EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR DE LOS LOGARITMOS EN LIBROS DE TEXTO

Apolo Castañeda, Alejandro Rosas y Gabriel Molina Zavaleta
Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. CICATA-IPN. (México)
apcastane@gmail.com , alerosas@ipn.mx , erecose@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo se utiliza la noción teórica del discurso matemático escolar para analizar el tema del logaritmo en cinco obras de texto, con la finalidad de identificar los rasgos de tipo conceptual, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso *oficial* para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase, etcétera. Esta investigación ofrece una caracterización del manejo escolar del logaritmo, mostrando el sentido de las definiciones, actividades, así como los usos y aplicaciones que los autores establecen.

Palabras Clave: discurso matemático escolar, logaritmo, libro de texto

ANTECEDENTES

El trabajo de Ferrari y Farfán (2001) documenta la existencia de una dislexia entre la presentación escolar de los logaritmos como facilitadores de operaciones y su estudio como función, este fenómeno ocurre debido al salto conceptual entre el manejo de los logaritmos como una potente herramienta facilitadora de operaciones (acercamiento numérico) y su posterior aparición como una función definida mediante la integración de la hipérbola equilátera. A partir de estas evidencias y con base en los reportes de Sierpinska y de Trujillo que son citados en el trabajo de Ferrari y Farfán, se argumenta que es pertinente explorar su origen y desarrollo, así como recabar información de significados que se han perdido *en un intento de proporcionar elementos para introducirla y desarrollarla en el aula de forma más accesible para los alumnos y profesores* (Ferrari y Farfán, 2001, pág 265). En su investigación, Ferrari y Farfán analizaron libros antiguos originales, libros de historia así como libros de texto a fin de *conocer cómo vivieron y viven los logaritmos en el discurso matemático escolar* (Ferrari y Farfán, 2001, p.250).

Otros trabajos como el de Berezovski (2006) sostiene que en el actual currículo, el logartimo es introducido y definido como un exponente, sin embargo, históricamente el desarrollo del logaritmo fue completamente independiente al de los exponentes.

Los hallazgos en el plano epistemológico, sustentan la posibilidad de reformular la estructura actual del discurso escolar del logaritmo, entre otras; debatir la manera en que se introduce en la escuela, el tipo y características de las actividades, las apliaciones, etcétera. A esta forma de intervención en la estructura y forma de la matemática escolar se le denomina reconstrucción del discurso (Cordero, 2006) y es precísamente uno de las contribuciones de los estudios epistemológicos. No obstante, el propósito de nuestro estudio es profundizar en el análisis de la actual del discurso escolar del logaritmo, en particular, en los libros de texto, ya que estas obras son empleadas como referencia para el desarrollo de la clase. Esta delimitación excluye la indagación histórico-epistemológica y el estudio de las dificultades en su aprendizaje, aunque no negamos la estrecha relación que guardan. Pero consideramos necesario conocer con mayor detalle la manera en que los libros escolares tratan el tema ya que usualmente los textos escolares cumplen, entre otras funciones, la de ser fuente de consulta, también suelen servir de referencia para la creación de programas de estudio, en la estructuración de cursos, seminarios, o en situaciones específicas como en la preparación de clases, elaboración de problemarios, guías de estudio, exámenes. Esta notable influencia del libro en la clase de matemáticas, ha motivado el desarrollo de investigaciones que estudian la estructura y funcionamiento de la matemática escolar, analizando el actual discurso matemático escolar y posteriormente ofrecer evidencias sobre su funcionamiento, lo que permite eventualmente proponer modificaciones al sistema escolar, a través de nuevos enfoques didácticos, epistemológicos, tanto en los libros de texto como en los programas de estudio, incluso en las políticas educativas.

Para realizar este tipo de estudios nos apoyamos en la investigación epistemológica, la cual no se refiere exclusivamente al estudio histórico, postulamos un análisis de la matemática escolar en las obras impresas estudiando la forma en que el autor aborda o trata la matemática, el sentido de los argumentos el tipo de actividades o situaciones que propone, el tipo de explicaciones, ejemplos o problemas asociados. Esta información nos permitirá adquirir más argumentos para debatir la actual visión del dicurso matemático escolar y eventualmente proponer reformulaciones o reorganizaciones al tema del logaritmo.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Mostrar el tratamiento epistemológico y didáctico del tema de logaritmo en cinco de libros de texto usados frecuentemente en el nivel medio superior y superior en el Instituto Politécnico Nacional en México,[1] a fin de mostrar la estructura y organización que establece el autor y por otra parte, mostrar el manejo de las definiciones, argumentos, enfoques, el tipo de actividades y los usos que le da. Este análisis aportará una caracterización sobre el manejo escolar del logaritmo permitiendo eventualmente modificaciones en cuanto a su actual tratamiento didáctico.

