En el año 2010, con grupos similares de estudiantes, realizamos un trabajo en base a la actividad cooperativa, mediante la que pretendimos ayudar a subsanar estas falencias en el aprendizaje de los conceptos involucrados, y los resultados parecen indicar una mejora, en acuerdo a lo que sostienen algunos autores consultados.

MARCO TEÓRICO

El alumno no es una "página en blanco": tanto los conocimientos adquiridos con anterioridad, como las ideas intuitivas que pudiera poseer, influyen en los aprendizajes.

Por un lado, porque los aprendizajes significativos se producen subordinando las nuevas ideas a las ya existentes, pero también por el hecho de que algunos conocimientos previos pueden constituirse en verdaderos *obstáculos epistemológicos* a la hora de adquirir nuevos conceptos (Bachelard, 1988).

En este sentido la *Teoría del cambio conceptual* (Schnotz et al., 2006) intenta explicar cómo los llamados *preconceptos*, *concepciones erróneas* o *concepciones alternativas* que tienen los alumnos, producto de su conocimiento ingenuo o de aprendizajes previos, pueden interferir en el aprendizaje de los nuevos conceptos cuando la nueva información no puede ser simplemente adicionada a la que ya poseen y entra en conflicto con la preexistente.

Puede ocurrir que el *conflicto cognitivo* se resuelva de forma positiva, dando lugar al *cambio conceptual*, que constituye una *reorganización de los conocimientos* en la mente del alumno. Pero en algunas ocasiones, aunque se plantee el conflicto, el cambio conceptual no ocurre o se produce de manera incompleta, y aparecen *modelos sintéticos* intermedios, en el intento de los alumnos por adaptar la nueva información a la preexistente, aún cuando existan incoherencias que se manifestarán en forma de errores en sus producciones.

La investigación sobre ideas previas y cambio conceptual no es tan amplia en el área de la matemática como en el ámbito de las ciencias naturales, en las que resulta muy frecuente que los niños *y* adolescentes posean explicaciones *ingenuas* de algunos fenómenos naturales, que obstaculizan el aprendizaje significativo de los conocimientos científicos.

Probablemente esto se deba a que en matemáticas el conocimiento ingenuo no es tan evidente como en otras áreas de la ciencia, pero son numerosos los ejemplos de choque entre conocimientos matemáticos adquiridos con anterioridad y nuevos conceptos, y varios investigadores sostienen que ese conflicto entre ideas previas y nuevos conocimientos consigue interpretar y explicar algunas de las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de la matemática (Tirosh y Tsamir, 2004; Vosniadou, S. y Vamvakoussi, X, 2006; Vosniadou, S. y Verschaffel, L., 2004).

A la pregunta clave de *"¿cómo se produce el cambio conceptual?"*, necesario para hacer efectivo un aprendizaje complejo, Carretero y Limón (1997), que pasan revista a numerosos trabajos al respecto, señalan que la presentación de datos contradictorios o anómalos que provoquen conflicto cognitivo puede contribuir a este proceso, pero no resulta una condición suficiente.

Nussbaum y Novick (1992; citados por Davis, 2001) esquematizan en cuatro fases la posible estrategia docente para el cambio conceptual:

- *poner en evidencia* las ideas previas de los alumnos,
- *discutir y evaluar* esas ideas,
- *crear conflicto conceptual* con las mismas y
- *alentar y guiar* la reestructuración conceptual.

En cuanto a la metodología Davis misma agrega:

> *Un ambiente de aprendizaje cooperativo es necesario para una instrucción favorable al cambio conceptual. Debe haber oportunidades para la discusión. Los estudiantes deben sentirse seguros de compartir sus puntos de vista, al tiempo que tienen en cuenta y evalúan otras perspectivas. […] El "factor seguridad" es particularmente importante cuando la enseñanza emplea la estrategia del conflicto cognitivo. […] Un estudio (Dreyfus, Jungwirth y Eliovitch, 1990) revela que los estudiantes con escasos logros experimentan una pérdida de confianza en sí mismos, y ven el conflicto como un nuevo fracaso.*

Y señala más adelante que los estudiantes acostumbrados al estilo de enseñanza basado en la trasmisión pueden mostrarse menos motivados a participar en actividades de discusión y debate (Scott, Asoko y Driver, 1991), por lo que es necesario que el docente sea proclive a manejar grupos en clase y asumir el rol de facilitador (Davis, 2001).

