ENFOQUES Y DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Yuri Morales López
Escuela de Matemática
Universidad Nacional (Costa Rica)
ymorales@una.ac.cr

RESUMEN

El propósito de este trabajo es brindar una perspectiva sobre los entornos y enfoques asociados a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y establecen ciertos argumentos sobre la relación entre estos enfoques y las posibles problemáticas relacionadas al aprendizaje de este tema. Para esto, en este artículo se muestra el análisis de la información obtenida de cuatro grupos de estudiantes durante el un periodo del 2009 de los cursos de Ecuaciones Diferenciales de tres carreras en diferentes universidades de Costa Rica.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, enseñanza, dificultades, enfoques.

INTRODUCCIÓN

La educación matemática atraviesa por una serie de situaciones y factores nunca antes vividos en nuestra historia. Aunado a esto, el binomio educación – sociedad se ha encargado de plantear una serie de necesidades para los futuros ciudadanos y, en especial, a los futuros profesionales.

Frente al reto que conlleva la educación, se encuentra, también, la necesidad de concretar ciertas iniciativas destinadas a la modificación y actualización de los currículos de las carreras universitarias; en este sentido, muchos programas aún adolecen que temas como la tecnología como herramienta de trabajo y su posible valor didáctico, la integración con otras disciplinas y los ejes transversales, sigan siendo buenas intenciones y rellenos en muchos de los currículos actuales.

Esta problemática aparece en gran cantidad de carreras y, en particular, donde de una forma u otra, está involucrada la educación en Matemática. No obstante, el mayor impacto puede recaer en disciplinas como la economía, ingenierías, química, entre otras, que cuentan con créditos para cursos como Cálculo y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

En términos de contenidos es claro que los cursos, por ejemplo, en ingeniería no son los mismos, ni poseen la misma finalidad, ni profundidad que los cursos para formadores de docentes, por esto, una de las principales incertidumbres en la práctica es si el docente aplica el mismo discurso, las mismas técnicas e inclusive en muchos casos, los mismos ejemplos, indiferentemente del curso o carrera que se imparta. Este argumento puede encontrar mayor sentido en la actividad de aula como tal, pues, en general se aplica el mismo enfoque y tratamiento a las ecuaciones diferenciales: la resolución algebraica de las mismas.

Otro factor que se encuentra en el centro de esta discusión es el relacionado a las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, pues guardan estrecha relación con el enfoque utilizado en el salón de clase y despierta grandes interrogantes sobre su uso como recurso para el aprendizaje de este tema. Además, si a esto se le suma la importancia de la comprensión de la modelización como actividad de aula, la comprensión de las aplicaciones comunes de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y, aplicaciones más sofisticadas en ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior, entonces es justo, al menos, afirmar que la tarea de conocer y desentrañar esta problemática no es sencilla.

Por estas razones, el propósito de este trabajo es brindar una perspectiva sobre los entornos asociados a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y establecer ciertos argumentos sobre la relación entre estos enfoques y las posibles problemáticas relacionadas al aprendizaje de este tema. Para esto, en este artículo se muestra el análisis de la información obtenida de 4 grupos de estudiantes durante el I periodo del 2009 de los cursos de EDO de 3 carreras distintas en diferentes universidades de Costa Rica.

MARCO TEÓRICO

En este apartado se analiza las perspectivas sobre el estado del arte y los distintos enfoques con los que cuenta la enseñanza en esta área.

ENFOQUES EN LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Para abordar este apartado, es necesario analizar las distintas contribuciones vinculadas a las formas en que se conciben las ecuaciones diferenciales y su aprendizaje; este proceso de enseñanza de las EDO ha planteado retos y ha marcado cuestionamientos didácticos casi desde su origen. En un trabajo reciente, Miller y Upton (2008) plantean, lo que denominan *las tres paradojas* en la enseñanza de las EDO; en éstas, los autores muestran una estrecha conexión entre lo que institucionalmente se comprende como una enseñanza adecuada de este tema y lo que ocurre en el aula.