[1] ver referencia acerca del IPN en http://es.wikipedia.org/wiki/IPN

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

El discurso matemático escolar es una noción teórica que se refiere a la manera en cómo se *interpreta, usa y se comparte* en situación escolar aquella matemática que la definimos como 'escolar'. Este discurso no se formula de manera arbitraria, sino a partir de consensos que se realizan en la noosfera (Marcolini y Perales, 2005). En ella, las opiniones de profesores, padres de familia, académicos, políticos, autores de libros de texto en relación a *qué objetos escolares deben aprenderse* en la escuela están modeladas por diversos factores tales como la incorporación de tecnologías a la clase de matemáticas, las posturas personales o institucionales de lo que significa "aprender" matemáticas, la orientación curricular, etcétera. El discurso matemático escolar refleja una *ideología* sobre la forma de presentar y tratar (didácticamente) los objetos matemáticos en clase y a la larga se convierte en un conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que norman la actividad áulica y al discurso escolar[2] mismo (Montiel, 2005).

El propósito del análisis del *discurso matemático escolar* en los libros de texto es identificar los rasgos de tipo conceptual, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso *oficial* para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase e incluso se desarrollan programas de estudio. Díaz y Morales (2005) advierten que la forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden, debido a que el libro de texto cumple, entre otras funciones, la de ser fuente de consulta del *saber* designado para estudiarse en clase (Castañeda, 2006) no sólo a objetos matemáticos en cuestión; tales como teoremas, definiciones, demostraciones, sino que también para consultar rutinas algorítmicas, técnicas especiales e incluso recursos nemotécnicos (Carrillo, 2006).

Brousseau, (1987), explica que en los libros de texto, el saber se justifica a través de una *génesis ficticia* a consecuencia de que la matemática de origen se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, así que su introducción a los sistemas de enseñanza obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, en este proceso el saber se le desasocia de las problemáticas originales y situaciones que le daban sentido y razón de ser. Como resultado se configura un *nuevo* saber, desprendido de sus orígenes y queda usualmente reducido a definiciones, teoremas y aplicaciones que lo presentan como un saber refinadamente construido, sin permitir recrear algunos de los conflictos, conjeturas e interpretaciones originales que le dieron sus primeros significados.

A partir del planteamiento de Chevallard en relación al fenómeno de la Transposición Didáctica, se han desarrollado estudios de corte histórico-epistemológico para conocer el origen de los objetos matemáticos así como para explicar las condiciones en que acontece la incorporación del saber erudito al ámbito escolar. Otro tipo de estudios, como el que ahora presentamos, analiza el

---

[2] Montiel (2005) explica que el discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares.

manejo conceptual del tema del logaritmo en los libros de texto, asumiendo que se refiere a un estudio epistemológico pues se aborda un discusión sobre los significados que se le atribuyen al logaritmo, sus usos, el tipo de aplicaciones y en, general, el significado que se quiere construir en clase.

Para llevar a cabo este estudio, empleamos la noción teórica de *discurso matemático escolar*, para referirnos al cuerpo de conocimientos definido por la noosfera como el "válido" para estudiarse en la escuela. Este discurso se haya presente en los libros de texto, en las creencias y paradigmas del profesor, en las declaraciones sobre la enseñanza dentro de los programas de estudio, en las opiniones de los expertos sobre cómo orientar la enseñanza, etcétera. En particular nuestro trabajo se aboca al estudio del discurso matemático escolar en los libros de texto, el cual considera tres componentes fundamentales (Castañeda, 2006); la didáctica, la epistemológica y el análisis del discurso. En la parte epistemológica, se analiza y se buscan explicaciones de la naturaleza del saber, sus usos, la naturaleza de las definiciones así como el tipo de argumentos que el autor utiliza. La parte didáctica se centra en identificar las formas, procedimientos, estrategias por los que se transmite el saber, por ejemplo el tipo de recursos gráficos y explicativos que el autor utiliza, el enfoque o paradigma de aprendizaje, la naturaleza de los ejemplos y problemas que plantea. Finalmente la referida al *análisis del discurso*, que se relaciona con el análisis de la organización y representación del saber en los libros de texto (Zaldúa, 2007). En una primera fase de análisis se estudia la estructura del texto específicamente en las relaciones semánticas y funcionales entre las frases, es decir, la organización y distribución del saber en el texto (Dijk, l992). En la segunda fase se analizan las funciones del texto así como la forma en que se "representa" o reconstruye el saber en la obra de texto. (Dijk, 2002).

Para esta investigación consideramos dos ejes de análisis, el primero corresponde a las características de formato del libro así como su estructuración. El otro referido al contenido y su organización: estructura de la lección o apartado; en el que se analizan las componentes de la lección. Identificación de los contendios, en el que se analiza la organización de los contenidos asi como su presentación. Identificacion de secciones o apartados. Características de la definición incluyendo las formas de argumentación y enfoque. En relación al contenido, se analizan las propiedades de los logaritmos, la justificación de las propiedades, el tipo de ejercicios y actividades, las aplicaciones y ejemplos y finalmente la forma de institucionalizar el saber.

Consideramos para nuestro estudio seis libros de texto editados en diferentes épocas y de diferentes países. Dolores (2007) explica que un criterio útil para definir la muestra representativa de obras de texto para su análisis es la frecuencia de uso en los sistemas escolares, particularmente para nuestro estudio se eligieron los libros más citados en los programas de estudio de las carreras de nivel medio superior y superior en el Instituto Politécnico Naciona y la selección se complementó con una breve revisión documental de aquellas obras cuyo impacto y amplia difusión fue notable en los círculos académicos de diferentes épocas.

