RELACIÓN ENTRE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y LA FORMACIÓN DOCENTE

Ricardo R. Fabián Espinoza
FACENA (UNNE). ISFD "Dr. Juan Pujol". Corrientes (Argentina)
rrfespinoza@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo se intenta mostrar la necesidad del docente de conocer ampliamente el conocimiento matemático involucrado en una actividad de aprendizaje de los alumnos, para estar en mejores condiciones de comprender los razonamientos de los mismos, entendiéndose como conocimiento amplio la puesta en obra del conocimiento pretendido, en términos del planteamiento de I. Chevallard (1997). Para ello se explica un trabajo realizado con alumnos de cuarto año del Profesorado en Matemática del Instituto de Formación Docente "Dr. Juan Pujol" de la ciudad de Corrientes, el que consistió en la realización de un análisis de dos entrevistas sobre la temática de los divisores, las que fueron desarrolladas en una escuela urbana de la ciudad de Corrientes, con alumnos del Nivel Medio[1].

Palabras clave: Investigación educativa, formación docente, divisores

DESARROLLO

Para el desarrollo del trabajo se toma como marco de referencia algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard. Por ello, se emplea como marco conceptual una organización matemática[2] sobre algunas tareas relativas a los divisores cuyos principales resultados son tenidos en cuenta durante el planteamiento de preguntas a los estudiantes del Profesorado.

Los **propósitos** del trabajo desarrollado con alumnos del Profesorado son los siguientes:

- Desde el plano matemático: Ampliar el conocimiento de los alumnos del Profesorado sobre Divisores.
- Desde el plano profesional: Analizar y comprender, desde las entrevistas, los razonamientos de los alumnos del Nivel Medio.

[1] Las entrevistas fueron realizadas por el autor de este trabajo, en el marco de la elaboración de la Tesina de Licenciatura en Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la U.N.N.E.
Fueron llevadas a cabo con un grupo de cuatro alumnos de 9º E.G.B. y tres alumnos de Polimodal.

[2] Esta organización matemática forma parte de la mencionada Tesina.

- Desde el plano didáctico: Discutir sobre la importancia de profundizar los conocimientos matemáticos en el ámbito de la formación docente para mejorar la comprensión de los razonamientos de los alumnos del Nivel Medio.

Con tales propósitos se persigue que los alumnos del Profesorado tengan en cuenta que para comprender un fenómeno matemático lo primero que se necesita son "más matemáticas" y que para ello es necesario transitar por un proceso de estudio, dado que no se puede entender en profundidad una organización matemática determinada si no se lleva a cabo simultáneamente una práctica matemática eficaz.

Atendiendo a este planteamiento, se trata de que en el ámbito del Profesorado se analicen y discutan contenidos del Nivel Medio, teniendo en cuenta los problemas que el concepto involucrado resuelve, las técnicas que se usan para resolverlos, las justificaciones y ampliaciones de las mismas y las relaciones con otros conceptos.

La estructura del trabajo se constituye en las **fases** que se detallan a continuación. En cada una de ellas, se explican las características del trabajo realizado y algunos resultados alcanzados.
El tiempo que demandó la propuesta (un grupo de 12 alumnos del Profesorado) fue de aproximadamente un mes (8 clases y un total de 16 hs. reloj).

Fase 1: Planteo de preguntas[3] a los estudiantes, elaboración de las "primeras respuestas[4]".

En esta primera fase se presenta a los alumnos del Profesorado, las mismas preguntas que fueron planteadas a los alumnos de 3° ciclo y Polimodal.

1. *¿Ustedes recuerdan lo que es un divisor de un número?*
2. *¿Pueden decir si 4 es divisor de 20?*
3. *¿Pueden indicar un número que no sea divisor de 20?*
4. *¿Cómo harían para encontrar los divisores de 324?*
5. *¿Tiene algo que ver el divisor de una división con lo que estamos diciendo que es divisor?*
6. *¿Tiene algo que ver que a sea divisor de b con la fracción a / b?*

Las preguntas 1, 2, 3 y 4 se relacionan con la conceptualización del objeto divisor que incluye el reconocimiento de tareas y de algunas de sus técnicas asociadas.

[3] Algunas de estas cuestiones, por ejemplo las dos últimas, fueron abordadas por el autor del presente trabajo en el proceso de elaboración de la Tesina citada.
[4] Es necesario destacar que estos alumnos del Profesorado han estudiado algunas cuestiones relacionadas con la Teoría Antropológica de lo Didáctico que se usa como referencia en este trabajo. Por ello, toda vez que se les ha propuesto preguntas, intentaron responderlas con técnicas y tecnologías, haciendo además análisis de pertinencia de las técnicas e intentando relacionar los distintos objetos matemáticos involucrados en la solución de una determinada tarea.
Además, tienen buenas experiencias en la realización de análisis didácticos de propuestas de enseñanzas, basadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.