Así, Miller y Upton (2008) se cuestionan cómo las operaciones y el contenido en ecuaciones diferenciales puede ser traída a la vida real de forma clara preservando la generalidad que engloba la matemática (*facilidad de transferencia*). En segundo lugar, se cuestionan el uso excesivo de ejemplos teóricos y lenguaje formal cuando se espera que el docente sea capaz de comprender la teoría y pueda contextualizarla (*ejemplos versus teoría*); por último, el uso de algoritmos y simbología puede contener mucho significado para el docente pero esto lleva a operaciones procedimentales sin significado para el estudiante, a diferencia de las representaciones gráficas que ofrecen mejor comprensión conceptual (*algoritmo versus conceptos*).

Otro elemento esencial para poder comprender cómo se enseñan hoy las ecuaciones diferenciales es la forma en que se trataron de resolver desde su concepción. La derivada como hoy se le conoce tuvo que esperar el nacimiento y madurez del concepto de función y de límite; como lo mencionan, Nápoles, González, Genes, Basabilbaso y Brundo (2004), esto fue la razón principal por la que el tratamiento, desde su nacimiento hasta antes de Cauchy, fuera mediante cocientes de diferenciales. Al comprender la derivada como una división de diferenciales, las técnicas algebraicas fueron extremadamente cómodas en términos de resolución de ecuaciones (*Figura 1*).

$$\boxed{x = \frac{dy}{dx} \rightarrow xdx = dy \rightarrow \int xdx = \int dy \rightarrow \frac{x^2}{2} + c = y}$$

Figura 1. Primera comprensión de la derivada como cociente de diferenciales

Claro está que tratar estos entes (aún relativamente extraños) como ecuaciones fue de gran ventaja para el desarrollo de conocimiento en esta área. Inclusive, Nápoles, González, Genes, Basabilbaso, y Brundo (2004) afirman que pudo ser visto como una fuente, didácticamente "*apetitosa*".

Irónicamente, este método posee hoy, un gran punto débil; éste presupone que los estudiantes tienen un manejo fluido del álgebra y el cálculo; parte del fracaso en el método tradicional radica en que éste hereda los fracasos en la visión del Cálculo como una extensión del álgebra preuniversitaria y, encima, que los estudiantes arrastran serias dificultades en temas como racionalización, simplificación, factorización, conjuntos, resolución de ecuaciones, entre otros, a lo largo de toda su carrera. Por ejemplo, Moreno (2005), afirma que no se concreta la comprensión del concepto aunque enseñamos derivadas e integrales, esto porque, entre otras cosas, basamos la evaluación en el mismo esquema algebraico.

En relación con lo anterior, no solo se cuenta con el problema del manejo del álgebra, sino que, el tratamiento algebraico ofrece poca información. A este respecto, dentro de la literatura e investigaciones consultadas, se encuentra, por ejemplo, un trabajo de Camacho, Perdomo y Santos-Trigo (2009) donde se determinó que,

> *Muchos de los estudiantes concibieron el concepto de ecuación diferencial como una entidad matemática aislada desconectada de otras nociones que ellos conocen. Para los estudiantes, resolver una ecuación diferencial es una cuestión meramente de buscar una expresión algebraica explícita o implícita de la solución. Así, ellos consideraron que la información relevante suministrada en una ecuación diferencial, fue la información que podría conducirlos a aplicar algún método para encontrar la solución*[1]. (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009, p.131)

1 Traducción del autor.

Lo anterior coincide con el trabajo de Moreno y Azcárate (1997) donde, desde la perspectiva del docente, se considera que el estudiante debe recibir formalismos matemáticos sin importar mucho su utilidad, entre más materia se abarque, más conocimiento se genera y, por último, que la forma matemáticamente aceptable de resolver una ecuación diferencial es mediante el método algebraico. En esta misma línea, Moreno y Azcárate (2003) afirman que los profesores aducen que el bajo nivel de los estudiantes los lleva a decidir no ofrecer ningún otro enfoque que los conduzca a ir más allá de memorizar y mecanizar.