Autor	Título	Editorial	País	Año
Goulard, H.	*Guide du Géomètre pour les opérations d'arpentaje*		Francia	1849
Bromwich, T. J.	*An introduction to the teory of infinite series.*	Macmillan & Co. LTD.	Inglaterra	1955
Thomson, J. E.	*Álgebra*	Uteha	México	1968
Thomas, J. R.	*Cálculo infinitesimal y geometría analítica.*	Aguilar	España	1980
Sullivan, M.	Precálculo	Prentice Hall	México	1997

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el análisis de las obras de texto se originó una aparente contradicción; los libros provienen de diferentes momentos históricos y por lo tanto escritos en circunstancias y condiciones específicas en el tiempo. Al someterlos a una revisión a través de una metodología que no reconoce estas condiciones sería evidente observar la existencia de diferencias en cuanto al tratamiento, manejo conceptual y didáctico. Sin embargo es importante advertir que no estamos comparando las obras, sino más bien, proponemos caracterizar desde un plano epistemológico el tratamiento matemático. En este sentido, aunque las condiciones y circunstancias de cada época si importan en la configuración del libro de texto, nuestro propósito no es propiamente de carácter histórico-epistemológico.

Todos los libros analizados fueron escritos exprofeso para ser usados en los sistemas escolares, por lo que asumimos que los autores han ajustado la extesión y profundidad del tema para cubrir las necesidades del sistema escolar correspondiente de acuerdo al nivel al que están dirigidos, esta es una variable en nuestro estudio pues determina las características de los ejercicios propuestos, los problemas o actividades y sobre el tipo de *actividad matemática* que el alumno debe realizar. Por esta razón el análisis de los libros inicia con una descripción del nivel educativo al que probablemente están dirigidos.

La obra de Goulard, (1849) tienen una orientación para el nivel medio, en la sección dedicada al estudio de los logaritmos hace énfasis sobre cálculos aritméticos de logaritmos y ofrece aplicación práctica en problemas de conversión de unidades así como cálculo de magnitudes. Esta sección aparece antes del tema de trigonometría.

El tema de logaritmos está ubicado en el capítulo I donde se estudian las nociones preliminares. En la primera parte de esta sección explica el uso de las tablas de logaritmos, en la segunda parte define al logaritmo, posteriormente explica la "característica" de los logaritmos, expone también el uso de las tablas de logaritmos y finalmente explica varios casos de conversión de cantidades.

La definición de logaritmo se hace a partir de progresiones artiméticas y geométricas, de esta forma establece al logaritmo como una razón. Observamos una definición que hace alusión a una forma de "relacionar" las progresiones.

Définitions. — *On appelle Logarithmes une suite de nombres en progression arithmétique commençant par zéro, qui correspondent terme pour terme à une pareille suite de nombres en progression géométrique commençant par l'unité ;*

(Goulard, 1849, pág. 1)

Par conséquent ayant adopté pour la formation des tables les deux progressions :

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000, \text{ etc.}$$
$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,, \text{ etc.}$$

Les nombres 1, 10, 100.... ont pour logarithmes 0, 1, 2.... On donne le nom de *base du système*, au nombre ou *raison* qui sert à former les termes de la progression géométrique : cette base correspond toujours à l'unité dans la seconde progression.

(Goulard, 1849, pág. 1)

Explica la propiedades de los logaritmos para los casos de suma, diferencia, potencia y división, donde sugiere que no se calculen directamente los logaritmos sino que se haga uso de descomposiciones a través de las propiedades de suma y resta:

Ainsi, 6 pouvant être décomposé en 2×3, on a :

$$\log 6 = \log 2 + \log 3.$$

(Goulard, 1849, pág. 1)

Desde el punto de vista epistemológico, la construcción del logaritmos inicia con una análisis del comportamiento de progresiones geométrica y aritmética que conducen al manejo de exponentes (se pueden observar en la forma de relacionar las progresiones), se justifican propiedades operativas de los logaritmos, se explican las reglas de operación y finalmente se justifica su utilidad para realizar conversiones y cálculos diversos.

La obra de Bromwich (1955) tiene una orientación al nivel superior ya que su principal interés al abordar el tema de los logaritmos es ahondar en el estudio de la serie de potencia logarítmica. Bromwich introduce al logaritmo cuando explica que dada la ecuación polar (1) *log r* es el logaritmo del número real *r*

$$x = r(\cos\theta + \iota \sin\theta) = rE(\iota\theta). \qquad (1)$$

esto le permite encontrar la solución para la ecuación:

$$r = E(\log r),$$

and consequently $\quad x = E(\log r + \iota\theta).$

Thus we can take $y_0 = \log r + \iota\theta$, and then the general solution is

$$y = \log x = \log r + \iota(\theta + 2n\pi), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

(Bromwich, 1955, pág. 283)

Así define la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.

$$\log x = \log r + \iota\theta, \text{ where } -\pi < \theta \leqq \pi.$$

With this determination, $\log x$ is real when x is real

(Bromwich, 1955, pág. 283)

Posteriormente aborda la serie de potencias logarítmicas, donde conlcuye que:

Thus, using the principal branch of the logarithm defined in the last article, we have

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \dots \quad (\text{if } |x| < 1).$$

(Bromwich, 1955, pág. 284)

Bromwich no utiliza sustancialmente las imágenes en sus explicaciones, únicamente cita el caso de representar la variable x de forma geométrica en diagrama de Argand, justo para expresar una referencia a la ecuación (1).