Las preguntas 5 y 6 tienen que ver con la relación existente entre dicho objeto y otros objetos matemáticos como el de *divisor de una división* y *fracción*.

Las respuestas dadas por los alumnos del Profesorado no fueron discutidas en esta primera instancia. Tampoco se exponen aquí, dado que lo que interesa mostrar es la conceptualización finalmente alcanzada de la noción de divisor que les pudiera permitir interpretar los razonamientos de los alumnos del Secundario plasmados en las entrevistas.

<u>Fase 2</u>: Primer análisis de las entrevistas realizadas a los alumnos de Nivel Medio y reformulación de las primeras respuestas de los alumnos del Profesorado.

A partir de la lectura de las respuestas dadas por los alumnos del Nivel Medio, los alumnos del Profesorado expresaron sus opiniones sobre las dificultades presentadas en términos de *"el alumno se confunde entre tal o cual cosa"*, *"no conoce el método tal"*, *"no sabe aplicar tal o cual propiedad"*, etc.

Sin embargo, las discusiones en clases (entre alumnos y grupos y con el docente autor de esta propuesta) sobre lo que sabían o no los alumnos del Secundario, mostró ciertas dificultades en los mismos alumnos del Profesorado sobre los temas involucrados. Por lo tanto la siguiente tarea fue la búsqueda de nuevas definiciones, propiedades, relaciones, etc. Los distintos aportes fueron analizados y discutidos en clase. Por ejemplo, la primera definición dada por los alumnos de *divisor* fue la siguiente: *Un número es divisor de otro si está contenido en éste un número exacto de veces*, definición que no se encontraba presente en las respuestas de los alumnos en las entrevista, lo que motivó la búsqueda de otras definiciones que fueron discutidas en clases posteriores, analizando en particular su dominio de definición, la posibilidad de considerar –o no- al cero en cada una de ellas y los conocimientos previos involucrados.

De la misma manera se trabajó con las distintas técnicas; por ejemplo para encontrar los divisores de números grandes. La mayor precisión en las definiciones y el intercambio grupal les permitió a los estudiantes mejorar la formulación de las relaciones entre los objetos Divisor, División y Fracción, y comprender la complejidad de tales relaciones. Encontraron formulaciones equivalentes pero consideradas por ellos como "más claras" entre algunos conceptos, por ejemplo al referirse a la relación entre el divisor de un número entero y el divisor como elemento de una división, prefieren formularla usando el término *múltiplo*, es decir manifestando que *no siempre el dividendo es múltiplo del divisor*, en lugar de indicar que *no siempre el divisor de una división es divisor del dividendo,* mostrando a la vez la relación entre divisores y múltiplos.

Por otra parte se les planteó algunas preguntas que promovieron la formulación y justificación de técnicas no muy conocidas previamente. Por ejemplo, para encontrar los divisores de un número "grande", ¿se podrá dar una cota a los números con los que se probará si son o no divisores de un número? O bien: En los números positivos puede afirmarse que si a es un divisor de b, y $a \neq 0$ entonces, $a \leq b$, ¿también es válida esta propiedad para los divisores negativos de b?[5].

A partir de este proceso, los estudiantes pudieron mejorar su producción matemática inicial, estableciendo de la siguiente manera la conformación de las "nuevas respuestas".

R1: Dados dos números enteros a y b, se dice que **a es divisor de b** si existe un entero c, tal que: b = a x c.
También se dice que **a es divisor de b**, siempre que $a \neq 0$, si b : a es una división entera exacta.
Para determinar si un número entero es divisor de otro se puede recurrir también a la aplicación de algún criterio de divisibilidad.

R2: 4 es divisor de 20, dado que existe el número entero 5, tal que 20 = 4 x 5

R3: 3 no es divisor de 20, porque no existe ningún número entero que multiplicado por 3 dé 20, pues 3 x 6 = 18 (menor que 20) y 3 x 7 = 21 (mayor que 20).

R4: Para encontrar los divisores de un número "grande" la multiplicación o división no son técnicas pertinentes. Se determinaron entonces las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Para obtener los divisores de b basta obtener los divisores d_i, menores o iguales que la raíz cuadrada de b, ya que los otros se pueden calcular mediante el cociente entre b y cada uno de los d_i.
Si el número del que se trata de encontrar sus divisores es muy grande, su raíz cuadrada también lo es, por lo tanto es necesario abordar otra propiedad:

Propiedad 2: Sea c un número natural, siendo su factorización prima: $c = p_1^{c1} \times p_2^{c2} \times \ldots\ldots \times p_r^{cr}$. Si d es un divisor positivo de c, todo primo q que es divisor de d, es también divisor de c; es más, si q^t es divisor de d entonces q^t es divisor de c.
Y en general:

Propiedad: *d es divisor de c si y sólo si, d es de la forma* $d = p_1^{d1} \times p_2^{d2} \times \ldots\ldots \times p_r^{dr}$, *con* $0 \leq d_i \leq c_i$, *siendo* $c = p_1^{c1} \times p_2^{c2} \times \ldots\ldots \times p_r^{cr}$.