Cuando se cuenta con todas las condiciones que se han mencionado, el problema, según Kwon (2002), ya no se soluciona cambiando la bibliografía del curso de EDO sino que transciende al método, la forma de trabajo, la forma en que se interactúa (profesor – alumno) y la forma en que se evalúa.

Un cambio de estas proporciones fue, a saber, lo ocurrido durante la reforma del Cálculo en Estados Unidos en 1980 y 1990 donde, como lo mencionan Tall y Mejía (2004), los grandes avances en tecnología fueron los detonadores de nuevas y revolucionarias propuestas para la enseñanza de este tema. En primera instancia se abarcó los algoritmos numéricos con el uso de las computadoras personales y, posteriormente, dio principio el enfoque basado en gráficas, aunque la calidad inicial era pobre; fiel reflejo de esta reforma fue la literatura posterior, y en particular, el libro de Cálculo del consorcio de Harvard, donde quedó explícito que el corazón de este movimiento era la "regla de tres". Ésta regla se fundamenta en que la generación de ideas y construcción de conocimiento alrededor del Cálculo debía partir del continuo cuestionamiento y encuentro entre un enfoque algebraico, un enfoque geométrico y otro numérico (McGee y Planell 2003; Moreno, 2005). Se señaló este evento histórico pues al reformarse la manera en que se comprendía el Cálculo también se reformó la manera en que se abordó las Ecuaciones Diferenciales. Estas otras posturas respecto a la forma en que se puede dirigir el análisis de la gran cantidad de información que posee una ecuación diferencial respaldan un acercamiento a las soluciones de las EDO de una manera no tan directa como se pretende al simplificar este tema al manejo algebraico de la ecuación.

Para Arslan, Chaachoua y Laborde (2004), estos enfoques se tradujeron dentro de las Ecuaciones Diferenciales como, el algebraico, donde es posible conocer la solución exacta que satisface la ecuación en términos de primitivas; el numérico, donde se calculan valores cercanos y usando, en algunos casos, interpolación y métodos como Euler y Runge – Kutta; por último, el método de observación o teoría cualitativa de Poincaré el cual se basa en recuperar información sin resolver la ecuación. Este método puede ser considerado la primera versión del método geométrico al que se ha hecho referencia anteriormente.

En el próximo apartado se amplían algunas de las problemáticas ya señaladas en el método algebraico y se señalan algunas problemáticas relacionadas a los otros enfoques.

PROBLEMÁTICAS RELACIONADAS A LOS ENFOQUES

Sobre el método geométrico

El método geométrico se basa en el ploteo de pendientes; éste envuelve una serie de dificultades porque, generalmente no se estimula en secundaria ni en los cursos universitarios previos, el análisis de situaciones expresadas mediante curvas o funciones; junto a esta problemática, Morales y Salas (2009) plantean que el uso excesivo del modelo algebraico ha causado reticencia para interpretar gráficas, inclusive, los estudiantes encuentran grandes dificultades para interpretar el campo de direcciones de $y' = y$ aunque conocen las funciones exponenciales desde secundaria.

Al mismo tiempo, como lo afirman Tall y West (1992), al final de un curso basado en el modelo algebraico el estudiante comúnmente cree que si no es posible hallar una solución algebraica a una EDO es porque no tiene soluciones del todo. Para remediar esto, la tecnología puede ser un elemento de gran valor.

Las herramientas tecnológicas principales relacionadas a este enfoque son los programas para construcción de campos direccionales como Mathematica y algunos Software de Geometría Dinámica (SGD) en lo que se ha llamado la "*instrumentalización de los escenarios geométricos y numéricos*" (Nápoles y Negrón, 2002, p. 48). Lo anterior involucra el manejo de estas herramientas como una de sus posibles dificultades.