Observamos que reiteradamente se establece la relación entre la función logarítmica y la función exponencial, particularmente cuando representa la serie de la función inversa de la función exponencial.

We know from Arts. 58 and 62, that if x is real and $|x| < 1$, the series

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \dots$$

represents the function inverse to the exponential function

$$1 + x = E(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots.$$

(Bromwich, 1955, pág. 284)

Posteriormente analiza las sucesiones con potencial logarítmico y después estudia las series de funciones inversas y termina con el uso de las series binomiales que involucran a la exponencial.

Epistemológicamente, la noción de logaritmo se vincula con la exponencial a través de transformaciones en series de potencia, el tratamiento didáctico se basa en proporcionar ejercicios que se desprenden de las mismas deducciones que realiza, tal y como se puede observar en este pie de página.

* It is a good exercise to verify this conclusion up to, say, x^6.

(Bromwich, 1955, pág. 284)

El planteamiento de Bromwich no conduce a usos pragmáticos de los logaritmos, tales como problemas o ejercicios complementarios. Aunque sin duda que sirve de antecedente para el estudio de las series binomiales.

En la obra de Thompson (1968) la sección dedicada al estudio de los logaritmos comprende dos capítulos de la obra; el capitulo XVI, donde se define el logaritmo de un número, el logaritmo de un producto, logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia, logaritmo de una raíz, el paso de los logaritmos de una base a otra, además de mostrar otras propiedades (logaritmos de números especiales), y termina con ejercicios. En el siguiente capitulo XVII, se tratan los sistemas de logaritmos, los logaritmos vulgares, las tablas de logaritmos, el modo de usar la tabla, y finaliza con ejercicios.

Este libro está dirigido a estudiantes que están en un curso de álgebra básico, es seguramente su primer encuentro con los logaritmos. Thompson presenta la definición del logaritmo vinculado con la potencia.

DEFINICIÓN *El logaritmo de un número en una base cualquiera es el exponente de la potencia a que hay que elevar la base para tener como resultado el número dado.*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Si} & a^n = N \\ \text{entonces} & n = \log_a N\end{array}\right\}. \qquad (1)$$

(Thompson, 1968, pág. 241-242)

Después muestra varios ejemplos en los que se explica la relación entre la potencia y los logaritmos. Enseguida Thompson presenta las propiedades artiméticas de los logaritmos; la del producto, la del del cociente, de una potencia, de una raíz, para cada uno de estos casos las propiedades se argumentan a partir de los exponentes y se concluye con la explicación de algunos casos donde se ilustra cada propiedad.

Thompson pone especial interés en la conversión de los logaritmos de una base a otra. En esa sección formula una definición para realizar la conversión lo que más adelante le permite proponer diversos ejercicios aritméticos.

Es decir, que *para pasar los logaritmos en una base* a *a otra* b *se divide el primer logaritmo por el logaritmo de* b *en la base* **a.**

La fórmula (9) se puede escribir del modo siguiente:

$$\log_b N = \left(\frac{1}{\log_a b}\right) \log_a N, \qquad (10)$$

(Thompson, 1968, pág. 249-250)

Para terminar este capítulo, Thompson expone otras propiedades de los logaritmos. La primera de ellas es el caso que se deriva de la regla $a^0 = 1$, en la que concluye que *log* 1 = 0, la segunda explica los casos para *log* 0 y *log* α; su argumento parte al considerar valores crecientes de x para el cociente $\frac{1}{x}$;

En el límite, cuando x llegue a ser infinitamente grande o, como se dice a veces, *cuando* **x** *sea infinito* el cociente será infinitamente pequeño; es decir, que valdrá *cero.*

Empleando estos símbolos podemos expresar el concepto del cociente de un número definido (finito) por un divisor infinito, escribiendo $\frac{1}{\infty} = 0.$

(Thompson, 1968, pág. 249-250)

En esta explicación se puede *operar* al infinito como cualquier otro número, con lo que concluye que;

$$\log 0 = -\infty, \tag{12}$$

$$\log \infty = +\infty. \tag{13}$$

Estas fórmulas expresan que en un sistema cualquiera *el logaritmo de cero es menos infinito y el logaritmo de infinito es más infinito.*

(Thompson, 1968, pág. 250)

Estas expresiones las usa para definir el dominio (en el campo de los reales) donde la operación logaritmo tiene respuesta. Así concluye es posible calcular el logaritmo de cualquier número positivo y excluye que a algún número negativo se le pueda calcular logaritmo.

