LAS CONCEPCIONES ERRÓNEAS Y EL CAMBIO CONCEPTUAL EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Silvia del Puerto, Silvia Seminara
spuerto@fibertel.com.ar , sseminara@sinectis.com.ar
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires
Proyecto MEMFI[1]

RESUMEN

La *Teoría del Cambio Conceptual* pretende explicar cómo influyen los conocimientos previos que poseen los alumnos en los procesos de adquisición de nuevos conocimientos: en ocasiones la nueva información resulta incompatible con la preexistente, produciéndose un *conflicto cognitivo* cuya resolución adecuada da origen a una *reorganización de los conocimientos* en la mente del alumno; por el contrario, la coexistencia de esquemas mentales incompatibles explicaría los errores que cometen los estudiantes. Este trabajo describe una experiencia realizada con alumnos de primer año de la Universidad Tecnológica Nacional, con el objeto de analizar si se ha producido o no el cambio conceptual en un curso de Álgebra y Geometría Analítica.

Palabras clave: conocimientos previos; cambio conceptual; errores en el aprendizaje de la matemática.

INTRODUCCIÓN

Entre los años 2004 y 2007 trabajamos en la detección y análisis de los errores más frecuentes cometidos por los alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería, en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica (del Puerto, Minnard y Seminara, 2007). Desde un primer momento llamó nuestra atención la manera en que ciertos errores típicos se repetían en distintos grupos de alumnos y resultaban persistentes, aún luego de que en el trabajo del aula se remarcaran deliberadamente las particularidades de los conceptos que estaban en juego y se llamara la atención de los estudiantes con comentarios insistentes sobre las posibilidades de error comunes en dichos tópicos.

Este rasgo de persistencia, y la naturaleza de algunas de las equivocaciones, que consistían básicamente en extender propiedades válidas en ciertos contextos a otros en los cuales dichas propiedades dejaban de ser válidas, orientaron nuestro trabajo hacia tratar de conocer la causa que

[1] MEMFI: "Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática para la Formación del Ingeniero", Proyecto de Investigación y Desarrollo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología, Rectorado UTN (Cód. 25/C114 – UTI901)

les daba origen, así como la razón de la resistencia al cambio que volvía recurrente su aparición. El hecho de que utilizaran con vectores y matrices resultados sólo válidos en el conjunto de números reales, por ejemplo, nos estaba indicando la permanencia y generalización de conocimientos previos que no habían sufrido modificación durante el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos.

Otro tanto ocurría con los tópicos de geometría analítica: aún luego de haber tratado, ejercitado y evaluado el tema de rectas en el espacio, por ejemplo, había alumnos que continuaban extrapolando incorrectamente características propias de las rectas en el plano.

De modo similar juzgamos los errores de razonamiento en las demostraciones, que se hacían presentes en forma recurrente: aún cuando en el trabajo diario del aula se insistía y ejemplificaba la forma lógicamente correcta de demostrar una implicación de manera directa, indirecta o por absurdo, eran muchos los alumnos que insistían en "demostrar" partiendo de la verdad de la tesis o citando ejemplos de casos particulares, evidenciando pautas de pensamiento erróneas, o una concepción epistemológica equivocada del conocimiento matemático, que no se había modificado a través del proceso de enseñanza.

MARCO TEÓRICO

LOS CONOCIMIENTOS PREEXISTENTES

Lejos nos hallamos del paradigma según el cual el alumno es un reservorio vacío donde los docentes "depositamos" conocimientos: las ideas y conocimientos anteriores de los alumnos no pueden soslayarse, y es imprescindible tenerlos en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que los aprendizajes significativos se producen subordinando las nuevas ideas a las ya existentes, e incluso eligiendo esos conocimientos previos como punto de partida para los nuevos aprendizajes (Ausubel, 1976).

Numerosos trabajos de investigación muestran además que una enseñanza "por transmisión", que no tiene en cuenta las ideas previas de los alumnos, no logra eliminarlas si éstas son incorrectas (Campanario y Otero, 2000).

Ya en los años '70 algunos autores se refirieron a los *preconceptos*, *concepciones erróneas* (*misconceptions*) o *concepciones alternativas* con que los estudiantes abordan el aprendizaje de las ciencias (Viennot, 1976; Novak, 1979; Driver et al., 1978).