DESCRIPCIÓN DE LAS EXPERIENCIAS

En nuestra labor diaria con los alumnos de primer año de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, hemos advertido que el conocimiento previo que poseen en el área de la matemática, adquirido en el nivel medio y en el Seminario de Ingreso, es predominantemente algorítmico y encuentran grandes dificultades en la justificación formal.

En lo geométrico sólo poseen nociones de geometría plana, trabajan de forma mecánica con las ecuaciones de rectas y curvas, y sólo ocasionalmente establecen vínculos entre sus conocimientos geométricos y la realidad espacial.

En una primera etapa del presente trabajo, llevada a cabo en el segundo cuatrimestre de 2009, analizamos los errores cometidos por los estudiantes al responder en forma individual a un cuestionario sobre rectas en el espacio luego de un período de instrucción tradicional sobre esos contenidos (del Puerto y Seminara, 2010). Detectamos así la persistencia de ciertas ideas previas provenientes de la geometría plana, que revelaron que el correspondiente cambio conceptual no se había producido, a pesar de haber transitado los alumnos por un período de instrucción, ejercitación y evaluación sobre tópicos de geometría espacial (el cuestionario se administró dos semanas después de la evaluación formal sobre esos tópicos). Hubo por ejemplo alumnos que pretendieron utilizar en el espacio, sin modificaciones, su idea previa de pendiente de una recta; muchos alumnos se contentaban con constatar la perpendicularidad de los vectores directores de dos rectas para asegurar que se cortaban perpendicularmente en el espacio; para algunos alumnos una ecuación lineal en el espacio podía representar una recta; la mayoría tuvo dificultades para buscar una recta que cortara perpendicularmente a otra dada porque elegían un vector director ortogonal cualquiera de los infinitos posibles en el espacio, etc.

Se detectó además la presencia de modelos sintéticos, algunos muy curiosos como construir el vector director de una recta normal a una dada invirtiendo y cambiando de signo las componentes del vector director de la recta conocida, o construir la ecuación de la nueva recta conservando el director de la dada pero invirtiendo y cambiando de signo el parámetro: estos alumnos evocaban evidentemente el hecho de que, en el plano, la pendiente de una recta y la de una perpendicular a ella son recíprocos y de signo contrario. También fue notable la cantidad de alumnos que no respondían a algunos de los interrogantes, a pesar de que el tratamiento del tema se había dado por concluido.

En el primer cuatrimestre de 2010 llevamos a cabo una segunda etapa, realizando el abordaje del tema de rectas en el espacio mediante la técnica del trabajo cooperativo entre los alumnos. Se armaron grupos de discusión, con un cuestionario-guía que, partiendo de los conocimientos en el plano, planteaba gradualmente el paso al espacio, con interrogantes que pretendían provocar el conflicto, teniendo en cuenta las fases estratégicas que sugieren Nussbaum y Novick. Nuestra intención fue comprobar que el trabajo grupal contribuye a que se produzca el esperado cambio conceptual, al ofrecer un ámbito legítimo y distendido de discusión entre pares.

El siguiente es el cuestionario con que trabajaron los grupos:

<u>Curso:</u>
<u>Nombre y apellido de los integrantes del grupo:</u>

Dadas las siguientes rectas en el plano, escriban las ecuaciones de las nuevas rectas que se solicitan.

1) Dada r_1: $y = 2x - 3$

Hallen s_1 que pasa por el punto $(1,2)$ y es paralela a r_1

Hallen t_1 que pasa por el punto $(0,-1)$ y es perpendicular a r_1

2) Dada r_2: $(x, y) = (1,3) + \lambda(2,1)$

Hallen s_2 que pasa por el punto $(-1,4)$ y es paralela a r_2

Hallen t_2 que pasa por el punto $(-2,-3)$ y es perpendicular a r_2

Seguramente esta primera parte no les resultó difícil…
Y ahora, en el espacio… (Pueden usar gráficos de ayuda)
Analicen, discutan y escriban sus conclusiones, fundamentándolas…:

3) Dada r_3: $(x, y, z) = (1,2,-3) + \lambda(1,1,-1)$

a) ¿Cómo construirían la ecuación de una recta paralela a r_3? ¿Es única?