Finalmente, en esta sección propone 10 ejercicios de diversos cálculos aritméticos usando logaritmos.

En el siguiente capítulo llamado "Sistemas y Tablas de Logaritmos" Thompson inicia distiguiendo entre los logaritmos decimales y los logaritmos naturales e introduce una fórmula (previamente discutida en el capítulo anterior) para pasar de un sistema a otro. Después analiza de forma inductiva el cálculo de la *característica* del logaritmo, a partir de tablas de potencia

$$\begin{aligned} 0{,}1 &= 10^{-1} \\ 1 &= 10^{0} \\ 10 &= 10^{1} \\ 100 &= 10^{2} \\ 1\,000 &= 10^{3} \\ 10\,000 &= 10^{4} \\ 100\,000 &= 10^{5} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\quad \ldots\ldots \end{aligned}$$

También se ve en seguida que el logaritmo de un número comprendido entre 10 y 100 estará entre 1 y 2;

(Thompson, 1968, pág. 255-256)

A partir de lo anterior el autor explica que son pocos los números que tiene *mantisa* cero, de ahí la necesidad de tener una *tabla de mantisas* para el cálculo de logaritmos. En la parte final del capítulo el autor hace una amplia explicación sobre el uso de las tablas (mismas que se incluyen al final de la obra) para el cálculo de logaritmos y de antilogaritmos. Para cerrar el capítulo el autor propone una serie de ejercicios de cálculos artiméticos.

Desde el punto de vista epistemológico la construcción de la noción de logaritmo se sustenta en los exponenciales y sus propiedades. El autor usa un lenguaje muy conciso que permite seguir las argumentaciones de la relación de los logaritmos y la potenciación pues casi todo está justificado. El tipo de ejercicios que propone son de caracrter artimético en los que se deben aplicar las técnicas y propiedades discutidas.

La obra de Thomas, (1980) está dirigida a estudiantes que cursan un nivel superior, el lector deberá de tener conocimientos de cálculo diferencial e integral, pues Thomas presenta la definición de logaritmo como una integral definida, mostrando incluso la gráfica del área limitada.

DEFINICION. *El logaritmo natural (o logaritmo neperiano *) de x, que se designa por la notación* $\ln x$, *se define para x positivo mediante la integral*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt. \qquad [1]$$

(Thomas, 1980, pág. 351)

Esta definición le permite realizar el cálculo (el área bajo la curva) para determinar el logaritmo natural de 1 y para explicar el comportamiento para los logaritmos de números mayores que cero y menores que 1.

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0. \qquad [2]$$

(Thomas, 1980, pág. 351)

Establece finalmente el dominio de integración:

la ecuación [1] define una función de x, que es calculable numéricamente en el dominio $(0, \infty)$, ya que el integrando $1/t$ es continuo en él.

(Thomas, 1980, pág. 351)

Esta sección se termina con ejercicios de cálculo de áreas. En la siguiente sección llamada "Derivada de *ln x*" establece mediante el segundo teorema fundamental del cálculo;

$$\boxed{d \ln u = \frac{du}{u}}$$

y análogamente que;

$$\boxed{\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.}$$

(Thomas, 1980, pág. 353- 254)

Thomas termina esta sección proponiendo varios ejercicios de cálculo de derivada e integral de logaritmo natural.

En la siguiente parte, Thomas demuestra las siguientes propiedades del logaritmo natural;

$$\ln ax = \ln a + \ln x,$$

$$\ln \frac{x}{a} = \ln x - \ln a,$$

$$\ln x^n = n \ln x,$$

(Thomas, 1980, pág. 355)

las cuales se basan en que la función *y = ln x* satisface la ecuación diferencial;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{para todo} \quad x > 0,$$

(Thomas, 1980, pág. 356)

El autor concluye esta sección proponiendo diversos ejercicios para aplicar las propiedades descritas.

En la siguiente parte Thomas analiza las características gráficas de la *ln x*; de dominio, imagen, continuidad, crecimiento y derivabilidad. Destaca el análisis del comportamiento gráfico de la función *y = ln x*, en donde discute las condiciones de la gráfica en el punto (1, 0) y se desprenden análisis visuales sobre las magnitudes de las ordenadas; por ejemplo observar que 0.5 < *ln* 2 < 1

La incorporación de análisis gráfico le permite destacar las propiedades gráficas del logaritmo y abrir una discusión sobre las características de la gráfica.

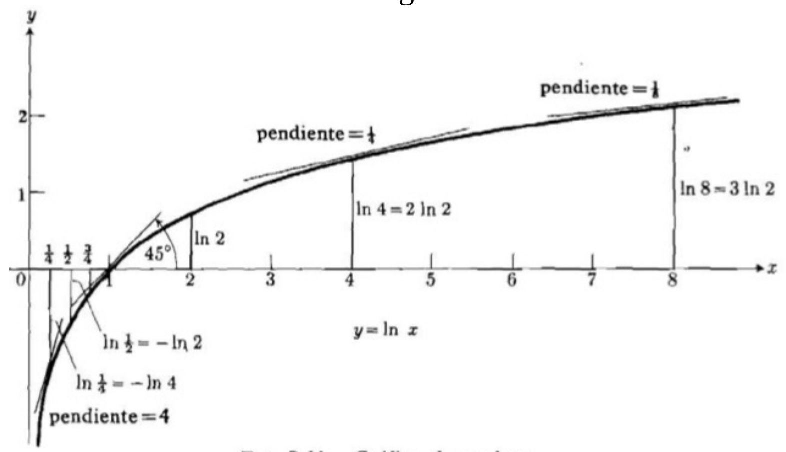

FIG. 7-11. Gráfica de $y = \ln x$.

