ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN. RESOLUCIÓN REDUCIÉNDOLA A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE PRIMER ORDEN

Miguel Angel Nastri, Oscar Sardella
miguelangelnastri@yahoo.com.ar , oscarsardella@yahoo.com.ar

RESUMEN

En algunos casos de resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables, es posible resolver la misma, reduciendo el problema a la solución de ecuaciones de primer orden.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, orden superior, aplicación económica.

DESARROLLO

Así una ecuación de la forma F $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}; \frac{dy}{dx} \right)$ = 0

Mediante una sustitución de p = $\frac{dy}{dx}$, en forma semejante a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se reduce la ecuación a la forma F $\left(\frac{dp}{dx}; p \right)$ = 0; que es una ecuación de primer orden, de la cual puede despejarse “p”, resultando p = f (x;c) y el valor “y” puede obtenerse de inmediato dado que p = $\frac{dy}{dx}$

APLICACIÓN DE LA RESOLUCIÓN

Como aplicación de la resolución de ecuaciones de segundo orden reduciéndola a una ecuación de primer orden, plantearemos un problema de dinámica económica, considerando un sistema como dinámico cuando su comportamiento en función del tiempo se halla determinado por ecuaciones funcionales.

En el caso de que la variable tiempo tenga un comportamiento continuo, el modelo dinámico continuo se resuelve mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

En un modelo de mercado con expectativas de precios, los compradores y/o vendedores basan su conducta no sólo en el precio corriente, sino en la tendencia temporal del precio.

Expresando: y: precio
x: tiempo

Será: y = f(x); el precio en función del tiempo

La tendencia temporal del precio se establece a través de las derivadas primeras y segundas del precio en función del tiempo

$$y' = \frac{df}{dx} \quad ; \quad y'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Si la cantidad demandada es: $Q_d = 24 - 8y^2 - 2(y')^2 + y.y''$

Si la cantidad ofertada es: $Q_s = -24 + 4\,y^2$

La condición de equilibrio es: $Q_d = Q_s$

$$24 - 8y^2 - 2(y')^2 + y.y'' = -24 + 4\,y^2$$

$$y.y'' - 2(y')^2 - 12y^2 = -48$$

Resolución de la ecuación diferencial ordinaria incompleta u homogénea:

$$y.y'' - 2(y')^2 - 12y^2 = 0 \qquad \text{I)}$$

Haciendo: $p = \dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\,p$

Reemplazando en I), queda: $p\,.\,y\dfrac{dp}{dy} - 2p^2 - 12y^2 = 0$

Haciendo: $p = v\,.\,y$; despejando $\dfrac{dp}{dy}$; resulta

$$\frac{dp}{dy} = \frac{2p^2 + 12y^2}{p \cdot y} \quad ; \quad v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v^2 y^2 + 12y^2}{p \cdot y^2} = \frac{2v^2 + 12}{p}$$

Operando a fin de despejar $dy_{/y}$:

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v^2 + 12 - v^2}{v} \quad ; \quad y\frac{dv}{dy} = \frac{v^2 + 12}{v}$$

Obtenemos: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{v.dv}{v^2 + 12}$ II)

Integrando II), resulta:

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(v^2 + 12) + \ln c_1$$

aplicando propiedades de logaritmos, queda:

$$y = c_1\sqrt{v^2+12} \qquad \text{III)}$$

siendo: $p = v \cdot y$; $v = \dfrac{p}{y}$; $v^2 = \dfrac{p^2}{y^2}$

Reemplazando v^2 en III) :

$$y = c_1\sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 12} \text{ , para despejar p}$$

$$y^2 = c_1^2\left(\frac{p^2}{y^2} + 12\right) \quad ; \quad \frac{y^2}{c_1^2} = \frac{p^2}{y^2} + 12 \quad ; \quad p^2 = \left(\frac{y^2}{c_1^2} - 12\right)y^2$$

la expresión de p: $p = y\sqrt{\dfrac{y^2}{c_1^2} - 12}$

haciendo: $-12\, c_1^2 = c_2^2$; y despejando dx

$$p = \frac{y}{c_1}\sqrt{y^2 + c_2^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{c_1}\sqrt{y^2 + c_2^2}$$

determinamos dx:. $dx = \dfrac{dy}{\pm\dfrac{y}{c_1}\sqrt{y^2 + c_2^2}}$ IV)

