EVENTOS EXCLUYENTES Y EVENTOS INDEPENDIENTES: ACERCAMIENTO DIDÁCTICO EN EL AULA

Giovanni Sanabria[1], Kyriakos Petakos [2]
1. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
2. Academia Turística de Rodos, Grecia
gsanabria@itcr.ac.cr, kpetakos@aster.edu.gr

RESUMEN

El presente trabajo brinda una propuesta didáctica cuyo abordaje permita al estudiante universitario diferenciar los eventos excluyentes e independientes. Dicha propuesta surgen de las dificultades e inquietudes que presentan los estudiantes sobre el tema. El trabajo expone una serie de ejercicios, ordenados según su dificultad, cuya resolución sistemática permitirá a los estudiantes explorar una diferencia entre las dos clases de eventos.

Palabras clave: didáctica, probabilidad, eventos excluyentes, eventos independientes, aprendizaje cooperativo

INTRODUCCIÓN

Durante los semestres que se enseña la probabilidad básica, destinada a estudiantes de matemáticas y otras careras, se hallan continuamente obstáculos que impiden profundizar la teoría, que generalmente es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático.

Entonces se tiene que afrontar estos problemas teniendo en la cabeza el concepto de asertividad aceptado por la sociología y teoría pedagógica contemporánea. Aunque hay una multitud de definiciones de asertividad, casi todas incluyen los siguientes principios (Hare, 2000):

- Sentirse conveniente en participar en la clase hacia la meta propuesta
- Conseguir un ambiente social en la clase, que alenta el intercambio de opiniones entre los estudiantes y también el profesor en un sentido productivo
- Conservación y si fuera posible aumento de la autoestima.

Especialmente el proceso de resolver problemas por medio de la utilización sistemática de etapas en tópicos de probabilidad (Sanabria, 2010) parece imprescindible cuanto se tiene que diferenciar entre conceptos fundamentales, que habitualmente causan confusión por parte del estudiante. Se habla de confusión en una ciencia como la matemática, la cual se construye como una cadena aumentada, concepto tras concepto, manteniendo el equilibrio apropiado (Lefrancois, 1991) Equilibrio que implica la existencia de la autoestima estudiantil.

Además se considera en la propuesta didáctica los principios que caracterizan el aprendizaje cooperativo (Kagan, 1994), que vamos a describir mas detalladamente en la próxima sección.

RESUMEN DE LA PROPUESTA

La propuesta desarrollada en este artículo tiene dos componentes conceptuales básicos: los eventos excluyentes y los independientes. Son conceptos que se cubren durante un curso de probabilidad básico universitario. La teoría de conjuntos, cuyos rasgos se dan aun en la enseñanza secundaria de ciertos países, desempeña un papel de protagonista en este ambiente, en una época cuando el pensamiento teorético se tiende a despreciarse con el uso avanzado del ordenador.

Aquí viene la división de los ejercicios propuestos en varias etapas (Sanabria, 2006), y de lo básico aritmético, casi innato en la naturaleza humana, al avanzado teorético como justificación del valor de los conceptos descritos arriba.

Poniendo fin a describir nuestro proceso explicamos el modelo del aprendizaje cooperativo que usamos. La clase esta dividida en pequeños grupos de 4 estudiantes, demostrando nuestra lealtad a los siguientes principios:

- interdependencia positiva, es decir en otras palabras nadar o ahogar juntos. El éxito de cada uno de los participantes se refleja ùnicamente en el éxito del grupo total.
- responsabilidad individual y del equipo, en nuestro experimento se asigna un estudiante cabeza de grupo, una especie de líder que controla como funciona el grupo en total. Esto no significa que los otros miembros no tienen palabra durante la clase, lo aseguramos examinar oralmente por azar algún miembro durante el proceso de la comprensión de material.
- cultivamiento de la habilidad social de tomar decisiones, en el sentido si se tiene que seguir un proceso de resolver especificado, modificarlo o totalmente cambiarlo.