R5: Cuando se habla de "divisor de un número entero", se está haciendo referencia a una relación entre números, mientras que el "divisor como elemento de una división", es un número.
La relación que se puede establecer es que -en una división entera- no siempre el divisor de la misma es divisor del dividendo; sólo lo es, si tal división es exacta.

[5] Estas preguntas también fueron pensadas en el marco de la investigación plasmada en la Tesina mencionada.

R6: Si a es divisor de b, $a \neq 0$, se puede decir que a/b es una fracción de la forma 1/c, mientras que b/a es una fracción aparente, es decir, un número entero.

<u>Fase 3</u>: Elaboración de un nuevo análisis de las entrevistas

Teniendo como marco de referencia los conocimientos construidos sobre el tema de divisores, los alumnos realizaron un nuevo análisis de las entrevistas.

Luego, a partir de la discusión entre el análisis realizado por ellos mismos y el llevado a cabo por el docente, se elaboraron ciertas conclusiones, algunas de las cuales se retoman aquí, a modo de ejemplo, con respecto a las preguntas 5 y 6:

> **a)** En relación con la respuesta de los alumnos de noveno año de la E.G.B. a la pregunta 5: ***¿Me podrían decir si tiene algo que ver el divisor de una división con lo que estamos diciendo que es divisor?***

El tramo de la entrevista sobre el que los alumnos han realizado comentarios (que se explicitarán más adelante) es el siguiente:

……
P: bueno chicos, recién dijimos que 3 es divisor de 9 y que 5 no lo es. Teniendo en cuenta eso, ¿me podrían decir si tiene algo que ver el divisor de una división con lo que estamos diciendo que es divisor?
(……)
P: por ejemplo: 4 es divisor de 12, 5 de 10, 6 no es divisor de 14, etc.
(……)
P: ¿tiene algo que ver el divisor de una división con el divisor de un número?
A1, A2: sí
P. ¿por qué?
A2: porque el divisor multiplicado por el cociente tiene que dar el dividendo
P: ¿me podrías aclarar un poco más?
A2: el divisor por el cociente, no decimal, te tiene que dar lo que dice el dividendo
P: ¿por qué no hablaste de resto?
A1: porque para que sea exacta el resto debe ser cero
P: ¿y entonces?
A1: hay que buscar una división exacta
P: y si la división es exacta, ¿qué se puede decir del divisor de la división?
A2: que es perfecto
P: ¿quién es perfecto?, ¿qué significa que sea perfecto?
(Se observa que A1 está tratando de decir algo de manera urgente)
P: ¿se puede decir que el divisor de la división es divisor del dividendo?
A1: exactamente, eso estaba queriendo decir y no me salía
P: ¿están de acuerdo?
A2, A3: sí (...)

Se observa que los alumnos entrevistados no responden durante un cierto tiempo y entonces el entrevistador les presenta algunos ejemplos de números que son divisores de un número y de otros que no lo son, tal vez porque estos alumnos venían confundiendo desde el inicio de la entrevista al divisor de un número con el divisor como elemento de una división.

Seguidamente los alumnos A1 y A2 responden afirmativamente y éste último justifica su afirmación diciendo que el producto entre el divisor y el cociente no decimal debe ser igual al dividendo. Luego, A1 se involucra en la conversación diciendo que tal división debe ser exacta y A2 sostiene que, en ese caso, el divisor es *perfecto*.

Se considera que los alumnos siguen sin poder formular que en una división entera exacta su divisor es divisor del dividendo y pareciera que la coincidencia de los nombres les genera una verdadera dificultad. En este sentido, la intervención de A2 muestra su necesidad de identificar con otro nombre a aquellos divisores que cumplan una característica especial, la de hacer exacta a la división entera.

b) En relación con la respuesta de los alumnos del Polimodal a la pregunta 6: ***¿Tiene algo que ver que a sea divisor de b con la fracción a/b?***

Se aprecia que el alumno A1 en principio responde afirmativamente, como puede verse en el siguiente tramo de la entrevista:

……
¿y tiene algo que ver que a sea divisor de b con la fracción a / b?
(……)
A1: sí
P: ¿por qué?
A1: porque la fracción es una división y si la fracción se tiene que transformar en división sería a : b
……

No obstante, se puede notar que establece solamente la relación entre división y fracción en el siguiente sentido: toda fracción a / b, $b \neq 0$, puede ser pensada como la división de a por b, con resto nulo o no.