Aunque se ha señalado que este manejo puede ser una dificultad, es necesario precisar que en este trabajo, se considera fundamental el aprendizaje relacionado a este tipo de herramientas, tanto para comprender las Ecuaciones Diferenciales así como para contar con instrumentos útiles para retroalimentar su área, por ejemplo, con investigación; lo que se debe evitar es no proveer al estudiante de un acompañamiento y tiempo para aprender a usar los software (sea en el curso propio de EDO o en otros anteriores) y no dar por verdadero que el estudiante es el único responsable.

A este respecto, autores como Lu (1995) citado por Kwon (2002) consideran que la principal razón que puede existir para usar una computadora en un curso de EDO es la interpretación geométrica de posibles soluciones, pues a través de software es posible ayudar al estudiante a comprender conceptos de problemas de valores iniciales hasta sistemas dinámicos. Para Jovanoski y McIntyre (2000) la ventaja del software (en una calculadora gráfica) es la rapidez con la que se puede graficar un campo direccional. Tal es la problemática en torno al uso de las tecnologías en el curso de EDO que, según Morales y Salas (2009),

> *Aunque existan cursos previos sobre uso de la tecnología, esto no puede asegurar al docente encargado de este curso que el estudiante ha utilizado la herramienta para la explicación y resolución de problemas ni para la modelización de fenómenos en los cursos fundamentales de Geometría, Cálculo, entre otros.* (Morales y Salas, 2009, p.13)

Como consecuencia de estos argumentos, la principal dificultad con la que cuenta este método es, como hipótesis, la falta de interpretación de funciones (su gráfico, sus valores y sus tendencias) como respuestas a la modelación de fenómenos, y el uso de la geometría analítica como modelo útil para relacionar el álgebra y la geometría, desde que se cursa la secundaria y por supuesto, en los ciclos universitarios previos al curso de EDO (para profundizar sobre otras dificultades respecto a la interpretación gráfica ver Beare,1994)

Sobre el método numérico

La principal característica que envuelve al método basado en el estudio numérico de las ecuaciones diferenciales es que, a diferencia del método geométrico, éste ha sido utilizado y aceptado desde ya hace varios años (inclusive antes de la reforma del cálculo); de esta manera, este método también contó durante mucho tiempo con la influencia y los niveles de complejidad definidos previo a la Reforma.

Por supuesto, como se mencionó, la evolución y aumento en las capacidades de cómputo de las PC fue un factor primordial para que se pusiera en práctica todos los algoritmos creados siglos atrás. Cuando las PC carecían de esta capacidad, los cursos de EDO comúnmente enfatizaban (respecto a los métodos numéricos) al estudio de los algoritmos formales pero, con tales antecedentes, los métodos numéricos fueron poco prácticos para resolver problemas reales; inclusive, como lo menciona Balderas (2000), en el mejor de los escenarios los cursos tocan este enfoque.

Actualmente, los cursos que contienen los Métodos Numéricos como un tema cuentan con escenarios basados en herramientas computacionales propietarias y libres para el acompañamiento durante la comprensión de los algoritmos y, en algunos casos, un escenario donde se contempla el uso de software que requiere programación. Se examinan ambas situaciones pues cada uno de ellos posee distintos potenciales, características y, por supuesto, dificultades.

En el primer escenario, se plantea el uso de herramientas donde están programados todos los algoritmos y el estudiante utiliza estas herramientas con el objetivo de obtener una gran cantidad de iteraciones y aproximaciones. En éste, la mayor problemática radica en reconocer si el algoritmo fue realmente comprendido o si el uso de software oculta la verdadera comprensión del mismo. En el segundo escenario se utiliza software orientados a la Matemática (MathLab o Mathematica) o software de programación (C++ o Java) para traducir el algoritmo en rutinas computacionales. Con este enfoque la principal problemática está relacionada al aprendizaje y comprensión de la programación y el lenguaje.

