VARIABLES, FUNCIONES Y CAMBIOS. EXPLORACIÓN DE LAS NOCIONES QUE MANEJAN ALUMNOS DE UNA ESCUELA SECUNDARIA

Marcela Hecklein, Adriana Engler, Silvia Vrancken y Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral, Argentina
mhecklei@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar, svrancke@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar

RESUMEN

Los procesos de variación y cambio constituyen un aspecto de gran riqueza en el contexto escolar. Por lo general, la enseñanza no promueve el estudio de las funciones desde el pensamiento y lenguaje variacional.
En este trabajo presentamos los resultados de una experiencia centrada en el diseño e implementación de una guía de actividades que indaga las nociones que manejan alumnos del último año de la escuela secundaria con respecto a variables y funciones.
Los alumnos trabajaron de manera adecuada con la noción de función como correspondencia, pero presentaron dificultades en todos los aspectos que involucran análisis de la variación.

Palabra clave: pensamiento variacional, función, cambios, variable

INTRODUCCIÓN

En la sociedad actual la matemática resulta una herramienta básica para la comprensión y el manejo de la realidad. A través de esta disciplina, las distintas ciencias interpretan los fenómenos físicos y sociales, utilizando métodos cuantitativos y cualitativos que favorecen la resolución de problemas y la toma de decisiones. Los conocimientos matemáticos aparecen constantemente en situaciones que surgen de la vida diaria y también en las relacionadas con las ciencias.

La escuela y la universidad, en su interacción con la sociedad, deben formar personas con competencias para identificar, interpretar, modelar y resolver las situaciones que se les presentan. Esto implica preparar a los alumnos para resolver problemas y tratar la información que reciben del medio, de manera que sean capaces de reconocer las estrategias para su solución y favorecer un mejor entendimiento e interpretación de la realidad.

En este sentido, los procesos de variación y cambio constituyen un aspecto de gran riqueza en el contexto escolar. El estudio de las variables y de las funciones, encarado desde el pensamiento variacional, es un campo de acción y formación permanente en la educación matemática.

> De acuerdo con el Dr. Cantoral, el pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro. Implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. (Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002, p. 73)

Los conceptos básicos sobre los cuales se construye la matemática de la variación y el cambio son el de variable y el de función.

Cuando dos variables están relacionadas mediante una función se puede estudiar el cambio de una de ellas con respecto a la otra. Aquí radica la importancia del estudio de las funciones.

Una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, es poder analizar el comportamiento de funciones.

> Los rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula. Estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento de funciones. (Dolores et al., 2002, p. 73)

Según los planes y programas de estudio, algunos aspectos esenciales del análisis funcional se tratan en la escuela secundaria. Por ejemplo: la variación proporcional, la descripción de fenómenos por medio de una tabla o una gráfica, el estudio de casos sencillos de comportamiento local de funciones, estudio particular de familias de gráficas de la forma $y = mx + b$ o de la forma $y = ax^2 + bx + c$, estudio de fenómenos que varían con una tasa constante, diferencias entre el crecimiento aritmético y el crecimiento exponencial.

Según lo dispuesto en los diseños curriculares, al finalizar la escuela secundaria los alumnos deberían ser capaces de desarrollar modelos a partir de su conocimiento de distintos tipos de funciones. En este sentido, el estudio de las variables y las funciones, encarado desde el pensamiento y lenguaje variacional, es un campo de acción permanente en la educación matemática. Sin embargo, la experiencia de años en el aula nos muestra que la enseñanza se sigue caracterizando, muchas veces, por un enfoque tradicional, con un manejo esencialmente algebraico y algorítmico, desprovista de argumentos visuales y geométricos. Al estudiar funciones, los alumnos recurren, habitualmente, a la utilización de tablas y fórmulas, presentando dificultades para interpretar y vincular distintas representaciones y desconociendo sus aspectos variacionales.

Diversos investigadores coinciden en que, por lo general, la enseñanza no promueve el estudio de las funciones desde el pensamiento y el lenguaje variacional. En particular, coincidimos con Testa (2004), quien sostiene que si el alumno concibe a la función solamente como una correspondencia, no pone en juego su pensamiento y lenguaje variacional. Ve en su gráfico a un conjunto de puntos, donde cada uno de ellos indica la correspondencia establecida entre dos reales, pero no puede concebir a este gráfico como un todo, como un objeto, como el producto final de un proceso. El alumno debe ser capaz de reconocer los infinitos valores que puede tomar la variable en un intervalo real para investigar cómo varía la función en dicho intervalo. Sólo de esta manera está poniendo en juego el tipo de pensamiento antes mencionado.

> La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de construcción del concepto de función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes. (López y Sosa, 2008, p. 309)

Los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), expresan que uno de los caminos para lograr la construcción del concepto de manera significativa es la resolución de actividades que promuevan el análisis de situaciones a través de diferentes sistemas de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal. Este análisis implica la coordinación e interrelación entre los diferentes sistemas de representación como requisito para lograr la construcción conceptual. De esta manera, la expresión algebraica de una función no es el centro del estudio de las funciones, sino que es una forma entre otras de relacionar las variables del fenómeno, y aporta información de la misma manera que una expresión verbal, una tabla o una gráfica cartesiana.

En este contexto, consideramos importante buscar la manera de abordar mejor el estudio de las funciones en la universidad indagando sobre las ideas y conocimientos formados y adquiridos en los niveles educativos anteriores.