Para contestar la pregunta planteada, es necesario establecer además la relación entre los conceptos de divisor y división; es decir: si al dividir a por b ($a, b \in Z$, $b \neq 0$), el cociente es entero y el resto es cero, entonces b es divisor de a.

Involucrando ambas relaciones se puede decir que si a es divisor de b, b : a es una división entera exacta y como la misma puede ser escrita como la fracción b / a, se tiene finalmente que si a es divisor de b, entonces la fracción b / a es un número entero. Por otra parte, si a es divisor de b, de a / b se puede decir que es una fracción de la forma 1 / c, dado que en este caso a / b = a / c.a = 1 / c.

Como se puede observar, para responder a la pregunta se deben establecer relaciones complejas, lo cual se dificulta aun más en una entrevista.

Luego de su primera intervención en relación con la cuestión sujeta a análisis, pareciera que, con ciertas dificultades de formulación, dicho alumno establece las relaciones necesarias para responder a la pregunta:

> *……*
> *A1: cuando una fracción hay que pasarla a un número entero se hace una división…No, en este caso hay que hacer b dividido a, por ejemplo 2 / 6 para pasar a número entero sería 6 : 2 que daría como resultado 3…*
> *……*

Aparentemente este alumno, no se está refiriendo únicamente a la relación entre división y fracción sino que está pensando esa relación en el caso específico en que a es divisor de b. Se observa esto ya que manifiesta *en este caso hay que hacer b : a*, refiriéndose aparentemente al caso en que a es divisor de b. Además, cuando el alumno A3 explica que para pasar la fracción a / b a división, se hace a : b y manifiesta que a es divisor de b, A1 le contesta preguntando si el divisor no tendría que ser b.

A pesar de existir evidencias de que establece las relaciones necesarias para responder a la pregunta planteada, continúa con ciertas dificultades, pues luego indica que el hecho de que a sea divisor de b se relaciona con la fracción b / a y dice que b es divisor de a, como puede apreciarse seguidamente:

> *……*
> *P: entonces, si yo digo a es divisor de b, qué sigue de eso según lo que estabas diciendo?*
> *A1: para mi tendría que se b / a, para que tenga relación, b divisor de a*
> *……*

En el diálogo que se establece en relación con esta cuestión se considera interesante destacar las intervenciones del alumno A3, quién aparentemente al principio no puede establecer las relaciones necesarias para responderla; solamente parece considerar la relación entre división y fracción, dado que indica que para pasar la fracción a / b a una división se realiza a : b y dice además que a es divisor de b.

> *……*
> *P: tiene algo que ver que a sea divisor de b con la fracción a / b?*
> *A3: sí, para mi sí, se hace a : b y a sería el divisor de b.*
> *……*

No obstante, se puede observar que aparentemente evolucionan sus conocimientos, pues al hecho de que a sea divisor de b, lo relaciona luego con la fracción b / a:

……
A3: no tendría relación, si de fracción pasamos a dividir, b sería divisor de a.
P: y entonces, ¿con qué fracción se relaciona?
A3: si a es divisor de b, tendría que ser b / a
P: ¿están de acuerdo?
A1, A3: si
……

CONCLUSIONES

En este trabajo puede evidenciarse que un mayor conocimiento matemático de los estudiantes del Profesorado les permitió mejorar la comprensión de las dificultades que tuvieron los alumnos de E.G.B. 3 y Polimodal en las entrevistas. Pudieron, por ejemplo, determinar la confusión de los alumnos del Nivel Medio entre un número (divisor de una división o fracción) con una relación entre números ("a es divisor de b") a partir del análisis de las todas las relaciones que son necesarias de considerar para vincular tales objetos.

Varias de las preguntas planteadas a los estudiantes del profesorado, que les permitió ampliar sus conocimientos e interpretar mejor los razonamientos y las dificultades de los alumnos, fueron pensadas en el ámbito de una investigación educativa.

La comprensión de la complejidad conceptual involucrada en una tarea de aprendizaje de los alumnos y de las dificultades involucradas en sus razonamientos coloca al docente (o futuro docente) en una mejor posición para planificar actividades superadoras de las mismas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Becker, M., Pietrocola, N. y Sanchez, C. (2001). *Aritmética*. Buenos Aires: Red Olímpica.
Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.
Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.
Espinoza, R. (2007). Divisores: determinación de prácticas asociadas. Tesina de Licenciatura sin publicar. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la U.N.N.E.
Etchegaray, S. (1998). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de teoría de números*. Tesis sin publicar. Universidad de Río Cuarto.
Gentile, E. (1991). *Aritmética elemental en la formación matemática*. Buenos Aires: Edipubli.