A comienzos de los años 80, un grupo de investigadores en educación de la Universidad de Cornell (Posner et al., 1982) realizaron los primeros desarrollos de la llamada *Teoría del cambio conceptual*, emparentada tanto con las ideas piagetianas de *desequilibrio* y *acomodación*, como con la teoría de Kuhn de las *revoluciones científicas.*

Piaget explicó cómo una cierta *inadecuación entre estímulo y respuesta* produce un *desequilibrio* en la mente del niño, que exige de una *acomodación* de la conducta y una *asimilación* de la nueva conducta a la estructura mental preexistente, para *recuperar el equilibrio*, produciéndose así la *adaptación cognitiva*, que permanecerá estable *hasta que un nuevo desequilibrio se produzca*.

Por su parte, Kuhn explicó de manera similar el mecanismo de la evolución de la ciencia describiendo el modo en que un *paradigma científico imperante* entra en *estado de crisis* en determinado momento histórico, cuando es incapaz de explicar o dar soluciones a un problema particular identificado por la comunidad científica. Es entonces cuando se puede producir la "*revolución*" si el paradigma es reemplazado por otro modelo alternativo que promete proveer la explicación o la solución buscada, adoptándose entonces un nuevo marco de pensamiento que mantendrá su vigencia *hasta que se produzca una nueva "revolución"*.

De manera similar, en todo proceso de adquisición de conocimientos el alumno cuenta con un bagaje de conocimientos anteriores de origen diverso: por un lado tiene ciertos conocimientos intuitivos, que provienen de su experiencia cotidiana y conforman una teoría *ingenua* de la realidad, y por otro lado cuenta con sus aprendizajes académicos previos. Si estos conocimientos anteriores resultaran coherentes con los nuevos contenidos a los que tiene acceso en su experiencia educativa, no se producirá conflicto alguno, la nueva información simplemente se agregará a la anterior, y el alumno conservará su marco teórico previo y continuará aplicándolo sin modificación a la nueva situación.

Pero en numerosas ocasiones la nueva información resulta de algún modo incompatible con la preexistente y es allí donde se produce un *conflicto cognitivo*. Si el mismo se resuelve de manera adecuada, se producirá una *reorganización de los conocimientos* en la mente del alumno, dando lugar a lo que se denomina un *cambio conceptual* (Vosniadou y Vamvakoussi, 2006). Muchas veces, aunque se plantee el conflicto, el cambio conceptual no se produce o se produce en forma parcial, y aparecen *modelos sintéticos* intermedios, en el esfuerzo de los estudiantes por adaptar la nueva información a su marco preexistente, a pesar de la presencia de incompatibilidades o incoherencias (Biza, Souyoul y Zachariades, 2005), y son estos modelos sintéticos los que se manifiestan en los errores cometidos por los alumnos (Vosniadou y Verschaffel, 2004).

CAMBIO CONCEPTUAL Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

El trabajo de los investigadores sobre ideas previas y cambio conceptual se ha circunscripto sobre todo al ámbito de las ciencias naturales (física, química, biología) ya que resulta muy frecuente que los niños y adolescentes posean explicaciones previas *no científicas* o *ingenuas* de algunos fenómenos naturales, que luego conspiran contra el aprendizaje significativo de la verdad científicamente aceptada. En el área de la matemática, el conocimiento ingenuo es más escaso que en otras áreas de la ciencia: se reduce a algunas nociones relacionadas con el conteo y las operaciones básicas, y las ideas geométricas espaciales que provee la realidad, y son los conocimientos previos, adquiridos con anterioridad en la educación formal, los que cobran mayor relevancia en el proceso de aprendizaje.

Los trabajos sobre cambio conceptual en matemática son menos numerosos que en otras ciencias, pero es creciente la cantidad de estudiosos que sostienen que este enfoque constituye un marco teórico adecuado para interpretar y explicar algunas de las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de la matemática, y realizan investigaciones al respecto (Tirosh y Tsamir, 2004; Biza, Souyoul y Zachariades, 2005; Vosniadou y Vamvakoussi, 2006; Asmuth y Lance, 2006; Shinno, 2007). Este enfoque brinda, por ejemplo, una explicación de porqué un llamado de atención sobre la posibilidad de cometer un error en particular no basta para erradicarlo. Es muy frecuente para los docentes observar que los estudiantes no modifican sus ideas previas por el solo hecho de que se les enseñe un contenido superador del anterior: a menudo perciben contradicciones entre sus ideas preexistentes y las nuevas, pero este solo hecho no implica necesariamente la reestructuración de sus conocimientos; este proceso requiere tiempo y circunstancias favorables (Driver, Guesne y Tiberghien, 1989).