b) ¿Y si se pide que hallen la ecuación de una recta paralela a r_3 que pase por $(1,0,-1)$? ¿Cuál es la ecuación? ¿Es única?

c) ¿Cómo construirían la ecuación de una recta de *dirección perpendicular* a la recta r_3? ¿Es única?

d) ¿Y si se pide que hallen la ecuación de una recta de dirección perpendicular a r_3 que pase por $(1,0,-1)$? ¿Cuál es la ecuación? ¿Es única?

e) ¿Y si se pide que la nueva recta *corte perpendicularmente* a r_3? ¿Es única?

f) ¿Y si se pide que hallen la ecuación de una recta que corte perpendicularmente a r_3 y que pase por $(1,0,-1)$? ¿Cuál es la ecuación? ¿Es única?

Como se observa, el cuestionario-guía parte de los conocimientos previos en el plano y plantea interrogantes en el espacio con dificultad creciente, propiciando la discusión y solicitando explicaciones fundamentadas que los alumnos debían elaborar en forma consensuada antes de darlas a conocer. Los alumnos habían trabajado ya en la construcción de ecuaciones de rectas en el espacio pero no habían abordado aún el tópico de posiciones relativas de las mismas.

El cuestionario grupal fue abordado por 76 alumnos pertenecientes a 3 cursos de Álgebra y Geometría Analítica, organizados en 25 grupos de trabajo de 3 a 5 integrantes cada uno, discutiendo e intercambiando ideas durante una hora, mientras la docente coordinaba la tarea e indicaba los lapsos de tiempo que se destinaban a cada ítem. A la clase siguiente, una vez analizadas las respuestas, se realizó la institucionalización del tema en el frente, mediante una puesta en común.

Estos alumnos fueron luego examinados de manera tradicional, y dos semanas después de la evaluación formal, se les administró el mismo cuestionario individual utilizado con los alumnos del año anterior, con el fin de comparar los resultados.

A continuación se reproduce el cuestionario individual:

Nombre y apellido...Curso:...........................

Cuestionario de revisión

1. Indique si son correctas o no las siguientes afirmaciones para rectas en el espacio. Justifica tus respuestas.

a) "*Dos rectas con igual pendiente y un punto en común son coincidentes*".

b) "*Las rectas* $r:\begin{cases} P_0 = (-3,-5,-1) \in r \\ \vec{u} = (1,-1,2) \parallel r \end{cases}$ *y* $s:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -10-\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ *se cortan perpendicularmente*".

c) "Dada la recta $r:\begin{cases} P_0 = (0,-1,8) \in r \\ \vec{u} = (1,3,0) \parallel r \end{cases}$*, la recta perpendicular a r que pasa por* (-1, 6, 1) *es* $s: -3x + y - 9 = 0$ ".

2. *Dados la recta* $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ *y el punto* $A = (7,-6,4)$ *halle*

a) *la recta s paralela a r que pasa por A*

b) *la recta* t *que pasa por A y corta perpendicularmente a r*

RESULTADOS

Las respuestas obtenidas nos indican que los ejercicios 1) y 2) sobre rectas en el plano no presentaron dificultades para los alumnos, ya que la mayoría de los grupos los respondieron correctamente.

No ocurrió lo mismo con el ejercicio 3), que trata sobre rectas en el espacio.

En el ítem a) sólo 12 grupos contestaron correctamente. Entre los errores más frecuentes cometidos por el resto podemos citar a algunos grupos que afirman que *"hay infinitas rectas porque hay infinitos vectores directores, todos ellos de la forma k (1, 1,-1) pudiendo tomar k cualquier valor real"*.

*O*tros consideran imprescindible tomar como vector director de la recta pedida a un múltiplo de (1, 1,-1), otros dicen que *"hay infinitas rectas ya que el punto de paso es cualquier múltiplo de (1, 2,-3)"*.

El b) fue respondido correctamente por 18 grupos y la mayoría de los que lo hacen con errores dicen, como en el ítem anterior, que *"hay infinitas rectas porque hay infinitos vectores directores k (1, 1,-1) con k perteneciente al conjunto de los números reales"*.