Además de esto, ambos escenarios cuentan con una problemática común; como mencionan Chapra y Canale (1990), el estudio de los métodos numéricos empiezan, comúnmente, al final de las carreras lo cual provoca que cursos como cálculo nunca enfaticen en este tema siendo este una poderosa herramienta para enfrentar y resolver problemas, y para que el estudiante construya un verdadero entendimiento de lo que significa Matemáticas. Autores como Miranda y Biscaia (2008), afirman que si los Métodos Numéricos son usados para analizar resultados y establecer posibles soluciones, entonces podríamos encontrar en estos una fuente útil para estimular competencias en la resolución de problemas.

No existe, en general, un curso en los programas tradicionales con mayor idoneidad que el de EDO (junto a métodos numéricos) para concretar procesos de modelado de fenómenos antes iniciados. Esto es, si se pretende que el curso de Ecuaciones Diferenciales sea el primero donde se estudie el análisis numérico para la solución de problemas, y además, el modelado de fenómenos, entonces se está destinado, en el mejor de los casos, a mostrar aplicaciones que pudieron ser desarrolladas en los cursos preuniversitarios o, a lo sumo, en cálculo I y, en el peor de los escenarios, se estará destinado a reincidir sobre el método algebraico como única herramienta.

Dadas estas consideraciones, en el próximo apartado se describe la forma en que se diseñó esta investigación y posteriormente, se examina la información en el apartado de análisis.

EL MÉTODO

Este trabajo se enmarca en un entorno en el cual se ha advertido la complejidad del panorama educativo como un proceso difícil de comprender pero que despierta gran interés. No es el objetivo ni está dentro de los alcances de este trabajo, establecer relaciones causa – efecto, ni comprobar la validez de las posibles variables que engloban el proceso como tal, sino más bien, se estableció como objetivo principal de esta investigación el conocer cuáles son los posibles enfoques para el aprendizaje de las EDO, así como las dificultades con las que cuentan los estudiantes de estos cursos en distintas carreras. Por esto, este trabajo fue una investigación descriptiva, sincronizada y con un enfoque cualitativo – cuantitativo y se realizó durante el I semestre del 2009. Éste se enfocó en una primera etapa de descripción y otra etapa basada en un estudio de correlación apoyado en el modelo de Rho de Spearman, aunque no se desea que este trabajo sea catalogado como una investigación de índole correlacional.

La muestra fue de 54 estudiantes (22% mujeres) cuya edad promedio está entre los 21 y 22 años; estás personas corresponden a cuatro cursos de 3 distintas carreras. La selección de la muestra fue por conveniencia en el sentido que se seleccionó a los estudiantes que asistieron hasta la última semana de clase; la razón por la que se decidió esto fue porque los estudiantes que no habían culminado el curso podrían no poseer el mejor criterio para definir si se utilizó uno u otro método.

Instrumento de recolección de datos e indicadores

El instrumento contó con cuatro partes: 1. Personal, 2. Sobre la preparación previa, 3. Información sobre el curso de EDO y 4. Sobre las dificultades; las partes 2 y 3 comprendieron escalas Likert (1: totalmente en desacuerdo, 2: en desacuerdo, 3: ni de acuerdo ni en desacuerdo, 4: de acuerdo, 5: totalmente de acuerdo) y la última, una pregunta abierta sobre dificultades. Las escalas Lickert fueron diseñadas para recolectar la percepción en distintos indicadores.

Indicadores

a) Sobre la preparación previa al curso.
    1. Se trabajó en la resolución algebraica de los temas.
    2. Se trabajó en resolución de problemas analizando gráfica.
    3. Se integró otras disciplinas para la contextualización de los temas.

b) Sobre el curso de EDO.
    4. El objetivo principal de este curso fue saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta.
    5. Importancia de observar gráficas e interpretar su comportamiento en este curso.
    6. Importancia de aplicar métodos numéricos.
    7. Importancia de conocer cómo se aplican las EDO.
    8. Importancia de estudiar fenómenos y tratar de interpretarlos.