La detección de los modelos sintéticos, que se producen cuando la nueva información matemática ha sido simplemente adicionada a un conocimiento preexistente incompatible, permitiría explicar la aparición de esos errores comunes y persistentes: existen aprendizajes que son aditivos e implican un enriquecimiento del conocimiento ya existente por un simple proceso de agregado, pero aquellos aprendizajes que exigen de un cambio conceptual no puede lograrse por mecanismos aditivos, y es justamente una de las principales causas de la formación de concepciones erróneas el empleo de mecanismos aditivos en estas situaciones (Vosniadou y Verschaffel, 2004).

MÉTODO

Los alumnos que ingresan en la Universidad Tecnológica Nacional poseen un conocimiento previo en el área de la matemática que es, en su mayor parte, de tipo algorítmico: operan, resuelven, manipulan, utilizan reglas, pero en general sus justificaciones son pobres y desconocen casi por completo las técnicas de demostración matemática por lo que, en este aspecto, cuentan casi exclusivamente con una visión *intuitiva* de cómo sostener adecuadamente una argumentación. En cuanto a lo geométrico, sus conocimientos se circunscriben a las nociones de la geometría plana y a la manipulación más o menos mecánica de ecuaciones de rectas y curvas elementales, y muy raras veces relacionan los conocimientos geométricos que poseen con la realidad espacial cotidiana.

En el presente trabajo, a través del análisis de los errores cometidos por los estudiantes al responder a un cuestionario sobre rectas en el espacio, se pretendió detectar la persistencia de ciertas ideas previas provenientes de la geometría plana, que revelaban que el correspondiente cambio conceptual no se había producido, a pesar de haber transitado los alumnos por un período de instrucción, ejercitación y evaluación sobre tópicos de geometría espacial. Se buscó, así mismo, detectar la presencia de ciertos modelos sintéticos que pudieran explicar algunos de esos errores comunes.

La razón de haber seleccionado estos contenidos para analizarlos a la luz de la teoría del cambio conceptual, la hallamos en el transcurso de una de nuestras propias clases en la cual, al tratar el tema de posiciones relativas y distancias entre puntos y rectas en el espacio, se desarrolló el siguiente diálogo: (Llamamos P a la profesora y A_1, A_2, A_3,… a los alumnos)

P: - *¿Cómo podríamos calcular la distancia desde un punto P_0 a una recta r del espacio?*

A_1: - *Se podría hallar la recta s perpendicular a r que pasa por el punto dado, hallar el punto intersección entre ambas rectas y luego la distancia entre ambos puntos…*

P: - *¿Y cómo harías para hallar un vector director de la recta s?*

A_1: - *Tomaría cualquier vector ortogonal a un vector director de la recta r.*

A_2: - *Yo hallaría la recta s perpendicular a r, considerando que su pendiente y la de r tienen la relación* $m_s = -\dfrac{1}{m_r}$

La clase está de acuerdo, salvo un alumno que reconoce que no hay en el espacio una única dirección perpendicular a una dada.

La profesora les muestra gráficamente varios vectores de distinta dirección, todos ortogonales a un vector director de *r* y junto con los alumnos (que parecen haber entendido el razonamiento) resuelven el tema planteado arribando finalmente a la fórmula de distancia entre un punto y una recta.

Al promediar la clase, la profesora queriendo utilizar el razonamiento anterior, les plantea el siguiente ejercicio:

P: - *¿Cómo podemos hallar la proyección ortogonal del punto* $A(-2,1,3)$ *sobre la recta* $r:(x,y,z)=(0,4,-2)+\lambda(-1,3,2)$ *?*

A_3: - *Encontrando la recta perpendicular a* r *que pasa por* A *y hallando el punto donde se cortan ambas rectas. Ése sería el punto pedido. Necesitamos un vector que sea perpendicular al director de r…*

La clase está de acuerdo con el razonamiento del alumno, y la docente debe volver a realizar su gráfico donde representa las múltiples posibilidades que existen en el espacio para trazar un vector ortogonal a una dirección dada…

Con intervalo de pocos minutos los alumnos, que parecían haber reconocido su error de razonamiento al querer aplicar a rectas en el espacio un tratamiento similar al empleado para rectas en el plano, cometen el mismo error al querer buscar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta: el cambio conceptual no se produjo, aún cuando la docente provocó el conflicto mostrando gráficamente la posibilidad de hallar múltiples vectores ortogonales a uno dado.

A raíz de esta experiencia, elaboramos un cuestionario con 4 ítems que se administró tiempo después a este mismo grupo de alumnos, y a otros grupos de nuestros alumnos con los que también fueron trabajados de manera similar los mismos temas. El cuestionario fue respondido en forma individual por los estudiantes dos semanas después de que se los hubiera evaluado formalmente sobre todos los contenidos relativos a rectas y planos en el espacio (de manera que no podríamos aducir como causas de error el "olvido" o la falta de revisión de los temas tratados en clase).

