

# ANÁLISIS DEL PAPEL DE LAS IMÁGENES EN ACTIVIDADES MATEMÁTICAS

Haydeé Blanco  
Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”  
Ciudad de Buenos Aires (Argentina)  
fblanc@fibertel.com.ar

## RESUMEN

En este trabajo se trata de averiguar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre la construcción de modelos tridimensionales y como utilizan estrategias visuales en el proceso de solución de los problemas que se les presentan. Se hace hincapié en el artículo sobre los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes en el momento de tener que aplicarlos a situaciones relacionadas con la geometría, lo que nos lleva a indagar en estos temas para encontrar posibles soluciones. Se plantean algunas entrevistas con alumnos de 4to año de escuela media para averiguar sus creencias sobre su aprendizaje y, además, conseguir información sobre la asimilación de sus conocimientos matemáticos y las destrezas obtenidas en el desarrollo de los problemas que se les presentaron.

**Palabras Clave:** Visualización, modelos tridimensionales, imágenes cinestésicas, imagen mental

## INTRODUCCIÓN

En mi trayectoria docente he observado que los conocimientos geométricos han sido dejados de lado en la escuela media por diversos motivos. Entre ellos:

- por considerarse que la parte algebraica es más importante dadas sus aplicaciones en toda la Matemática
- por el tiempo que insume la enseñanza de la Geometría en la escuela media y enseñar a razonar para que los alumnos puedan descubrir los conocimientos guiados por el profesor y no ser meros oyentes en clases expositivas
- pues se consideraba que no tenía influencia en los conocimientos posteriores de los alumnos
- por desconocimiento de la Geometría por parte de gran cantidad de profesores, que a su vez recibieron poca capacitación en esta área y adolecen de metodologías para su enseñanza y se sienten poco seguros al abordarla en el aula.

Por consiguiente, se intenta un análisis de las representaciones visuales que realizan los estudiantes de los cuerpos poliédricos en el plano, a través de algunas propuestas áulicas.

Muchos investigadores han realizado reflexiones acerca de la visualización en el aula de matemática desde diversos marcos teóricos y en relación a distintos contenidos de la matemática. Algunas de estas consideraciones son:

Núñez Urías J. (2002) sostiene:

*“Hay que aprender a usar la visualización creativamente, como una herramienta para el entendimiento: la visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes efectivamente para descubrir matemáticas y comprenderlas”* (p. 2).

Esta definición plantea los instrumentos para utilizar en la visualización, por un lado las imágenes con lápiz y papel y, por otro lado, con ayuda de la tecnología. Se trata de imágenes estáticas o dinámicas. También otorga al concepto de visualización relación con la efectividad para la comprensión de contenidos matemáticos. En esta caracterización se pone de manifiesto una concepción platónica de la matemática que involucra el descubrimiento, y no la construcción como lo pensamos nosotros. Observamos una concepción generalizada, ya que no diferencia entre imágenes mentales y materiales.

Carrión Miranda (2000) distingue entre el uso común que se da al vocablo visualización en psicología y el que se da en la matemática. *“El término visualización no es muy familiar en matemática y sus connotaciones pueden no ser obvias. El uso común en psicología se relaciona con la habilidad de los sujetos para formar y manipular imágenes mentales. Desde la perspectiva de la matemática es inusual la restricción de que las imágenes deben ser manipuladas mentalmente”* (p. 2). Da su opinión dándole a la visualización categoría de “herramienta para”, en la siguiente idea: *“La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento”*

Jones (1998) expresa al respecto: Es el *“proceso de formación de imágenes (mentalmente o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso efectivo de esas imágenes para el descubrimiento matemático y el entendimiento”* (p.1). Distingue entre lo que es un proceso de formación de imágenes mentales y la representación de esas imágenes, ya sea en forma manual o con la computadora. Confiere al concepto de visualización vinculación con la efectividad para la comprensión de contenidos matemáticos.

Las primeras explicaciones teóricas sobre las representaciones gráficas de cuerpos geométricos consistían de argumentos cognitivos resultado de las experiencias de aula. Vinner (1983) y Tall (1996) crearon los términos *imagen del concepto* y *definición del concepto* para explicar cómo el estudiante usaba dichas imágenes para resolver problemas. Tenemos tres elementos a considerar:

- *La imagen del concepto*: se refiere al conjunto de estructuras cognitivas que se relacionan con el concepto, que incluyen imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos asociados.