Ahora bien, puesto que el trabajo tomó en cuenta rangos para los cuales las pruebas son no paramétricas, fue necesario utilizar un coeficiente de correlación como el Rho de Spearman. Además, Según Weimer (2003) este coeficiente es idóneo pues no es posible asegurar que los datos obtenidos en este trabajo cumplen el supuesto de normalidad y además, el objetivo principal de usar éste es porque se desea encontrar un nivel de intensidad en las relaciones de los indicadores en el instrumento. A continuación se detalla el análisis de los indicadores más relevantes.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En esta sección el trabajo se enfoca al análisis de las respuestas de los estudiantes en los ítems de las escalas Likert, de tal manera que, inicialmente se muestran los descriptivos de cada indicador; en la segunda parte de este apartado se muestran las relaciones encontradas entre los indicadores y su interpretación.

Cuando se planteó esta investigación sobre el aprendizaje de las EDO se consideró relevante tomar en cuenta la formación previa en temas relacionados con el mismo. Así, el primer indicador que se formuló fue conocer su criterio respecto a si su formación previa había estado basada en la resolución algebraica de los temas; la opinión de los encuestados tuvo una media entre 3 y 4 con una desviación típica de 0.925 lo cual indica que la respuesta fue consistente entre los participantes.

Dentro de la información analizada se destaca que solamente el 6% de los estudiantes expresaron estar en desacuerdo y completamente en desacuerdo en que su formación previa al curso se basó en la resolución algebraica de los temas; este indicador coincide con el enfoque mencionado sobre el Cálculo como una extensión del algebra. A diferencia del caso anterior, cuando se preguntó respecto a que si en su formación previa se trabajó con la integración de otras disciplinas para contextualizar los temas, se obtuvo una variabilidad muy alta; aún así, cabe destacar que solamente el 2% expresó estar completamente de acuerdo con esta afirmación.

Pasando a los indicadores del curso de EDO, se determinó que los participantes consideraron que este curso se trata de saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta con una media de 3.98 y una variabilidad de 0.789; cabe señalar que el cuartil 3 fue de 5 y la mediana de 4, por lo tanto se puede afirmar que la variabilidad de la respuesta es muy baja. Entre los datos se obtuvo que 70% estuvieron entre de acuerdo y completamente de acuerdo respecto al papel del álgebra. Se distingue entre estos datos, el hecho que nadie estuvo en desacuerdo ni completamente en desacuerdo con esta afirmación, como se muestra en el *gráfico 1*.

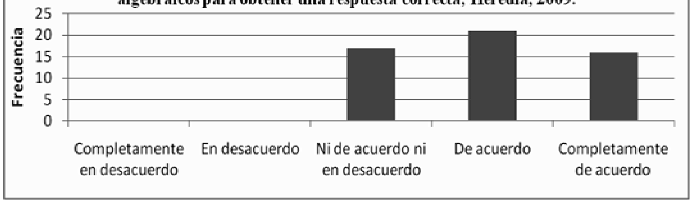

Gráfico 1
Distribución de frecuencias sobre la opinión de los estudiantes de cursos de EDO respecto a que este curso se trata de saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta; Heredia, 2009.

De la misma forma, aunque el indicador sobre la importancia de ver gráficas e interpretar su comportamiento tuvo variabilidad alta, se destaca que únicamente el 11% de los participantes indicó estar de acuerdo y completamente de acuerdo con esta afirmación. A continuación se ofrece al lector otros descriptivos relevantes hallados en el análisis del instrumento:

- 22% de los participantes de esta investigación está entre desacuerdo y completamente desacuerdo con la importancia de los métodos numéricos en el curso de EDO.
- Solo 26% de los participantes están entre desacuerdo y completamente desacuerdo con la importancia de conocer cómo se aplican las EDO.
- Solo 20% de los participantes están entre de acuerdo y completamente de acuerdo con la importancia de estudiar fenómenos y tratar de interpretarlos en el curso de EDO.