En el c), 8 grupos respondieron correctamente, 2 no dieron respuesta, 5 grupos justifican bien la elección del vector director que usan pero ponen un punto cualquiera como punto de paso de la recta pedida.

En el inciso d) sólo 6 grupos respondieron correctamente, 4 no contestaron, 10 grupos respondieron que hay una única recta que pasa por (1, 0,-1) y eligieron como vector director a (1, 1, -1) ó(1, 1, 2) ó (0, 1,-1) ó (-1,-1,-2).
Otros afirman que la recta no es única pero dan como respuesta una única recta.

En el ítem e), 9 grupos respondieron correctamente, 5 grupos no contestaron, 6 grupos dicen que hay infinitas rectas pero no justifican su afirmación, y otros dicen que:

"hay infinitas rectas: (x, y, z) = (1, 2, -3) + λ (1, 0, 1) y todas las paralelas a ésta".

Ninguno de los grupos contestó correctamente el inciso f) mientras que 9 grupos no respondieron a esta pregunta. 2 grupos explicaron bien como resolverían el ejercicio, pero no hallaron la ecuación de la recta. 8 grupos dijeron que la recta es única pero construyeron su ecuación con un vector perpendicular cualquiera al director de la recta dada, como por ejemplo:

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda (1, 0, 1)$$

$$ó\ (x, y, z) = (1,0,-1) + \lambda (2,-1,1)$$
$$ó\ (x, y, z) = (1,0,-1) + \lambda (1, 1,-1)$$
$$ó\ (x, y, z) = (1,0,-1) + \lambda (-1,0,-1).$$

Los resultados obtenidos por estos mismos alumnos con el cuestionario individual son los siguientes:

1) a): 52% de los alumnos que respondieron pretendieron utilizar en el espacio su idea previa de “pendiente de una recta (del plano)”. 36% de los alumnos que respondieron revelaron algún tipo de modelo sintético. 8% de los alumnos que respondieron lo hicieron correctamente. Sólo el 4% no respondió.

1) b): 53% de los alumnos que contestaron conservaba la idea previa de las condiciones de ortogonalidad de rectas en el plano y se contentó con comprobar la perpendicularidad de los vectores directores. 25% de los alumnos que respondieron lo hicieron en forma correcta y justificaron adecuadamente, demostrando que los vectores directores de ambas rectas son ortogonales y que las rectas se cortan en un punto.

1) c): 17% de los alumnos no respondió a este ítem. Un 35% de los alumnos que respondieron lo hizo correctamente, diciendo que la ecuación de s corresponde a un plano y no a una recta en el espacio. El 57% de los estudiantes que contestaron revelaron algún tipo de modelo sintético.

2) a): De los alumnos que respondieron (el 87%), un 91% lo hizo correctamente y los errores observados no resultaron representativos.

2) b): Esta vez sólo un 21 % de los alumnos no respondieron. Un 8% de los alumnos que respondieron lo hizo correctamente y otro 8% dio una respuesta incompleta pero bien encaminada. El 65% de los alumnos que contestaron revelaron algún tipo de modelo sintético.

Cabe señalar que los modelos sintéticos aparecidos en esta segunda etapa fueron muy similares a los observados en la primera (del Puerto y Seminara, 2010).

En el siguiente cuadro se comparan los resultados obtenidos en ambas etapas:

		2009: instrucción tradicional	2010: trabajo grupal
1a	No responde	6%	4%
	Responde correctamente	2%	8%
	Responde con idea previa	67%	52%
	Responde con modelos sintéticos	31%	36%
1b	No responde	10%	5%
	Responde correctamente	6%	25%
	Responde con idea previa	64%	53%
	Errores varios no representativos	30%	22%
1c	No responde	37%	17%
	Responde correctamente	33%	35%
	Responde con modelos sintéticos	67%	57%
2a	No responde	31%	13%
	Responde correctamente	78%	91%
	Errores varios no representativos	22%	9%
2b	No responde	42%	21%
	Correcto Correcta incompleta	3% 3%	8% 8%
	Modelos sintéticos	47%	65%
	Errores varios no representativos	47%	18%

CONCLUSIONES

Los conceptos relativos a recta en el espacio requieren de un *cambio conceptual*: los conocimiento previos sobre recta en el plano no pueden ser simplemente extrapolados a R^3 y esto produce un conflicto que sólo en bajo porcentaje es superado por los alumnos que cursan Álgebra y Geometría Analítica.