En el marco del proyecto de investigación “Pensamiento y lenguaje variacional: bases para la construcción de conceptos del cálculo diferencial” nos propusimos analizar y valorizar los resultados de un trabajo de aula con alumnos que cursan el último año de la escuela secundaria. Con este fin, diseñamos e implementamos una guía de actividades que explora las nociones que tienen los alumnos con respecto a variable, variación y cambio, relación de una variable con otra, valoraciones cualitativas y cuantitativas, gráficas, expresión analítica, valor numérico, signos de la función, ceros, crecimiento y decrecimiento.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

El trabajo se desarrolló en tres momentos: preparación y discusión de las actividades a incluir (según revisión bibliográfica realizada y, desde la práctica docente, dificultades observadas en trabajos recogidos de años anteriores), la resolución de las actividades y finalmente la utilización de las respuestas obtenidas (con sus logros, dificultades y errores) para el desarrollo de los contenidos y la puesta en común de conclusiones.

Se consideraron como base los problemas propuestos en Vrancken, Engler y Müller (2010) para el estudio de las funciones como modelos de variación y cambio. Las distintas actividades abarcan los conceptos de variable, función, dominio, conjunto de imágenes, intervalos de variación, representación gráfica y comportamiento de una función considerando situaciones tomadas de la vida diaria, tanto de fenómenos de la naturaleza como de la sociedad. Su resolución exige identificar las magnitudes que cambian, medir los cambios y estudiar las distintas maneras de representar esas variaciones.

Los diferentes enunciados se formularon utilizando distintas representaciones. En nuestra disciplina, entendemos por representaciones a las notaciones simbólicas, las expresiones algebraicas, las gráficas o bien las manifestaciones verbales a través de las cuales se expresan conceptos, procedimientos, así como las propiedades más relevantes. Las mismas se agrupan en registros de representación (Duval, 1998) de acuerdo a sus características. Por ejemplo, asociados al concepto de función podemos considerar registros numéricos, algebraicos, gráficos. La comprensión de las distintas situaciones de variación dependerá del tratamiento, relación y coordinación que el alumno pueda hacer entre las diferentes representaciones, facilitando poner en juego diversos procesos cognitivos.

> En el interior de cada registro se pueden llevar a cabo procesamientos, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas. Más importante aún, entre diferentes registros de representación se pueden realizar conversiones, que son transformaciones de una representación hecha dentro de un registro, en otra representación dentro de otro registro. En el ejemplo de las funciones, una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular sobre una función en una gráfica (Lupiáñez y Moreno, 2001, p.292).

La guía de actividades se presentó a 40 alumnos del último año del secundario en un colegio de la ciudad de Esperanza, Santa Fe: 20 alumnos de la orientación Economía y Gestión de las Organizaciones y 20 de la orientación Humanidades y Ciencias Sociales, agrupados de a dos.
Los alumnos se mostraron muy dispuestos al trabajo. Desde el equipo docente, se analizaron y valoraron los resultados obtenidos y se favoreció la toma de decisiones estratégicas en acciones futuras.

Presentamos a continuación las actividades, algunos comentarios sobre las mismas y los resultados que consideramos más relevantes.

Actividad 1.
Exprese en lenguaje matemático los intervalos de variación presentes en cada situación:
a) El área “a” de un círculo aumenta de manera que siempre es mayor que 2 cm^2.
b) La temperatura “t” del cuerpo de un hombre sano varía desde 36,8ºC hasta 37,1ºC.

En esta actividad, como en la siguiente, se busca analizar situaciones sencillas de variación, identificando las magnitudes que cambian y describiendo analíticamente los intervalos de variación. Requiere que el alumno realice la conversión del lenguaje coloquial al simbólico.

Para la notación matemática de los intervalos, algunos alumnos optaron por utilizar intervalos y otros, desigualdades. En ambos casos observamos que el manejo de la simbología fue deficiente.

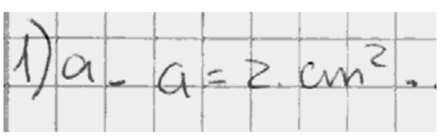
En el ítem **a)** se obtuvieron un 50% de respuestas correctas. La cuarta parte no contestó y el resto dio respuestas incorrectas. Notamos que cuatro de los cinco equipos no respondieron lo pedido sino que intentaron escribir una expresión algebraica para el área. Sus respuestas fueron: “$a = 2.cm^2.x$”, “$a = x.2cm^2$”, “$a = x + 2cm^2$”, “$y(a) = x + 2$”.

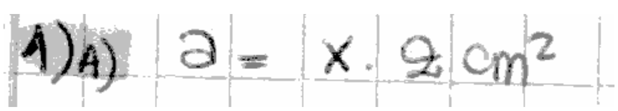
Estas respuestas muestran la tendencia de los alumnos a construir argumentaciones de tipo algebraicas.

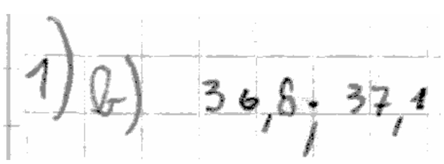
En el ítem **b)** el 40% contestó correctamente. Las respuestas incorrectas fueron diversas. Dos grupos no incluyeron los extremos de los intervalos mientras que los otros dos sólo escribieron los valores aislados correspondientes a los extremos.

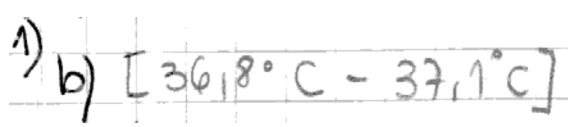
Lo que nos llama la atención es que el 40% no respondió este inciso.