Para cerrar esta sección propone una serie de ejercicios asociados con el análisis gráfico del logaritmo y ejercicios de simplificación de expresiones exponenciales, derivadas e integrales.

La obra de Thomas se apoya en varios ejemplos y propone una abundante cantidad de ejercicios. El enfoque que utiliza es el analítico aunque emplea escasas representaciones gráficas. Es notable que después de cada sección se presenta un resumen de las propiedades estudiadas. Desde el punto de vista epistemológico, esta obra apoya la definición de logaritmo mediante una integral definida, así, cuando calcula el área bajo de la curva obtiene una aproximación al valor del logaritmo, esta aproximación le permite transitar al estudio de la función logaritmo y de su derivada.

La obra de Sullivan (1997) está dirigido a estudiantes de un nivel medio superior. El autor inicia la sección 4.2 a la que llama “Funciones Logarítmicas” definiendo la función logaritmica como la inversa de la función exponencial. Posteriormente muestra varios casos donde analiza y explica la relación entre los exponentes y logaritmos, así, en el último de los ejemplos solicita determinar el valor exacto para varios logaritmos del tipo: *log_2* 8, para encontrar el valor transforma la expresión en su equivalente en forma de potencia.

(a) Para $y = \log_2 8$, tenemos la ecuación exponencial equivalente $2^y = 8 = 2^3$, así, por (1), $y = 3$. Por lo tanto, $\log_2 8 = 3$.

(Sullivan, 1997, pág. 276)

Enseguida abre la discusión sobre el dominio de la función logarítmica, donde también analiza el dominio de la función exponencial. Después plantea varios ejercicios resueltos en los que se debe determinar el dominio de la función logaritmo.

Después Sullivan realiza un estudio detallado de las características de las gráficas de las funciones logarítmicas y de la exponencial. En este análisis se describen características de las gráficas; como crecimiento, comportamiento asintótico, intersección con el eje *x*, continuidad. En esta sección destaca una actividad con calculadora graficadora para *visualizar* el comportamiento gráfico. En este caso el autor se limita a cuestionar al lector; *¿Ve usted la simetría de las dos gráficas con respecto de la recta y = x?*

En los ejemplos resueltos que siguen, aborda el análisis de gráficas de funciones *logaritmicas mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas;* por ejemplo reflexiones respecto al eje *x* y al eje *y*, traslación horizontal y vertical. Para terminar esta sección Sullivan discute un problema resuelto (situado en un contexto real) apoyándose de manejo algebraico. Finalmente plantea una cantidad muy amplia de ejercicios; de cálculo de logaritmos, identificación de gráficas, graficación y problemas contextualizados.

En la siguiente sección define las propiedades de los logaritmos explicando algunos de sus rasgos (sin llegar a ser demostraciones formales). Posteriormente presenta ejemplos resueltos donde aplica las propiedades en la simplificación de expresiones algebraicas. Aparece de forma notable la advertencia que hace a los estudiantes para no caer en el error de expresar el logaritmo de una suma como la suma de los logaritmos;

Cuidado: un error común entre estudiantes es expresar el logaritmo de una suma como la suma de logaritmos:

$$\log_a(M + N) \quad \text{no es igual a} \quad \log_a M + \log_a N$$

Enunciado correcto $\quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad$ Propiedad (3).

(Sullivan, 1997, pág. 287)

Una notable necesidad de asumir el papel de profesor a través de su obra, para advertir a sus lectores sobre errores comunes.

Para cerrar este apartado Sullivan plantea el uso de la calculadora para realizar actividades de cambio de base donde nuevamente se usan las propiedades que antes definió. En esta obra podemos observar que la construcción de la función logarítmica se establece como inversa de la exponencial y no abandona esta relación durante sus explicaciones. Por otro lado, la parte referida al análisis gráfico es amplio; hay un estudio de las propiedades de la curva, de su dominio y sus comportamientos asintóticos. Observamos que gran parte de los ejercicios están orientados a la aplicación de las propiedades de los logaritmos y simplificaciones de expresiones algebraicas.

A continuación presentamos un tabla que sistematiza nuestro análisis.