PRESENTACIÓN DEL PLAN DIDÁCTICO

Se proponen algunos ejercicios para aprender la diferencia entre los excluyentes mutuos e independientes (en el sentido estocástico). La confusión que se genera en el aula cuando se presenta el material es una realidad indudable. Frases características por parte de los estudiantes son las siguientes

- Sólo el uso de la palabra *excluyente* significa que el uno no cuenta al otro, no tiene que ver con el otro. De esa manera ¿cómo puede haber dependencia?
- Para mí, la representación gráfica de los diagramas de Venn es la respuesta para todo. El uno no corta al otro, así que no lo influye. En otras palabras la exclusión tiene como consecuencia su independencia.

- Lo que me hace distinguir entre los dos conceptos fundamentales es su relación, como lo demuestran las fórmulas matemáticas correspondientes. De esa manera mecánicamente me conduzco a la relación apropiada de calcular las probabilidades que se buscan.

Especialmente el último comentario nos inspiró a escribir este artículo, basado no sólo a la experiencia cotidiana en el aula, sino también a las discusiones de un sentido platónico, tan popular en los representantes de las ciencias naturales y de la literatura hispanoamericana (Sábato, 1948), que se elaboraron durante las conferencias mediterráneas (Conferencia mediterránea 2002) sobre la enseñanza matemática de hoy y el mejoramiento del proceso del aprender.

Usualmente el estudiante, como lo señalan los comentarios, suele buscar una relación de implicación entre estos dos conceptos. Además, el profesor suele ver estos conceptos de diferentes escenarios, y dan explicaciones como: "por qué te confundes si un concepto es de conjuntos (concepto de excluyentes) y otro es de probabilidad (concepto de independencia)".

Explicaciones como las anteriores pueden confundir más al estudiante que insiste en hallar el camino secreto y obscuro que une ambos conceptos.

Un mejor camino que puede optar el profesor es, posterior al estudio de cada uno, comparar los conceptos en un mismo escenario:

Escenario	Conjuntos	Probabilidad
A y B son excluyentes si:	$\lvert A\cap B\rvert = 0$	$P(A\cap B)=0$
A y B son independientes si:	$\lvert A\cap B\rvert = \frac{\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Donde Ω es el espacio de probabilidad y se utiliza como ley de probabilidad la ley de Laplace.

Seguidamente se presentan algunos ejemplos especialmente elegidos por enfatizar en los dos conceptos (eventos excluyentes y eventos independientes) y presentarlos como una cadena desde lo práctico hasta lo más sofisticado admitiendo así una técnica clásica de resolver problemas.

Ejercicio 1

Dadas las probabilidades $P(A)=0{,}45, P(B)=0{,}10$ y $P(A\cap B)=0{,}045$ ¿qué conclusión podemos obtener? Los eventos A, B ¿son independientes? ¿además mutuamente excluyentes?

Solución Vamos a seguir el tipo de solución paso a paso, en otras palabras dividido en varias etapas intentando aumentar la atención por parte de los estudiantes y asegurar la comprensión de material enseñado.

Etapa 1 Recordar al estudiante la definición de la independencia (Feller,1968) como la fórmula siguiente, i.e

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Etapa 2 Verificar sencillamente el resultado aritmético

$$0{,}045 = 0{,}45 * 0{,}10$$

Etapa 3 Concluir lo deseado, que son independientes y pasar a la pregunta próxima, siguiendo el pensamiento de definición observando

$$P(A \cap B) = 0{,}045 \neq 0$$

así que no son mutuamente excluyentes.

Comentario: Se les puede solicitar a los representantes de dos grupos cooperativos que discutan en sus grupos lo siguiente

Para aprobar que son excluyentes, ¿no tenemos que demostrar que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ ?$$

en la discusión que se desarrolla dentro del aula se revela una vez más el efecto de las normas y las leyes matemáticas que habitualmente preceden el material didáctico de los ejercicios. La asertividad (Hare, 2000) que tiene que ver mucho con la capacidad de resolver problemas parece estar conectada inextricablemente con la presentación de algunas normas, que atraen tanto al interés del profesor como del estudiante durante el proceso del aprender. La importancia de la norma de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

predomina la mente de los participantes en la clase, haciéndolos olvidar lo obvio y buscar otra manera más complicada para resolver el problema.