Presentamos algunos ejemplos de lo expuesto:









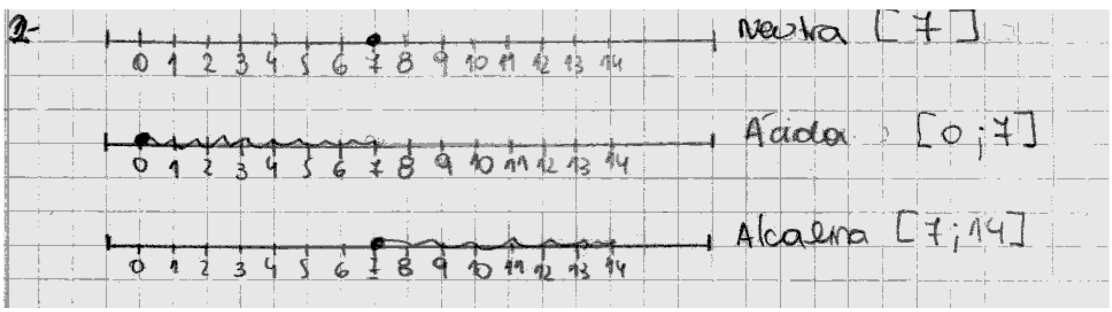
Actividad 2.
Los químicos miden la acidez y alcalinidad de una sustancia con el pH (potencial hidrógeno). La escala usada es de 0 a 14. Una sustancia es ácida si su pH es menor que 7. Si es de 7 es neutra y si sobrepasa este valor es alcalina. Describa los intervalos de pH correspondientes a la variación de la acidez y alcalinidad con desigualdades y represente en la recta numérica.

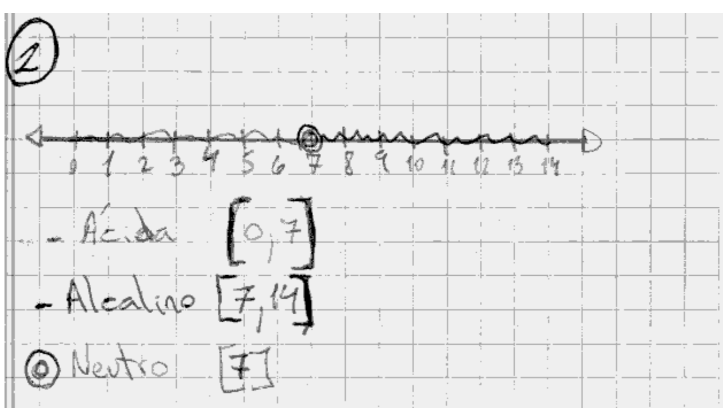
En este caso los alumnos deben escribir las desigualdades y representar en la recta numérica los intervalos de variación. Se involucran las representaciones verbal, simbólica y gráfica.

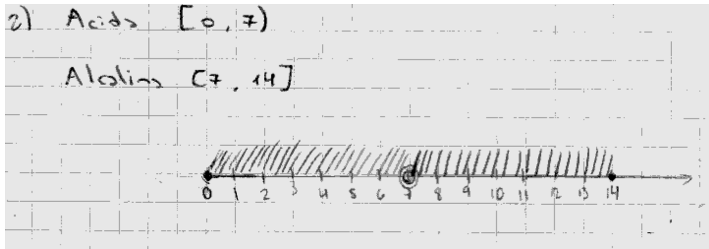
El 15% presentó dificultades para determinar qué extremos incluir en el intervalo de variación de la acidez y de la alcalinidad, incluyendo en ambos el valor 7. Es decir, en la notación correspondiente a la variación de la acidez no interpretaron que *si su pH es menor que 7* se trata de un intervalo semiabierto a derecha y en la correspondiente a la variación de la alcalinidad, que *si sobrepasa este valor* es un intervalo semiabierto a izquierda.

Se observaron también dificultades para la representación gráfica de los intervalos, especialmente para indicar lo que sucede en los extremos.

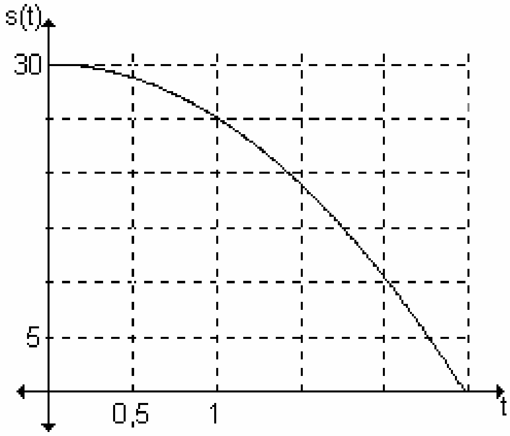
Podemos ver esta situación en los siguientes trabajos:







Actividad 3.
Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. Su posición a los t segundos de ser lanzada se describe con la función de la gráfica. Responda:



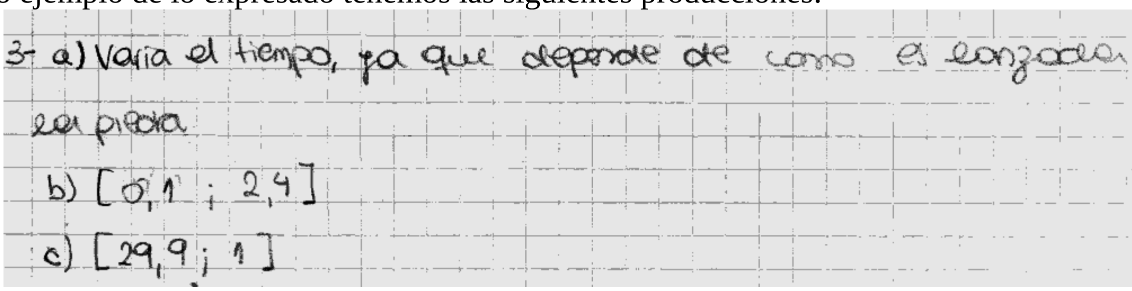
a) ¿Qué es lo que cambia en la situación planteada?
b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la piedra permanece en el aire?
c) ¿Cuál es el intervalo de variación de la altura de la piedra?