Obra	Nociones Previas	Características de la definición	Tipos de recursos	Actividades
Goulard	Progresiones aritméticas y geométricas.	Establece la definición a partir de relaciones entre progresiones aritméticas y geométricas.	Tablas de logaritmos.	Conversiones de unidades. Cálculo del logaritmo de un número.
Bromwich	Coordenadas polares, ecuaciones polares, razones trigonométricas.	Define la función logarítmica como la única inversa de la función exponencial.	Diagrama de Argand.	Ejercicio que se desprende de sus deducciones.
Thompson	Exponentes.	Definición vinculada a la potencia.	Ejemplos comentados, explicaciones verbales.	Ejemplos donde analiza la relación entre la potencia y los logaritmos Ejercicios de cambio de base. Cálculos aritméticos de logaritmos. Aplicación de propiedades.
Thomas	Funciones, derivada, integral, integral definida, área bajo la curva.	Define la función logaritmo natural como el área bajo la curva de una función.	Problemas resueltos, gráficas para mostrar área, análisis gráfico de la función logaritmo.	Ejercicios de cálculo de áreas, cálculo de integrales, problemas relativos a análisis gráfico.
Sullivan	Funciones, exponentes.	Se define la función logaritmo como inversa de la función exponencial.	Ejemplos resueltos donde explica propiedades de los logaritmos, gráficas sobre las que analiza propiedades de la curva.	Cálculo aritmético de logaritmos, análisis de gráficas de logaritmos, problemas contextualizados a situaciones diversas.

NOTAS FINALES

Atendiendo a los dos ejes de análisis; que corresponden a las características de la estructura de la obra y a la organización de contenidos, argumentos y enfoques, mostramos a continuación evidencias que reflejan el tratamiento del logaritmo en los libros de texto.

Hay que advertir que los libros analizados fueron editados en diferente época esto se refleja en la forma en que articulan la sección en la que se abordan los logaritmos. En el caso de la obra de Goulard observamos que el texto es descriptivo explicando ampliamente las características de los logaritmos, en cambio Sullivan utiliza poco texto y agrega varios ejemplos donde se muestra la aplicación de las propiedades. Identificamos que cada libro tiene un enfoque diferente acerca de *lo que se debe saber acerca de los logaritmos*, ya que existen diferentes variables en cuanto al contenido que aborda y la profundidad; particularmente el libro de Bromwich tiene un tratamiento matemático en la que el lector requiere tener conocimientos de trigonometría, conocimiento de coordenadas polares y nociones de series, en cambio para estudiar logaritmos en la obra de Tompson se requiere conocer las propiedades de la potencia.

Una coincidencia en las obras analizadas es el vínculo que establecen los autores del concepto de logaritmo con el de la potenciación, esta asociación se establece principalmente por dos formas; la primera al explicar el origen del logaritmo como *inversa* de la potencia; en la que usualmente se vinculan las propiedades de los logaritmos con los de la potencia. La segunda es a través de gráficas, en este caso las obras presentan análisis de gráficos de funciones trigonométricas que conducen a identificar y caracterizar los rasgos de la curva, como crecimiento, simetría, dominio, etc. La función exponencial aparece en estas dicusiones como la *contraparte* de la función logaritmo. Identificamos que el nivel de profundidad y el enfoque no modifican el discurso matemático escolar del logaritmo; pues en estos casos se admite y fortalece la relación entre el logaritmo y la exponencial.

Otro rasgo que comparten la mayoría de las obras es la presentación de las propiedades de los logaritmos y su aplicación en ejercicios aritméricos y algebraicos. Por otra parte, sólo las obras que tienen un tratamiento aritmético de los logaritmos incluyen argumentaciones sobre el uso o el origen de las tablas de logaritmos y antilogaritmos, así como aplicaciones a cálculos numéricos y de magnitudes. Existe una necesidad de los autores por incluir diversos tipos de actividades complementarias a través de ejercicios y problemas a fin de mostrar a los logaritmos como *algo útil*.

En cuanto a los ejercicios y actividades que proponen las obras, en general encontramos cuatro enfoques; ejercicios artiméticos de cálculo de logaritmo de un número, ejercicios de simplificación algebraica, plateamientos de análisis gráfico y problemas de aplicación, aunque la mayoría de estos problemas son contextualizados de forma artificial. El libro de Bronwich no tiene propuestas explícitas de ejercicios o problemas; por su parte, el libro de Sullivan enfatiza ampliamente los estos apartados y propone un amplio número de ejercicios y problemas. En la obra de Goulard, el énfasis está en el dominio cálculos aritméticos, en la obra de Bromwich todo el discurso apunta al dominio de la serie de potencia logarítmica. La obra de Thompson tiene dos apartados, el primero es el uso de los logaritmos para hacer operaciones aritméticas y manejo de las propiedades de los logaritmos, el segundo, el dominio de la tabla de logaritmos. En la obra de Thomas el dominio de fórmulas de derivación e integración, el conocimiento de la gráfica del logaritmo y sus características y el dominio de las propiedades de los logaritmos para el cálculo algebraico de expresiones. Finalmente en la obra de Sullivan el dominio de las propiedades de los logaritmos para realizar transformaciones aritméticas y algebraicas y dominio de las características de la gráfica del logaritmo.