Integrando IV), resulta: $x + c_2 = \pm\ln\dfrac{c_3 + \sqrt{y^2 + c_2^2}}{y}$

Elevando ambos miembros al cuadrado.

$$(x + c_2)^2 = \left[\ln \frac{c_3 + \sqrt{y^2 + c_2{}^2}}{y} \right]^2$$

Considerando la expresión logarítmica del argumento cosecante hiperbólico, siguiente:

$$\text{arg cosech } y = \ln \frac{1 \pm \sqrt{y^2 + 1}}{y} \qquad \begin{array}{ll} + \text{ si} & y > 0 \\ - \text{ si} & y < 0 \end{array}$$

Reemplazando la expresión logarítmica, por el argumento cosecante hiperbólico, resulta:

$$[x + c_2]^2 - \left[\arg\cos ech\left(\frac{y}{c^2}\right) \right]^2 = 0$$

despejando "y" de esta ecuación, tenemos la solución de la ecuación diferencial ordinaria incompleta u homogénea

$$x + c_2 = \arg\cos ech\left(\frac{y}{c_2}\right)$$

$$\frac{y}{c_2} = \cos ech(x + c_2) = \frac{2}{senh(x + c_2)}$$

$$\frac{y}{c_2} = \frac{2}{senh(x + c_2)} ; \frac{y}{c_2} = \frac{2}{e^{x+c_2} - e^{-x-c_2}}$$

$$y_H = \frac{2c_2}{e^{x+c_2} - e^{-x-c_2}}$$

Para hallar la integral particular como solución de la ecuación diferencial ordinaria completa, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados, proponiendo una solución particular del tipo:

$$y = m \cdot x + n$$

derivando, resulta:

$$y' = m \quad ; \quad y'' = 0$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial completa:

$$y \cdot y'' - 2(y')^2 - 12 \cdot y^2 = -48$$

resulta:

$$0 \cdot (mx+n) - 2(m)^2 - 12(mx+n)^2 = -48$$

operando resulta:

$$-2m^2 - 12m^2x^2 - 24mnx - 12n^2 = -48$$

de donde:

$$-12m^2x^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$
$$-24m \cdot n \cdot x = 0 \Rightarrow m = 0$$
$$-2m^2 - 12n^2 = -48$$

siendo: m=0 ; resulta: $-12n^2 = -48$

$$n^2 = \frac{-48}{-12}; n^2 = 4; n_1 = +2; n_2 = -2$$

solución particular de la completa:

$$y_2 = +2$$

Se descarta la solución negativa, en razón de que el precio de equilibrio debe ser positivo.

Solución general de la completa, como suma de la solución de la incompleta u homogénea y la particular de la completa que expresa la tendencia del precio en función del tiempo

$$y_c = \frac{2c_2}{e^{x+c_2} - e^{-x-c_2}} + 2$$

La tendencia del precio para cuando el tiempo tiende a infinito es el precio de equilibrio, determinado por la solución particular de la completa

Dado que el $\lim\limits_{\overrightarrow{x \to \infty}} y_c = \lim\limits_{\overrightarrow{x \to \infty}} \frac{2c_2}{e^{x+c_2} - e^{-x-c_2}} + 2 = 2$

y = 2 : precio de equilibrio

La importancia de este procedimiento de resolución, surge que el mismo puede ampliarse a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior al segundo.

CONSIDERACIONES FINALES

Si la ecuación diferencial tiene la forma:

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

Se introduce la variable: $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$

y se calculan las derivadas sucesivas en la siguiente forma

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \cdot p$$

y así sucesivamente con las siguientes derivadas

La sustitución de las derivadas presentadas en la ecuación diferencial:

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

de orden n, conduce a una ecuación diferencial de orden (n – 1).
Si es posible resolverla se obtiene la solución general de la forma:

$$p = F\left(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1}\right)$$

lo que implica que:

$$p = \frac{dy}{dx} = F(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$$

que resulta ser una ecuación diferencial de variables separables con lo que se obtiene la solución de la ecuación diferencial de que se trata

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Evans, Lawrence C. (2002). *Partial Differential Equations.* AMS.
Evans, Lawrence C. (2005). *An introduction to stochastic differential of Mathematics.* U. Berkley.
Simmons, George F. (1993). *Ecuaciones Diferenciales.* McGraw Hill .
Strauss, W.A. (1992). *Partial Differential Equations. An introduction*. New York: John Wiley and Sons.