Reproducimos a continuación el cuestionario:

Nombre y apellido..Curso:..........................

Cuestionario de revisión

1. Indique si son correctas o no las siguientes afirmaciones para rectas en el espacio. Justifica tus respuestas.
   a) *"Dos rectas con igual pendiente y un punto en común son coincidentes".*
   b) *"Las rectas* $r:\begin{cases} P_0=(-3,-5,-1)\in r \\ \vec{u}=(1,-1,2)\parallel r \end{cases}$ *y* $s:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-10-\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$ *se cortan perpendicularmente".*
   c) "Dada la recta $r:\begin{cases} P_0=(0,-1,8)\in r \\ \vec{u}=(1,3,0)\parallel r \end{cases}$*, la recta perpendicular a r que pasa por (-1, 6, 1) es* $s:-3x+y-9=0$*".*
2. *Dados la recta* $r:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ *y el punto* $A=(7,-6,4)$ *halle*
   a) *la recta s paralela a r que pasa por A*
   b) *la recta* t *que pasa por A y corta perpendicularmente a r*

RESULTADOS

El cuestionario fue completado por 52 alumnos que están cursando Álgebra y Geometría Analítica en el 2° cuatrimestre 2009: 32 de un curso cuatrimestral y 20 de un curso anual.
A continuación se detallan los resultados obtenidos en cada uno de los ítems.

a) *"Dos rectas con igual pendiente y un punto en común son coincidentes".*

Sólo un alumno contesta que la afirmación es incorrecta porque no se puede hablar de pendiente de rectas en el espacio.
33 estudiantes dicen que el enunciado es correcto argumentando que dos rectas con igual pendiente y un punto en común tienen todos sus puntos en común y, entonces, son coincidentes, o afirmando que al tener la misma pendiente son paralelas y si además tienen un punto en común, son coincidentes. Uno de los alumnos graficó, para ilustrar, dos rectas coincidentes en el espacio. Estos estudiantes conservan aún su idea previa de rectas en el plano y no advierten que en el espacio la noción de pendiente no puede definirse.

15 alumnos dicen que la afirmación es incorrecta pero justifican mal con variados argumentos, revelando la presencia de diferentes modelos sintéticos. Algunos de los argumentos son: *"las rectas pueden ser alabeadas, ya que si las pendientes son iguales no siempre las rectas son paralelas", "dos rectas en el espacio son coincidentes si y sólo si tienen dos puntos en común y la misma pendiente", "en el espacio hay todo un haz de rectas que tienen la misma pendiente y pasan por un punto"," esto se da en rectas del plano, en el espacio pueden ser coincidentes como también concurrentes", "en el espacio no alcanza con tener un punto en común e igual pendiente, sino que deben tener el mismo término independiente".*

Sólo 3 alumnos no contestan este ítem.

Aquí, entonces, un 67% de los alumnos que responde pretende utilizar en el espacio, sin modificaciones, su idea previa de "pendiente de una recta del plano".

Casi un 31% de los alumnos que responde presenta algún tipo de modelo sintético.

b) "Las rectas $r:\begin{cases} P_0 = (-3,-5,-1) \in r \\ \vec{u} = (1,-1,2) \parallel r \end{cases}$ *y* $s:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -10-\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ *se cortan perpendicularmente".*

Solamente tres alumnos contestan que la afirmación es correcta y justifican adecuadamente, demostrando que los vectores directores de ambas rectas son ortogonales y que las rectas se cortan en un punto.

35 alumnos contestan que la afirmación es correcta, pero fundamentan mal su respuesta. 30 de ellos demuestran que los vectores directores son ortogonales y sólo con esto afirman que las rectas se cortan perpendicularmente, revelando que conservan su idea previa sobre ortogonalidad de rectas en el plano.

9 alumnos contestan que la afirmación es incorrecta; varios justifican demostrando la ortogonalidad de los vectores directores, y al querer hallar el punto de intersección, utilizan el mismo parámetro en ambas rectas dando origen a un sistema de ecuaciones incompatible, de modo que llegan a la conclusión de que no se cortan y afirman que son alabeadas. Uno de estos alumnos dice que *"para que las rectas se corten perpendicularmente sus pendientes deben ser inversas y opuestas una de la otra, y el producto entre los vectores paralelos a las rectas debe ser igual a cero"*, revelando una suerte de modelo sintético.

5 alumnos no contestan este ítem.