Correlaciones encontradas

Como se mencionó en el apartado metodológico, el objetivo de este trabajo fue, principalmente descriptivo; No obstante, cuando se aplicó el coeficiente Rho, se encontró una relación entre varios indicadores.

Entre los vínculos se distingue una relación significativa entre los estudiantes que expresaron haber tenido una formación previa basada en la resolución algebraica de los temas y los estudiantes que consideraron que el curso giró en torno a saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta y, al mismo tiempo, que consideraron que es importante observar gráficas e interpretar su comportamiento, aplicar métodos numéricos y conocer cómo se aplican las EDO, como se muestra en la *tabla 1*.

Rho de Spearman	Saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta	Ver gráficas e interpretar su comportamiento	Aplicar métodos numéricos	Conocer cómo se aplican las EDO
Se trabajó en la resolución algebraica de los temas.	.582**[2] Sig. (bilateral).000	.367** Sig.(bilateral).006	.348** Sig.(bilateral).010	.332* Sig.(bilateral).014

Tabla 1

Esto indica que aunque el estudiante tenga una formación previa de corte algebraico, éste consideró de suma importancia los distintos escenarios (algebraico, geométrico y numérico) para el aprendizaje de las EDO; aún cuando el curso estuvo centrado en resolver problemas algebraicamente.

Por otro lado, si se excluye la formación previa, se logró determinar una relación significativa entre saber observar e interpretar gráficas con los otros cuatro indicadores respecto al curso como tal, como se muestra en la *tabla 2*.

Rho de Spearman	Saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta	Aplicar métodos numéricos	Conocer cómo se aplican las EDO	Estudiar fenómenos y tratar de interpretarlos
Ver gráficas e interpretar su comportamiento	.465** Sig. (bilateral).000	.281* Sig. (bilateral).040	.511** Sig.(bilateral).000	.479** Sig.(bilateral).000

Tabla 2

Esto significa que, aunque se está de acuerdo con que el objetivo del curso fue resolver problemas algebraicamente, con el apoyo de la visualización gráfica y la interpretación es posible comprender la aplicación de los métodos numéricos, conocer para qué sirven las EDO y estudiar fenómenos y tratar de interpretarlos.

Por otra parte, aunque se encontraron relaciones significativas entre otros indicadores, también se desea señalar que, como se esperaba, no existe una relación significativa entre saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta y conocer cómo se aplican las EDO pero, sí surgió una interesante relación significativa entre saber cómo se aplican las EDO y la visualización gráfica y su interpretación, la aplicación de los métodos numéricos, y estudiar fenómenos y tratar de interpretarlos; basta señalar que estos resultados concuerdan perfectamente con los fundamentos considerados en la literatura internacional.

[2] *. La correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral).
**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Para acabar este apartado es necesario aclarar que no se documentó en este artículo las respuestas a la pregunta abierta sobre dificultades pues se considera que estas requieren otro tipo de tratamiento en su análisis y esto se espera publicar en un nuevo trabajo junto a otros hallazgos relacionados.

CONCLUSIONES

Como producto de este trabajo se ha logrado determinar una serie de relaciones significativas entre varios indicadores que, a criterio del autor, son necesarias tomar en cuenta para lograr un aprendizaje más significativo en esta área. Además, la construcción y aplicación del instrumento empleado a los estudiantes, ha reflejado la necesidad de continuar esta investigación con el propósito de sistematizar las experiencias y opiniones, pues ofrecen una valiosa fuente de información, no solo respecto a variables, sino, en indicadores relacionados con las prácticas de aula, costumbres y, principalmente motivaciones.