Ejercicio 2

En este ejercicio ejecutaremos un esfuerzo para introducir a nuestros estudiantes a la vez en el pensamiento que acompaña a lo mejor justifica la existencia de las fórmulas.

Dado que $P(A/B) = 0{,}2, P(B) = 0{,}6$ calculad el valor de $P(A)$ para que los eventos A, B sean independientes.

Solución

Etapa 1 Conceptualizar un poco sobre la interpretación del concepto de independencia. En el caso de que sean independientes, A no influye la realización o no de B, así que la condición A/B no tiene sentido, es decir

$$P(A/B) = P(A).$$

Etapa 2 Utilizando la formula de la probabilidad condicional, en cuando a la independencia eventual tenemos

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

así que el valor de $P(B)$ no se necesita

Etapa 3 Comparar las dos etapas antecedentes para provocar un entendimiento más profundo de lo enseñado. En esta fase realizamos una discusión sobre si la primera etapa pueda formar sola una resolución oficial del problema. Podemos observar que los grupos asignados, aún convencidos del pensamiento que se incluye en la primera etapa, aparecen casi igualmente divididos según la existencia de la solución que no incluirá la segunda etapa. Lo que destaca en el diálogo generado se bosqueja verdaderamente en las siguientes palabras

Aunque lo aceptamos entre nosotros la infalibilidad de la solución basada a la primera etapa de arriba, ¿podemos estar seguros que no se considerará un defecto durante el proceso de la evaluación por algún examinador?

Acá se presenta la coordinada práctica de nuestra vida diaria en la enseñanza en su cada etapa, el proceso de la evaluación con la subjetividad que puede involucrar de caso a caso (Barberis et al, 2006). Se trata de un tema que por si mismo se pueda ocupar el contenido de varios artículos.

Ejercicio 3

Echamos una moneda dos veces y registramos los resultados. Denotamos si A, B, C los siguientes eventos:

$A =$ {que aparezca C cabeza en la primera echada}

$B =$ {que aparezca C en la secunda echada}

$C =$ {que aparezca C solamente una vez}

¿Podemos decir que los eventos A, B, C son mutuamente excluyentes?

Solución

Etapa 1 Registrar los resultados a obtener el espacio de la muestra, es decir

{CN, NC, NN, CC}

usando C por la cabeza y N por los números.

Comentario: Se ha observado mientras corregir los papeles de los exámenes semestrales que muchos errores ocurren a causa de falta de la comprensión sobre lo que consta el espacio de la muestra. Aquí se demuestra muy bien que aun un proceso sencillo, como el de conteo, considerado a veces rudimentario, se adquiere una dimensión nueva para definir un conjunto necesario, cuya cardinalidad forma el denominador de la probabilidad según Laplace.

Etapa 2 Escribir cada uno de los eventos A, B, C en su forma analítica

$$A = \{\text{CN, CC}\},\ B = \{\text{NC, CC}\},\ C = \{\text{CN, NC}\}$$

Etapa 3 Enfocar en el concepto de la intersección, dando la equivalencia

Intersección vacía = eventos mutuamente excluyentes

Observamos que

$$A \cap B = \{\text{CC}\},\ B \cap C = \{\text{NC}\},\ A \cap C = \{\text{CN}\}$$

de manera que la conclusión viene automáticamente.

Etapa 4 (no obligatoria) Contradecir al concepto de los eventos independientes, aunque no se pregunta en nuestro ejercicio 3. Subrayaremos que en este caso no quedamos solo en la intersección de los eventos, sino que damos un paso mas calculando la probabilidad de esta intersección

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=P(A)P(B)$$

así que A,B son independientes.

Etapa 5 (no obligatoria) Enfatizar con el uso del llamado ejemplo de contra que ser independientes no significa necesariamente que son también mutuamente excluyentes, basado a lo resuelto hasta ahora.