Nuestro análisis también consideró una revisión del tipo de recursos didácticos empleados por los autores en sus libros de texto, nos referimos particulamente al uso de las gráficas y el sentido que se les asignó. En la obra de Bromwich observamos dos gráficas que ilustran la representación de una ecuación trigonométrica en un diagrama de Argand, no se desprende ninguna discusión a partir del gráfico. En la obra de Thomas pudimos observar dos clases de usos a sus gráficas, la primera para ilustrar el área bajo la curva (lo que le permite después argumentar su definición), la segunda con una función más amplia, pues la gráfica apoya al análisis de las propiedades de la curva. Finalmente en el libro de Sullivan observamos que las gráficas tienen mayor participación en el estudio del logaritmo; por una parte abre una discusión sobre *operaciones a las funciones* y sus efectos gráficos y por otra parte hay un análisis de la naturaleza de la curva, su crecimiento, etc. Sin embargo, coincidimos con Montiel (2005), *el gráfico se vuelve necesario en el discurso… para salvar la distancia entre el rigor y la intuición*, pues notamos que la obra de Sullivan tiene un predominante enfoque algorítmico.

Un tema relevante en nuestra investigación fue identificar la forma en que cada autor *institucionaliza* el saber. En otras palabras, explicar cómo se construye la idea de logaritmo a partir de las actividades, definiciones, argumentos en las obras de texto. Para Goulard, el logaritmo permite la simplificación de cálculos aritméticos usando propiedades específicas para la conversión de cantidades. Bromwich introduce a la función logaritmo como la inversa de la función exponencia, esto le permite desarrollar la serie de potencia logaritmica como la inversa de la exponencial. La definición de logaritmo en Thompson le permite realizar cálculos aritméticos usando las propiedades logarítmicas. En Thomas, el logaritmo se introduce como el área bajo la curva y esto se asocia con cálculo de derivadas e integrales; finalmente Sullivan ofrece la presentación de la función logaritmo como inversa de la función exponencial y desprende actividades de análisis gráfico, cálculos algebraicos de expresiones logarítmicas y problemas contextualizados.

Finalmente, destacamos a partir de este análisis, que el discurso escolar del logaritmo tiene aspectos constantes, el más trascendente es la asociación “inversa” que se hace con la potencia así como con las propiedades. Otro tratamiento común es asumir al logaritmo como una *herramienta* para simplificar los cálculos aritméticos al tranformar las multiplicaciones en sumas, etcétera, así se le atribuye un sentido pragmático y se *usa* en problemas de conversión. Finalmente en el caso de las obras de nivel superior, se estudia al logaritmo como función y se hacen relaciones con la función logaritmo.

Este análisis nos ha mostrado que no hay un tratamiento homogeneo del logaritmo, ya que varía dependiendo del nivel de profundidad de la obra, así como de su enfoque. No obstante hemos podido identificar rasgos comunes dentro del discurso escolar del logaritmo los cuales se mantienen constantes entre una obra y otra, por ejemplo la relación *inversa* que se establece entre los logaritmos y los exponentes, las *aplicaciones* de cálculo aritmético del logaritmo (una necesidad de *aplicación* de los logaritmos), las propiedades de los logaritmos para cálculo aritméticos y algebraicos, entre otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bromwich, T.J. (1955). *An introduction to the theory of infinite series*. England: Macmillan & Co.

Brousseau, G. (1987). Fondements et méthods de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de las prácticas sociales.* Tesis Doctoral no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Berezovski, T.(2006). Manifold nature of logarithms: numbers, operations and functions. En Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds) (2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 62-64. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Carrillo, H. (2006). *Recursos nemotécnicos de las funciones trigonométricas básicas*. Tesis de Maestría no publicada. México: CICATA-IPN.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L' Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 253-265.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En G. Martínez (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19*, 824-830. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Díaz, L., y Morales, L. (2005). El concepto de variable en los libros de texto. En H. Leyva, H. Carrillo y L. Díaz (Eds.). *Publicación de la XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas,* Vol. I, pp. 39-45. México D.F: Universidad de Sonora.

Dijk, T.V. (l992) *Text and Context: Explorations in the Semantics and Pragmatics of Discourse.* Londres: Longman.

Dijk, T.V. y Digital, A. (2002). El análisis crítico del discurso y el pensamiento social. *Athenea Digital*, (1) 18-24.

Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.* México: Díaz de Santos.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2001). Una visión sociepistemológica. Estudio de la función logaritmo. En F. Cordero, (Ed.) *Antologias 1 de la red de Cimates*, pp. 249-291. México : Programa Editoral de la Red de Cimates.

Goulard, H. (1849). *Guide du Géomètre pour les opérations d'arpentaje*. France: Beau.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción : Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(1), 25-68

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. México: CICATA-IPN

Sullivan, M. (1997). *Precálculo.* México: Prentice Hall.

Thomas, J.R. (1980). *Cálculo infinitesimal y geometría analítica.* España: Aguilar.

Thompson, J. E. (1968). *Álgebra*. México: Uteha.

Zaldúa G. A. (2007). El análisis del discurso en la organización y representación de la información y el conocimiento. *Acimed* 2007;16(1). Disponible en: http://bvs.sld.cu/revistas/aci/vol16_1_07/aci05707.htm [Consultado: 20/04/2008].