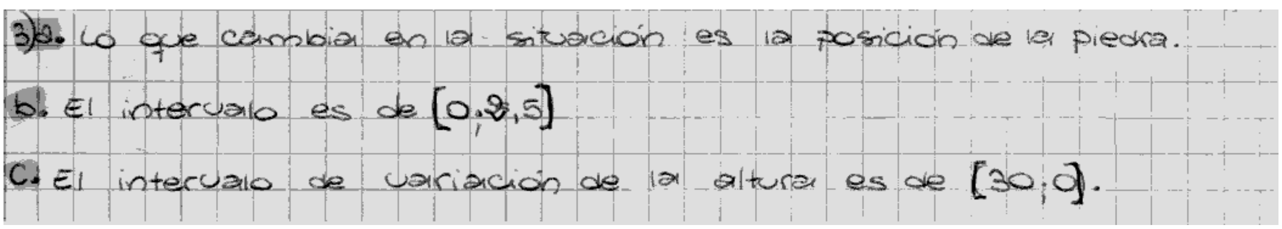
En esta situación los alumnos deben interpretar distintos aspectos variacionales desde la representación gráfica de la función. La identificación de las variables que intervienen en la situación planteada, los intervalos de variación de cada una de ellas, el significado de la intersección con el eje de ordenadas, las unidades y las escalas de cada eje son algunas de las tareas que el alumno debe realizar.

Con respecto a los registros involucrados, su resolución requiere el pasaje del registro gráfico al verbal, numérico y simbólico.
En el primer inciso es necesario identificar las variables involucradas, tiempo y posición. La respuesta esperada es que cambia la posición de la piedra a medida que cambia el tiempo. El 55% respondió de forma correcta.
El 35% respondió de manera incorrecta. Las dificultades se relacionaron con interpretar que en la situación intervienen dos variables. Más de la mitad no incluyó la variable altura y el resto no consideró la variable tiempo. El 10% no contestó.
En los otros dos incisos se solicita los intervalos de variación de cada una de las magnitudes involucradas, que pueden presentarse como desigualdad o como intervalo.
En el inciso **b)** deben expresar el intervalo de tiempo que la piedra permanece en el aire. Todos los grupos respondieron la consigna pero sólo el 40% lo hizo de manera correcta.

Las respuestas revelaron que los alumnos buscaron la información sobre el eje de abscisas pero no fueron capaces de escribir correctamente el intervalo. Las mayores dificultades se encontraron en considerar el intervalo cerrado o semicerrado, incluyendo los dos o uno de los extremos.
En el inciso **c)** deben expresar el intervalo de variación de la otra variable, altura de la piedra. También en este caso todos los grupos respondieron la consigna pero sólo dos lo hicieron de forma correcta y otros cinco consideraron el intervalo abierto en vez de cerrado. Como dificultad significativa encontramos que el 30% de los alumnos invirtió el orden de los extremos. Consideramos que esto está relacionado con la forma de la gráfica de la función decreciente.

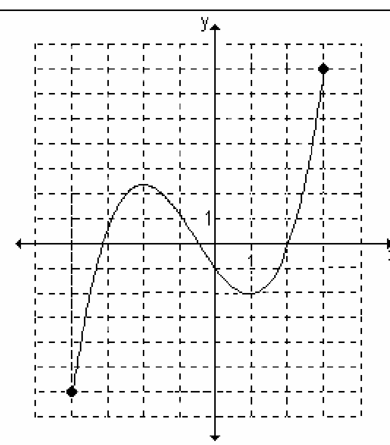
Como ejemplo de lo expresado tenemos las siguientes producciones:


3- a) Varia el tiempo, ya que depende de como es lanzada la piedra
b) [0,1 ; 2,4]
c) [29,9 ; 1]


3) a. Lo que cambia en la situación es la posición de la piedra.
b. El intervalo es de [0;2,5]
c. El intervalo de variación de la altura es de [30;0].

Las respuestas muestran que los alumnos fueron capaces de construir argumentaciones de tipo variacionales. Este tipo de actividad los lleva a construir el concepto de función como relación entre magnitudes variables.

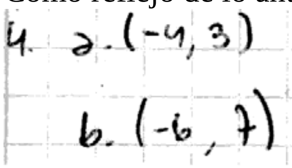
Actividad 4.
Analice la función cuya gráfica se muestra y responda:
a) ¿Cuál es el intervalo de variación de x?
b) ¿Cuál es el intervalo de variación de y?
c) ¿Para qué valores de x, y > 0?
d) ¿Para qué valores de x, y < 0?
e) ¿Para qué valores de x, y = 0?
f) ¿Para qué valores de x, y crece?
g) ¿Para qué valores de x, y decrece?
h) ¿Para qué valores de x, y no crece ni decrece?