- *La definición del concepto:* se refiere al conjunto de palabras que se usan para especificar ese concepto. Su aprendizaje puede ser memorístico, construido por él, significativo o no.  
Dentro de los factores potenciales de conflicto se consideran aquellos en los cuales la imagen de un concepto contradice a la definición formal del concepto, lo que impide el aprendizaje formal, dado que es imposible formar una imagen del concepto asociada a esa definición.
- Un grupo de operaciones mentales o físicas como ciertas operaciones lógicas.  
O sea el alumno comprende e interpreta modelos visuales y, por otra parte, refleja en imagen visual información recibida en forma simbólica.

Algunos autores sostienen que los resultados son mejores cuando se utilizan materiales manipulativos (Bishop, 1980; Clements y Battista, 1992). Por lo tanto hay consenso bastante generalizado en la necesidad de desarrollar unidades de enseñanza con el objetivo de transferir a otros campos habilidades para la conexión entre los espacios de 2 y 3 dimensiones.

De acuerdo con esto es importante la habilidad de profesores y estudiantes para la obtención de representaciones planas adecuadas de cuerpos tridimensionales y viceversa, para la construcción de cuerpos geométricos a partir de sus representaciones planas. Si bien la más problemática para los estudiantes es, sin duda, la realización de representaciones planas.

En nuestra investigación bajo el término *visualizar* tenemos en cuenta los procesos que están vinculados cuando las personas construyen, transforman y relacionan imágenes mentales visuales, y en los que la mente actúa dinámicamente rotando, transformando y relacionando la imagen. Tenemos en cuenta también los procesos que se producen al dibujar figuras o diagramas.

## **OBJETIVO**

Han sido motivo de este estudio las falencias observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyan sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional.

Estas habilidades no se han desarrollado y traen aparejados muchos inconvenientes en el momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren manejo geométrico. Por lo tanto, se propuso a los alumnos la construcción de modelos tridimensionales con la idea de observar y evaluar la destreza de los estudiantes para, a través de la visualización, construir, por ejemplo, la imagen de un cubo, distinguiendo aquellos que *lograban visualizar* de los que obtenían los objetivos *con estrategias de ensayo y error*. Por otro lado, se tuvo por objetivo medir la *calidad de las imágenes de los estudiantes*, a través de las construcciones de cuerpos geométricos.

## ALGUNOS ASPECTOS EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA

Reflexionando sobre cómo aprende geometría un niño, vemos que lo hace experimentando e interactuando con su entorno.

Pallascio (1985), considera cinco niveles: *visualización*, *estructuración*, *traducción*, *determinación* y *clasificación*. El grado de dificultad se va incrementando al pasar de un nivel a otro. Las etapas son:

- **Visualización:** después de haber observado un objeto, la visualización radica en memorizar imágenes parciales a fin de reconocer objetos iguales o semejantes a través de un cambio de posición o de escala, entre un conjunto de objetos ante un mismo diagrama.
- **Estructuración:** una vez visualizado el objeto, la estructuración reside en el reconocimiento y reconstrucción del objeto partiendo de sus elementos básicos.
- **Traducción:** se basa en el reconocimiento de un objeto a partir de una descripción literaria y viceversa.
- **Determinación:** reside en el reconocimiento de su existencia partiendo de la descripción de sus relaciones métricas.
- **Clasificación:** reside en el reconocimiento de clases de objetos equivalentes de acuerdo a distintas pautas de clasificación.

## ENTREVISTAS REALIZADAS A LOS ALUMNOS

### *Primera entrevista.-*

Se propuso al curso, separado en grupos de 4 o 5 integrantes, la construcción de modelos tridimensionales. En este caso, el desarrollo de un cubo.

*Los alumnos realizaron en cartulina una figura como la siguiente:*



Se les pidió que, manipulando el papel, observaran la figura resultante.

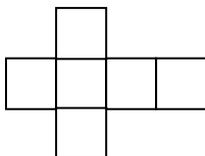
- ¿Qué les faltaba?

Los estudiantes pueden manipular el papel para obtener lo pedido y utilizar tijeras para recortar y trabajar con el mismo.

Vieron que para formar un cubo con los cuatro cuadrados debían agregar dos más.

- ¿Dónde?

Ahí comenzaron a discutir entre ellos, donde ubicar esos cuadrados. Y obtuvieron, finalmente el siguiente desarrollo:



A continuación se les invitó a encontrar otros desarrollos posibles y que los dibujasen. Se mostraron los desarrollos obtenidos por los distintos grupos a todo el curso.

*Por último, se les mostró distintos desarrollos hechos en cartulina, y se les preguntó para cada uno de ellos:*

¿Con este desarrollo, podrías formar un cubo? ¿Cómo lo armarías?