Muchos persisten en sus ideas previas, y otros experimentan un cambio incompleto que se manifiesta en un *modelo sintético* que se pone en evidencia en los errores que cometen en sus producciones. Es escaso el número de alumnos que demuestra haber completado la reestructuración conceptual necesaria, aún en el trabajo grupal, donde es bajo el porcentaje de respuestas correctas.

Sin embargo, la comparación de los resultados del cuestionario individual de ambas etapas parece indicar que el trabajo cooperativo ha incidido positivamente en el rendimiento de los alumnos ya que en la segunda etapa:

- *ha aumentado el número de alumnos que responde;*
- *ha aumentado el número de alumnos que responde correctamente;*
- *creció el porcentaje de estudiantes que ha cambiado su idea previa por un modelo sintético,* lo que puede considerarse un avance.

Si bien debe tenerse en cuenta el alcance relativo de estos resultados, debido a que no fueron controladas todas las variables y a que el trabajo cooperativo en grupos se limitó al tratamiento de este contenido curricular, parece evidente que los alumnos han logrado enfrentar el conflicto cognitivo de mejor manera.

Scott et al. (1991) subrayan la importancia de que el docente tome la decisión pedagógica de propiciar un ambiente de aprendizaje que *promueva* el cambio conceptual. En ese sentido, es fundamental que se ofrezcan al alumno oportunidades para la discusión y la consideración de los puntos de vista alternativos. El trabajo grupal es una forma de facilitar estos ámbitos de discusión de manera natural: los alumnos enfrentan el conflicto cognitivo junto a sus iguales, y la vivencia puede resultar así menos traumática y más enriquecedora.

De todos modos, el verdadero trabajo grupal exige de una dinámica sostenida en el tiempo, lo suficiente como para que se desarrollen los sentimientos de confianza y las distribuciones naturales de roles que optimizarían los resultados de las producciones; es por ello que señalamos la relatividad de los resultados obtenidos, aunque indican una tendencia positiva de la que pensamos sacar provecho en nuestro trabajo futuro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico*. *Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* México: Siglo XXI.

Carretero, M. y Limón, M. (1997). Problemas actuales del constructivismo. De la teoría a la práctica. En: Rodrigo, M. J.; Arnay, J. (Comps.) *La construcción del conocimiento escolar*. Barcelona: Paidós.

Davis, J. (2001). Conceptual Change. En Orey, M. (Ed.) *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology*. Disponible on line en http://projects.coe.uga.edu/epltt/index.php?title=Conceptual_Change, consultado el 27 de mayo de 2011.

del Puerto, S. y Seminara, S. (2010). Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la Geometría Analítica. *Premisa*, 12 (44): 25-35.

Dreyfus, A.; Jungwirth, E. y Eliovitch, R. (1990). Applying the cognitive conflict strategy for conceptual change: some implications, difficulties and problems, *Science Education* 74 (5): 555-569.

Nussbaum, J. y Novick, N. (1982). Alternative frameworks, conceptual conflict, and accommodation: Toward a principled teaching strategy. *Instructional Science*, 11: 183-200.

Schnotz, W.; Vosniadou, S.; Carretero, M. (comps.) (2006). *Cambio conceptual y educación.* Buenos Aires: Aique.

Scott, P. H., Asoko, H. M. & Driver, R. H. (1991). Teaching for conceptual change: A review of strategies. En R.Duit, F. Goldberg y H. Niederer (Eds.), *Research in Physics Learning: Theoretical Issues and Empirical Studies*, Proceedings of an international workshop. Disponible on line en http://www.physics.ohio-state.edu/~jossem/ICPE/C5.html; consultado el 25 de mayo de 2011.

Tirosh, D. y Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education? *Learning and Instruction* (14): 535-540.

Vosniadou, S. y Vamvakoussi, X. (2006). Examining Mathematics Learning from Conceptual Change Point of View: Implications for the Design of Learning Environments. En: *Instructional Psychology: Past, Present and Future Trends. Sixteen Essays in honour of Erik De Conte*. Oxford: Elseivier Ltd.

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. En: *The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching, Special Issue of Learning and Instruction* 14(5): 445-451.