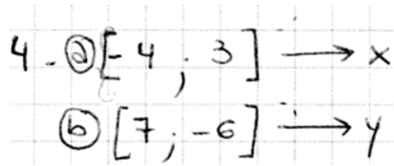


En esta actividad se trabajan otros aspectos variacionales que pueden obtenerse desde la representación gráfica de una función. Específicamente se indagan características como dominio, conjunto imagen, ceros, crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad. Involucra básicamente los registros gráfico y simbólico.

El porcentaje de las respuestas correctas fue el 50% en el ítem **a)** y el 55% en **b)**. Los problemas se repitieron con respecto a la actividad anterior, ya que consideraron los intervalos de variación como abiertos en lugar de cerrados o intercambiaron el orden de los extremos.

Como reflejo de lo anterior podemos mostrar:


4. a. (-4, 3)
b. (-6, 7)

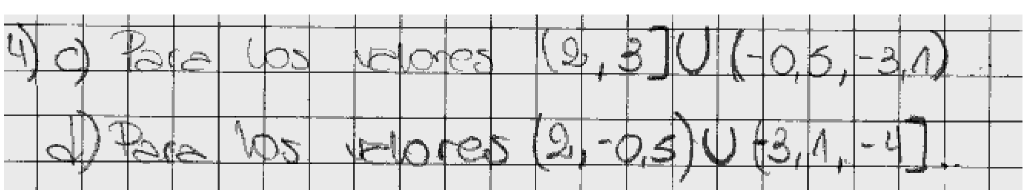

4 - a [-4 ; 3] → x
b [7 ; -6] → y

Notamos que el mayor porcentaje de respuestas incorrectas se presenta en los incisos **c)** y **d)**.

En el inciso **c)** deben interpretar que la expresión simbólica $y > 0$ representa los valores donde la función es positiva. Esto implica determinar gráficamente el o los intervalos para los cuales la gráfica se encuentra por encima del eje x. La respuesta es $(-3{,}2; -0{,}5)\cup(2, 3]$. El primer número es aproximado y se aceptaron otros valores. Por otra parte, para el inciso **d)**, los valores de x para los cuales la función es negativa son los pertenecientes al siguiente intervalo $[-4; -3{,}2)\cup(-0{,}5; 2)$. Allí la gráfica se encuentra por debajo del eje de las abscisas.

El 25% de los grupos respondió correctamente ambos incisos. Las dificultades fueron diversas. En general, si bien lograron identificar los intervalos pedidos, algunos no incluyeron los extremos, el valor 3 en **c)** y el valor −4 en **d)**, considerando abiertos los intervalos y la mayoría consideró todos los intervalos cerrados.

Presentamos algunos trabajos:


4) c) Para los valores (2, 3] ∪ (-0,5, -3,1)
d) Para los valores (2, -0,5) ∪ [3,1, -4].

4. c. De (-3, -0,5) y (2,3).

d. (-4, -3) y (-0,5. 2).

4) d) [-0,5 - 2] ∪ (∞ - (-3,1)]

c) [(-3,1) - (-0,5)] ∪ [2 - ∞)

En el inciso **e)** debían determinar los ceros de la función. El porcentaje de respuestas correctas fue del 65%. Otro 25% también observó los valores de x donde la imagen es nula, pero escribió la respuesta como puntos y además consideró el valor que corresponde a la ordenada al origen.

4. e. Pto (-4, 0). (-0,5. 0) y (2, 0)

4 e (-3,1; 0) ; (-0,5; 0) ; (0; -1) ; (0; 2).

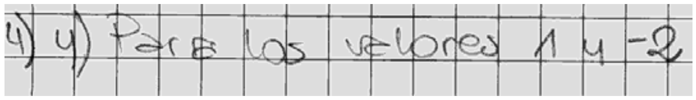
En los incisos **f)** y **g)** debían determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Los resultados fueron buenos, en ambos el porcentaje de respuestas correctas fue del 65%. Los errores fueron diversos, dando algunos los puntos entre los cuáles la gráfica crece y decrece y mezclando otros los valores de x e y.

f (-4; 7) ∪ (-2,5; 2,1) – (1; -2) ∪ (3, 7).

g (-2,5; 2,1) ∪ (1, -2)

En el inciso **h)**, cómo esperábamos, las respuestas de los alumnos se refirieron a valores de x del interior del intervalo. El 25% de los grupos escribió que la función no crece ni decrece en x = –2 y x = 1. El 10% hizo referencia a esos valores pero escribiendo la respuesta como par ordenado (x, y). El 15% no respondió y las demás respuestas fueron variadas, todas incorrectas. De lo expresado mostramos:

4. h. para el (-2, 2) y (1, -2).

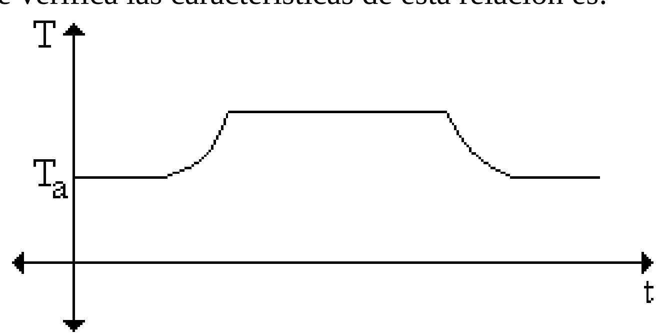


De manera general, destacamos que los alumnos no confundieron los intervalos donde la función es positiva o negativa con aquellos donde crece o decrece. Este aspecto es muy positivo en el estudio de la variación.