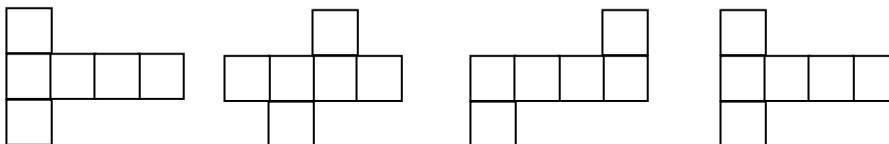
El estudiante podía, en todo momento, manipular el material existente.

Ante la imposibilidad de construir el cubo, se le presentaba el desarrollo completo, para que, doblando y uniendo la cartulina, lo lograra.

La idea era observar y evaluar la destreza del estudiante para, a través de la visualización del contorno dado, construir la imagen del cubo.

Se puso de manifiesto además, aquellos alumnos que *lograban visualizar* y los que obtenían los objetivos *con estrategias de ensayo y error*.

Algunos de los desarrollos utilizados en la entrevista fueron los siguientes:



Se observó que algunos alumnos solicitaban más ayuda que otros al profesor para resolver su tarea.

Se consideró también, al evaluar la habilidad de los alumnos, el uso de imágenes cinestésicas (uso de manos y dedos), mientras resolvían su tarea. Presmeg (1985) llamó “imágenes cinestésicas” a aquellas que involucran alguna actividad muscular.

Una vez logrado esto, estábamos en condiciones de dar una definición de poliedro. Para poder enunciarla se transitaron las etapas de *visualización* y *estructuración* descriptas por Pallascio, hasta llegar a la etapa de traducción.

El análisis de las construcciones realizadas anteriormente y la distinción del subconjunto de los cuerpos cerrados permiten la elaboración del concepto del poliedro. El docente a cargo del curso estuvo abierto a aceptar definiciones equivalentes de un mismo concepto.

### ***Segunda entrevista.***

La segunda entrevista tuvo por objetivo medir la *calidad* de las imágenes de los estudiantes (Brown y Wheatley, 1990).

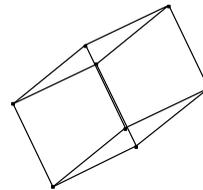
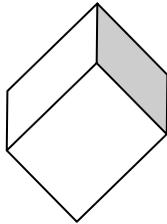
#### *Realización de un cuerpo geométrico*

Se les mostró a los estudiantes cuerpos geométricos y se les pidió que dibujasen dos de los vistos, en un papel. Se les daba la posibilidad de volver a mirar el cuerpo geométrico las veces que fuese necesario y volcarlo en el dibujo. Cuando los estudiantes terminaban el dibujo, se les pedía que explicaran cómo habían realizado el mismo.

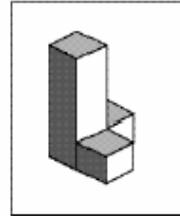
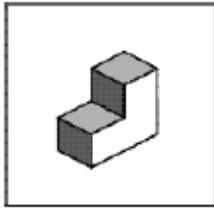
El objetivo era que los estudiantes reflexionaran sobre sus estrategias para imaginar, ver cómo traducían cada cuerpo y hasta donde confiaban en su *imagen mental*.

Esta tarea consistió en evaluar la aptitud del estudiante para construir una imagen de un modelo dado, y también la aptitud para poder copiar la misma desde la memoria.

Las figuras que se utilizaron en esta actividad fueron las siguientes:



Se utilizó también la construcción del “módulo multicubo”.



En la investigación realizada por Gutiérrez (1998), éste se refiere a los sólidos más utilizados en el aula: cubos, pirámides, prismas, etc., y el “módulo multicubo” (sólido formado por varios cubos iguales apoyados por sus caras). Se ha observado que la enseñanza específica aumenta la posibilidad de que los estudiantes manejen las relaciones entre los cuerpos geométricos y sus representaciones planas (Gutiérrez, 1998).