Ejercicio 4

Sean A y B dos eventos no nulos tales que $|A\cap B|=\frac{|A|\cdot|B|}{|\Omega|}$ Utilizando la Ley de Laplace ¿Son A y B excluyentes? ¿Son eventos independientes?

Etapa 1 Al recordar la definición de excluyentes en conjuntos, se debe notar que de acuerdo a los datos se cumple que

$$|A\cap B|\neq 0$$

Este resultado no es evidente y subyace de la forma de la cardinalidad de la intersección $|A\cap B|=\frac{|A|\cdot|B|}{|\Omega|}$ y de que A y B son no nulos ($|A|\neq 0$ y $|B|\neq 0$) por lo tanto los eventos no son mutuamente excluyentes.

Comentario. Un camino poco asertivo, pero válido, para abordar el problema es tratar de verificar que $P(A\cap B)\neq 0$, para lo cual se debe utilizar la regla de Laplace:

$$P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{|A|\cdot|B|}{|\Omega|^2}\neq 0$$

y proceder de forma similar a lo indicado en la primer etapa.

Etapa 2 El estudiante debe recordar la definición de la independencia (Feller, 1968) como la fórmula siguiente, i.e

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\ .$$

Etapa 3 Verificar algebraicamente la igualdad

$$P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{|A|\cdot|B|}{|\Omega|^2}=\frac{|A|}{|\Omega|}\cdot\frac{|B|}{|\Omega|}=P(A)\cdot P(B)$$

Etapa 4 Concluir lo deseado, que son independientes. En general, se puede tener una equivalencia de independencia en conjuntos: A y B son independientes si y solo si $|A\cap B|=\frac{|A|\cdot|B|}{|\Omega|}$.

Etapa 5 (no obligatoria) Adicionalmente se puede hacer una discusión sobre la pregunta ¿Bajo qué condiciones dos eventos independientes son mutuamente excluyentes? Aquí un primer camino es recordar que una condición para que sean excluyentes es

$$P(A \cap B) = 0$$

Aquí el modo de proceder es distinto a los casos anteriores. No se quiere verificar la igualdad, sea desea hallar las condiciones para que se cumpla. El camino es asumir la igualdad como verdadera para hallar las condiciones buscadas. Así, si $P(A \cap B) = 0$ y se utiliza la hipótesis de que A y B son independientes, recordando este concepto, se tiene que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0$$

Por lo tanto, por lo menos alguno de los dos eventos es nulo.

Otro camino es utilizando conjuntos. Como A y B son independientes entonces

$$|A \cap B| = \frac{|A| \cdot |B|}{|\Omega|}$$

Si se quiere que A y B sean excluyentes ($|A \cap B| = 0$), se debe cumplir que

$$|A \cap B| = \frac{|A| \cdot |B|}{|\Omega|} = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \vee |B| = 0$$

Y se obtiene el mismo resultado.

Se puede centrar la discusión en grupos sobre ¿cuál camino es más asertivo? La respuesta dependerá del grado de profundidad con que se estudie probabilidad. Pués el segundo camino es válido solo para casos particulares, cuando se utiliza como ley de probabilidad, la regla de Laplace.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barberis, F.; Ródenas, E.; Bosch, I. (2006). *La evaluación continua en matemáticas en la Universidad*, XIV Jornadas de ASEPUMA.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley.

Hare, B. (2000). *Sea asertivo*. Buenos Aires: Ediciones Gestión.

Kagan, S. (1994). *Cooperative Learning.* San Juan Capistrano, CA: Kagan Publishing.

Lefrancois, G. (1991). *Psychology for Teaching.* Belmont, CA: Wadsworth Publishing.

Gagatsis, A.; Papastavridis, S. (Eds.) (2003). *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*.

Sábato, E. (1948). *El Túnel*. Buenos Aires: Letras Hispánicas.

Sanabria, G. (2010). Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* 10 (2), 1-11.

Sanabria, G. (2006). *Tópicos precedentes al estudio de las probabilidades.* Costa Rica, Publicaciones Instituto Tecnológico de Costa Rica.