Actividad 5.
Al abrir una canilla de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. La temperatura inicial está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir agua caliente, la temperatura aumenta con rapidez. A partir de ahí, la temperatura se mantiene constante. Cuando la canilla se cierra, la temperatura decrece hasta alcanzar la temperatura de la alimentación del agua. Realice un bosquejo aproximado de la temperatura T en función del tiempo t.

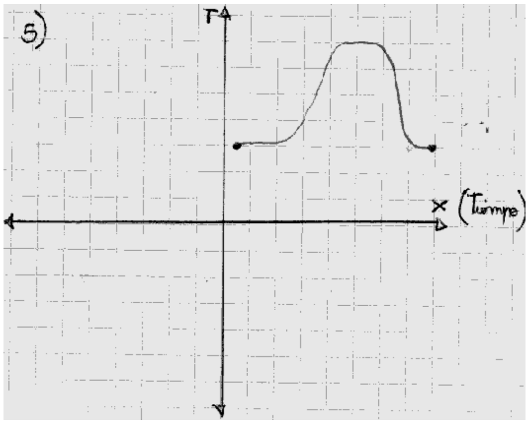
Esta actividad propone una situación de cambio a través del lenguaje verbal.

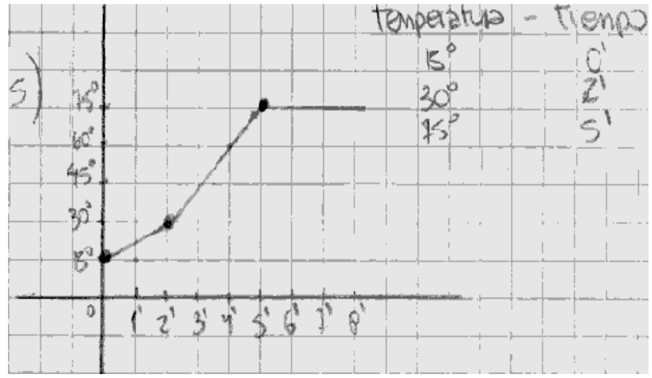
El enunciado presenta el comportamiento de dos variables que se relacionan, tiempo y temperatura del agua. Se pretende que el alumno pueda contextualizarla, interpretarla y producir una representación gráfica.
Una posible gráfica que verifica las características de esta relación es:

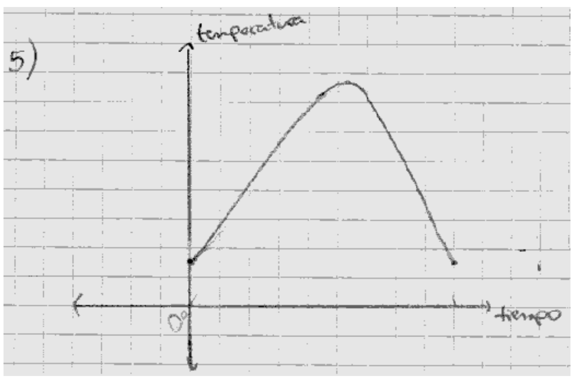


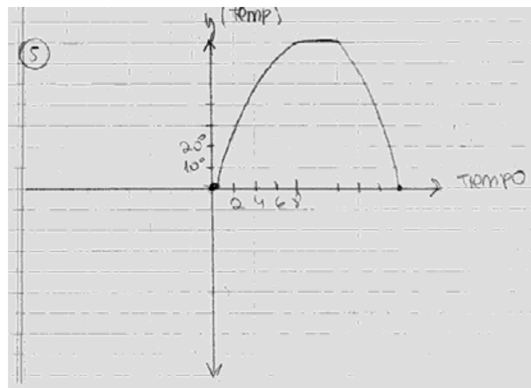
Observamos que un solo grupo hizo una interpretación similar a la nuestra con respecto a considerar constante el primero y el último tramo. Corresponde a la primera figura. Es uno de los pocos que además consideró que el aumento y disminución de la temperatura no es constante. La mayoría consideró tramos de rectas para graficar la función.

El 65% de los grupos presentó gráficas similares a las dos últimas.









Todos ubicaron correctamente las variables independiente y dependiente según el enunciado de la situación. Las dificultades en la mayoría de los gráficos fueron las mismas: no describieron de manera correcta la variación en uno o más intervalos de tiempo.

Actividad 6.
Las variables x e y están relacionadas de modo que y queda determinada si a cualquier valor de x se lo duplica y al resultado se le suma tres. Escriba una ley para y en función de x.

En esta actividad, como en las siguientes, se trabaja la representación algebraica de las funciones. Lograr expresar las relaciones mediante fórmulas facilita en gran medida el estudio de los procesos de variación. La ley que define la función condensa toda la información sobre la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las ecuaciones permiten determinar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas.

En este caso se establece el patrón que expresa la relación entre las variables en forma verbal. Requiere el pasaje al registro algebraico. Los alumnos deben escribir la ley que define la relación.

Es de destacar que la actividad fue realizada en forma correcta por todos los grupos. Esto está relacionado con el manejo que tienen los alumnos del concepto función como una regla de correspondencia y como una expresión algebraica o fórmula.