### *Repetición de un modelo*

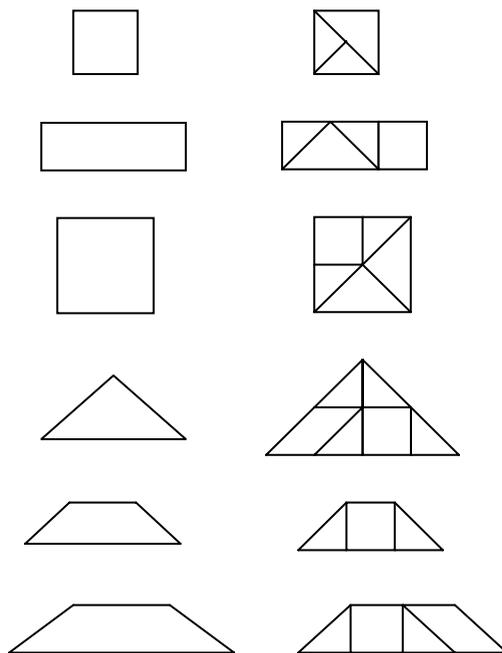
Esta tarea trabajada por los investigadores americanos Brown y Wheatley (1990) es excelente para estudiar la *calidad* de las imágenes de los alumnos.

Consistió en lo siguiente:

Se les facilitó a los estudiantes las siete piezas del Tangram Chino. Este material consta de:

- dos triángulos grandes (**TG**),
- dos triángulos chicos (**TCH**),
- un triángulo mediano (**TM**),
- un cuadrado (**C**) y
- un paralelogramo o romboide (**P**)

Se les mostraron los modelos que aparecen en la parte derecha de la figura siguiente en un corto tiempo. Se les pedía que los repitiesen utilizando el contorno proporcionado (parte izquierda de la figura) y las piezas del Tangram. Se les concedía la posibilidad de mirar el modelo las veces que lo pidieran.



Esta actividad demandó construir una imagen desde la memoria y su “transformación dinámica”, en tanto que la repetición de un modelo consistió en la construcción de una “imagen estática” y su réplica a través de un dibujo. Se avanzó respecto de la visualización para trabajar la *traducción* y *determinación*. (Pallascio). Se orientó a lograr comunicar y organizar las ideas; lo que habilitó el camino para lograr clasificaciones. Luego, se les pidió a los alumnos que trataran de descubrir regularidades respecto de los elementos del poliedro: caras, vértices, aristas, etc. El descubrimiento de regularidades permitiría elaborar distintos criterios de *clasificación* de poliedros. (Pallascio)

## CONCLUSIONES

En la experiencia llevada a cabo, se considera que se alcanzaron los objetivos propuestos, ya que se aplicó el razonamiento intuitivo y la imaginación. El método que sirvió de guía para estas actividades es el de resolución de problemas. Los alumnos se entusiasmaron con el trabajo, pues les permitió interactuar entre ellos con diversos materiales y reflexionar sobre lo que lograban visualizar y construir y manejar las estrategias de *ensayo y error*.

Se tuvo la posibilidad de observar la calidad de las imágenes de los estudiantes, a través de las construcciones de cuerpos geométricos. Estas tareas plantearon situaciones problemáticas en las cuales los alumnos investigaron, utilizaron conceptos y relaciones, partiendo de la experiencia

directa con el dibujo y las construcciones, y llegaron a rigORIZAR sus representaciones, su lenguaje, sus inferencias y sus deducciones.

Los resultados obtenidos muestran evidencias de un acercamiento a soluciones que permitan a los alumnos lograr estos objetivos y, respecto de los profesores, que comprendan la necesidad de enseñar geometría tridimensional basándose en aquellos conceptos que lleven al alumno a manejarse correctamente con los conocimientos matemáticos, evitando en lo posible las dificultades actuales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bishop, A. J. (1980). Spatial habilités and mathematics education – A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.
- Brown, D. L.; Wheatley, G. H. (1990). The Role of Imagery in Mathematical reasoning. *Proceedings of the Fourteenth International Group for the Psychology of Mathematics Education*. México: Oaxtepec.
- Carrión Miranda, V. (2000). Álgebra de funciones mediante procesos de visualización. *En Memorias IX Seminario nacional. Microcomputadoras en la educación matemática*. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. Universidad Latina de América. México. [En línea] Disponible en:  
<http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/carrion/carrion.htm>.
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.
- Gutiérrez A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la Geometría espacial. *Revista Ema*. Vol. 3, N° 3, 193-220.
- Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1&2), 29-34.
- Núñez Urías, J. (2002). *Visualización y matemáticas*. Disponible en:  
<http://www.ipicyt.edu.mx>.
- Presmeg, N. C. (1985). *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation*. Unpublished Ph. D. Dissertation. University of Cambridge. England.
- Presmeg, N. C. (1997a). Generalization using imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres. (299-312).
- Presmeg, N. C. (1997b). Reasoning With Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres. (267-279)
- Verschaffel, L.; De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. En A. Bishop y otros. (Ed.), *International handbook of Mathematics education*. London: Kluwer Academic Publishers. 99-137.