Se ha determinado que aunque la mayoría de los estudiantes opinaron que el curso de ecuaciones diferenciales se trata de saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta y que su formación previa se basó en aprender álgebra, se puede interpretar que estos consideran que si se trabajan los tres enfoques cuando se desarrolla el curso existe más oportunidad de conocer cuál es el sentido de estudiar las EDO.

Como se indicó, en este trabajo se logró determinar varias relaciones pero, por encima de todas se destaca que la visualización gráfica y su interpretación fue el indicador que mostró alta relación con todos los otros y, aún más, este indicador parece ser el eje común entre la opinión de los estudiantes, respecto a la forma en que mejor comprenderían los otros dos enfoques y los fenómenos que se describen en este tipo de curso.

Para finalizar, aunque se ha aportado evidencia respecto a los descriptivos de los indicadores expresados por los estudiantes y sobre las correlaciones entre los indicadores, queda mucho trabajo pendiente, principalmente respecto al conocimiento sobre la didáctica de esta disciplina y sobre las experiencias basadas en estos tres enfoques.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arslan, S., Chaachoua, H., & Laborde, C.(2004). Reflections on the teaching of differential equations: what effects of a teaching to algebraic dominance?. The Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education, ICME-10, Copenhagen, Denmark.

Balderas, A. (2000). Integration of CAS in the Didactics of Differential Equations. The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference: New Ideas in Mathematics Education. Australia

Beare, R. (1994). An Investigation of Different Approaches to Using a Graphical Spreadsheet. Proceeding of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, PME XVIII, Volume 2, pp. 48-55

Camacho, M., Perdomo, J., & Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. PNA, 3(3), 123-133.

Chapra, S. y Canale, R. (1990). Métodos numéricos para Ingenieros con aplicaciones en computadoras personales. México: McGraw Hill.

Jovanoski, Z., & McIntyre, P. (2000). Solving First order Diferential equations using a graphics calculator. Australian Mathematical Society Gazette, 27 (4), 168–172.

Kwon, O. (2002). Conceptualizing the Realistic Mathematics Education Approach in the Teaching and Learning of Ordinary Differential Equations. (ERIC Document Reproduction Service No. ED472048) Retrieved August 18, 2009, from ERIC database.

McGee, D. y Planell, M. (2003). Un Suplemento para un texto de Cálculo. Educación Matemática, abril, año/vol. 15(001), 51-65.

Miller, H., & Upton, D. (2008). Computer Manipulatives in an Ordinary Differential Equations Course: Development, Implementation, and Assessment. Journal of Science Education and Technology, 17(2), 124-137.

Miranda, J., & Biscaia, H. (2008). A Problem-Based Learning Approach to Numerical Methods: Interface Behaviour in Glass FRP Strips Bonded to Reinforced Concrete Beams. International Conference on Engineering Education, ICEE 2008.

Morales, Y., y Salas, O. (Aceptado, 2009). Incorporación de la Tecnología para la Enseñanza y Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. UCR – UNA –UNED.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Moreno, M., y Azcárate, C. (1997). Concepciones de los Profesores sobre la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a Estudiantes de Química y Biología. Estudio de Casos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (1)

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza De Las Ciencias*, 21 (2), 265-280.

Nápoles, J., González, A., Genes F., Basabilbaso, F., & Brundo J. (2004). El Enfoque Histórico Problémico en la Enseñanza de la Matemática para Ciencias Técnicas: El Caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Revista Acta Scientae, 6(2), 41-59.

Nápoles, J. y Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas. 3(2), 33-57.

Tall, D. O. & Mejia P. (2004). Reflecting on Post-Calculus Reform. Topic Group TSG12, Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education, ICME-10, Copenhagen, Denmark.

Tall, D., & West, B. (1992). Graphic Insight into Mathematical Concepts. The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching, B. Cornu,.& A. Ralston (Ed.), UNESCO, Paris, 117–123.

Weimer, R. (2003). Estadística. México: Compañía Editorial Continental.