Actividad 7.
Cada una de las tablas muestra valores numéricos para cada variable representada. Determine la ecuación que relaciona a las variables en cada una de ellas.

x	1	2	3	…
f(x)	3	6	9	…

p	1	2	3	…
q(p)	1	4	9	…

r	0,2	0,5	1	1,5	3	…
t(r)	5	2	1	2/3	1/3	…

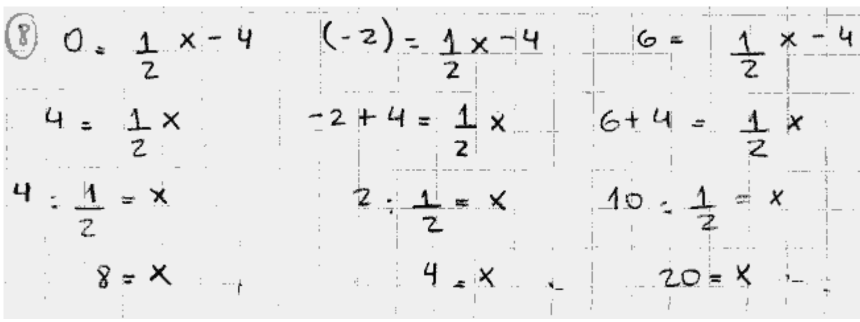
Se presentan tablas de valores a partir de las cuales los alumnos deben descubrir los patrones de regularidad y determinar las expresiones algebraicas correspondientes, trabajando de esta manera el pasaje del registro numérico al algebraico.
Con respecto a la primera tabla un solo grupo, el 5%, escribió en forma incorrecta la expresión algebraica, dando como respuesta $y = x + 3$, en lugar de $y = 3x$.
En relación a la segunda tabla, si bien 17 grupos (el 85%) identificaron la relación entre las variables, sólo 7 de ellos (el 41%) en el momento de escribir la expresión algebraica usaron las variables correspondientes p y q mientras que los otros 10 grupos, usaron x e y. En forma incorrecta contestaron dos grupos y uno no respondió la consigna.
Para la tercera tabla, de los 11 grupos (55%) que identificaron la relación entre las variables, sólo 5 de ellos, en el momento de escribir la expresión algebraica usaron las variables correspondientes r y t y los otros 6 grupos usaron x e y. Los 9 grupos restantes no respondieron lo pedido.
Los problemas detectados surgen según el grado de dificultad de la fórmula que relaciona los valores involucrados.

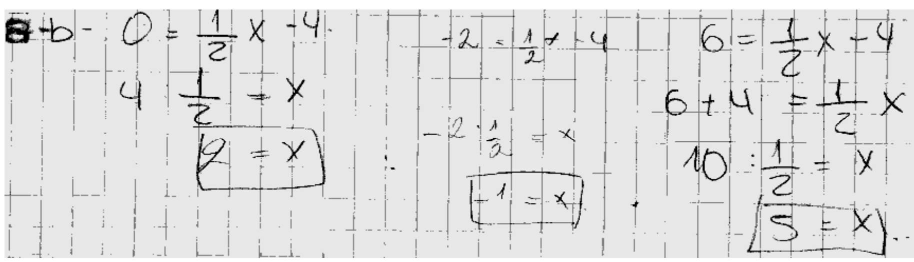
Actividad 8.
Sea la función $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 4$.
a) Exprese la ley que determina la dependencia entre las dos variables con sus palabras.
b) Determine $f(0)$, $f(-2)$ y $f(6)$.

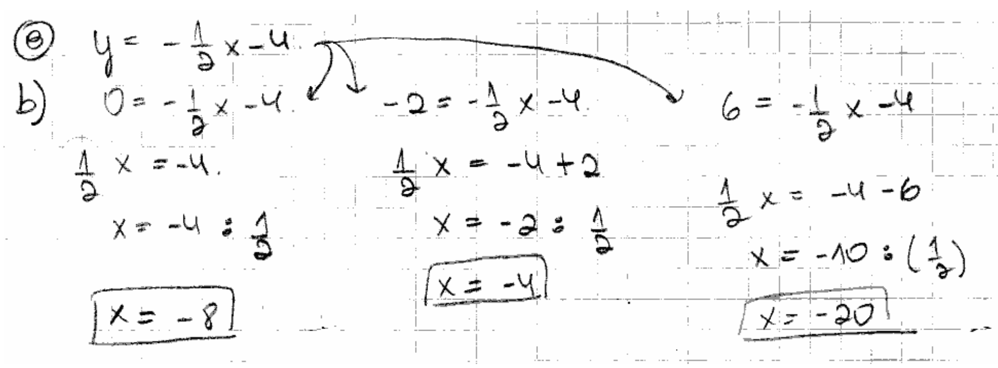
La última actividad pretende analizar qué interpretan los alumnos de una función definida algebraicamente. Se solicita expresar en forma verbal la relación existente entre las variables, es decir, se trabaja el pasaje del registro algebraico al verbal. También se solicita hallar algunos valores particulares de la función.
En el inciso **a),** el 50% contestó bien, el 10% mal y el 40% no contestó. Las respuestas incorrectas fueron:

- *“Según la ecuación $y = \frac{1}{2}x - 4$, puede afirmarse que y es igual a la mitad de cualquier valor x, después de restarle 4.”*
- *“La relación que poseen es que x modifica a y; si el valor de x varía, así también lo hará el valor de y.”*

En relación a la actividad **b)**, en el 60% de los casos fue realizada en forma correcta, el 25% en forma incorrecta y el 15% restante no contestó la consigna.
Todos los que respondieron mal no interpretaron lo pedido, determinando los valores de x que hacen que la función tome determinado valor. Algunos además despejaron mal o copiaron mal la función. Lo enunciado se evidencia en las siguientes resoluciones:







SÍNTESIS Y ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES DETECTADAS

Realizando una revisión general de las actividades observamos numerosos problemas que han sido también identificados por diversos autores que han investigado temas relacionados con las variables, las funciones y la variación.

En las primeras actividades se explora la habilidad para trabajar diferentes formas de representar intervalos de variación (verbal, analítica y geométrica).

Notamos en primer lugar que prefirieron la notación de intervalos que la de desigualdades.

Se observaron dificultades para identificar cuándo un intervalo es abierto o cerrado, presentando problemas para interpretar expresiones que conducen a desigualdades. No tienen una idea clara de cómo representar analíticamente los distintos términos.

Al respecto, Santibáñez (2001), en una investigación acerca del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar llevada a cabo con estudiantes de bachillerato, encontró las mismas dificultades. Expresa que se presentan numerosos problemas para identificar, representar y traducir diferentes formas de escribir intervalos de variación. Esas dificultades se dan especialmente para identificar cuando un intervalo es abierto o cerrado, presentando una escasa relación con el significado de los símbolos de las desigualdades ($<$, $\leq$).

En la actividad 4 se indaga sobre la determinación a partir de una gráfica de los puntos donde la función es positiva, negativa o nula, determinar donde es creciente y decreciente y donde no crece ni decrece. No se encontraron grandes dificultades en este sentido, o confusiones entre el análisis que corresponde al signo de la función y el del crecimiento, lo cual resulta un aspecto muy positivo. Los problemas se volvieron a relacionar específicamente con la notación de puntos o intervalos.

La quinta actividad indaga sobre la habilidad de obtener la gráfica de una situación sencilla de variación. Se presentaron dificultades para describir adecuadamente el comportamiento variacional de una situación presentada verbalmente.

El trabajo en el registro gráfico es muy importante. Dolores (2007) expresa que las gráficas no deben ser utilizadas simplemente como auxiliares didácticos que posibilitan la visualización o para hacer preguntas interesantes, sino como el medio que permite el desarrollo del pensamiento matemático. La manera de generar conocimiento es logrando una posición activa de los alumnos, que involucre determinadas acciones, como poder responder qué cambia, cuánto cambia, cómo cambia, qué tan rápido cambia, cómo se comporta global y puntualmente la gráfica.

Las actividades 6 y 7 exploran la capacidad de, dada una expresión verbal o una tabla de valores, identificar o deducir la relación de dependencia entre las variables y los valores de f(x). La octava explora la habilidad de expresar verbalmente la relación matemática entre dos variables dada algebraicamente.

En relación a los problemas observados en estas actividades, en una investigación sobre dificultades asociadas al concepto de función, llevada a cabo con alumnos de educación media, López (2007) describe varios problemas con respecto a la identificación de las variables presentes en un fenómeno. Explícitamente los alumnos responden, sin importar su naturaleza u origen, que las variables involucradas son x e y. El investigador alude a que la simplificación de las variables hecha por los matemáticos con la finalidad de simplificar cálculos, suele ser una dificultad para el aprendizaje de los alumnos. También manifiesta la dificultad de los alumnos para distinguir la variable independiente y la dependiente.

El análisis global de las respuestas muestra que los alumnos trabajaron de manera adecuada con la noción de función como correspondencia entre cantidades, independientemente de la representación utilizada (analítica, verbal, gráfica o numérica) pero presentaron mayores dificultades para trabajar todos los aspectos que involucran análisis de la variación.

REFLEXIONES

Al avanzar en el estudio de la matemática en el nivel secundario, entran en juego conocimientos variacionales que frecuentemente tendemos a naturalizar en nuestro discurso. Damos por interiorizadas nociones como intervalo, constante, variable, magnitud, variación. Los resultados obtenidos nos muestran que muchos alumnos presentan dificultades a pesar de haber desarrollado estos contenidos desde los primeros años de su educación formal.

La construcción de conceptos relacionados con la variación es un proceso lento que precisa de períodos prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Pero estamos convencidas de que, si las ideas relativas al cambio reciben un enfoque más explícito desde los primeros niveles, nuestros alumnos se encontrarán en mejores condiciones para acceder a la matemática superior y/o enfrentar el mundo que los rodea.

Una manera de encarar su estudio es analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad diaria del hombre como de las ciencias, donde la variación se encuentre como base de ellas. Coincidiendo con lo expresado por Castiblanco Paiba, Urquina y Acosta (2004, p. 14), "...el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica".

Las interrelaciones entre los diferentes sistemas de representación son la base para la interpretación de importantes temas vinculados al pensamiento variacional que actualmente parecen inalcanzables en el nivel medio. Todo esto le resta importancia al manejo mecánico de una función ya sea, por ejemplo lineal, cuadrática ó exponencial.

La propuesta es, para el nivel que corresponda, el desarrollo de los contenidos del currículo relacionados con las variables y las funciones desde un enfoque variacional, considerado al estudio de la variación como una especie de eje del que se desprenda el contenido temático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Acosta, E. y Rodríguez, F. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Serie Documentos. Colombia: Enlace Editores Ltda.

Dolores, C. (2007). Usos de las gráficas y sus repercusiones en el aprendizaje de la matemática. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 479-484. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C.; Guerrero, L.; Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 15* (1) 73–84. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

López, J. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función.* Tesis de Licenciatura no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. México.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 308–318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lupiáñez, J. y Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.*): Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* (pp.291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada.

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: SAEM Thales.

Santibáñez, R. (2001). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar con estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Vrancken, S.; Engler, A. y Müller, D. (2010). Funciones como modelos de variación y cambio. En A. Engler, D. Müller y S. Vrancken (Comp.), *Matemática: funciones y nociones de trigonometría. Aportes para la articulación escuela secundaria – universidad*. Santa Fe: Ediciones UNL.