Aquí un 63% de los alumnos que contesta conserva la idea previa de las condiciones de ortogonalidad de rectas en el plano.

Los modelos sintéticos no resultaron aquí evidentes, salvo en un caso.

c) "Dada la recta $r:\begin{cases} P_0 = (0,-1,8) \in r \\ \vec{u} = (1,3,0) \parallel r \end{cases}$*, la recta perpendicular a r que pasa por (-1, 6, 1) es* $s: -3x + y - 9 = 0$".

19 alumnos no respondieron este ítem.

11 alumnos contestan y justifican bien, diciendo que *s* corresponde a la ecuación implícita de un plano y no de una recta en el espacio.

8 alumnos dicen que la afirmación es incorrecta pero justifican mal, considerando en su argumento que "el vector director de *s*" es $(1,3,0)$ (notemos que $(1,3)$ sería lo correcto si consideraran la ecuación $s: -3x + y - 9 = 0$ en el plano) o $(-3,1,-9)$ (se evidencia un modelo sintético pues consideran que $s: -3x + y - 9 = 0$ representa una recta)

14 alumnos contestan que es correcta, algunos de los cuales justifican tomando como "vector director de *s*" al vector $(-3,1,0)$, demuestran que $(1,3,0).(-3,1,0) = 0$ y verifican que $(-1,6,1)$ pertenece a la "recta" *s*. Otros demuestran solamente que $(-1,6,1)$ pertenece a *s* y con esto afirman que ambas "rectas" son perpendiculares. Todos estos alumnos no advierten la incompatibilidad de estar considerando $r: \begin{cases} P_0 = (0,-1,8) \in r \\ \vec{u} = (1,3,0) \parallel r \end{cases}$ y $s: -3x + y - 9 = 0$ como "ecuaciones de rectas en el espacio" evidenciando la presencia de un modelo sintético.

Un 66% de los alumnos que responde revela algún tipo de modelo sintético.

2. Dados la recta $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ *y el punto* $A = (7,-6,4)$ *halle*

a) la recta s paralela a r que pasa por A

28 alumnos resuelven bien este ejercicio: consideran a *s* como la recta que pasa por $(7,-6,4)$ y cuyo vector director es *u*=$(3,-2,-1)$ o un múltiplo escalar de *u*.

16 alumnos no lo resuelven.

8 alumnos cometen diversos errores al resolverlo, como tomar como vector director de *s* un vector ortogonal a *u*=$(3,-2,-1)$; o considerar que *s* pasa por $(2,-1,1)$; o tomar como vector director de *s* a $(2,-1,1)$; o hallar la "ecuación implícita" de *s*, como si se tratara de un plano.

En este ítem no se esperaba encontrar indicios de modelos sintéticos o de ideas previas; se lo incluyó sólo para introducir el ítem siguiente. De los alumnos que responden, un 87% lo hace correctamente y los errores observados no resultan representativos.

b) la recta t que pasa por A y corta perpendicularmente a r

Sólo 1 alumno resuelve correctamente, hallando el punto B proyección de A sobre *r* mediante la intersección de *r* con el plano perpendicular a *r* que pasa por A. Luego consideran la recta *t* como la recta que pasa por A y B. Un segundo alumno relata correctamente lo que haría, pero no lo concreta.

22 alumnos no resuelven el ejercicio.

28 alumnos cometen errores en su resolución, la mitad de los cuales evidencian modelos sintéticos:

- un alumno confunde recta con plano ya que halla el plano que pasa por A y que es ortogonal al vector *u*, y dice que es la ecuación de la recta *t* (una ecuación lineal en el espacio es la ecuación de una recta, como ocurre en el plano).

- 10 estudiantes consideran *t* como la recta que pasa por A y tiene por director un vector ortogonal a *u*=$(3,-2,-1)$ *cualquiera*: $(1,1,1)$, $(2,0,-6)$, $(1,-2,1)$, $(a,b,3a-2b)$, $P_0P_1 \times \vec{u}$, etc., (como en el plano, es posible tomar un vector *cualquiera* ortogonal a una dirección dada)
- Tres estudiantes ofrecen los siguientes modelos sintéticos interesantes, que recuerdan la fórmula $m_s = -\dfrac{1}{m_r}$ para las pendientes de rectas ortogonales en el plano:

  $t: \dfrac{x+7}{-1/3} = \dfrac{y-6}{1/2} = \dfrac{z+4}{1}$ (invirtió y cambió de signo las componentes del director de *r*)

  $t: (x, y, z) = (7,-6,4) + \lambda(-3,2,1)$ (cambió de signo las componentes del director de *r*)

  $t: (x, y, z) = (7,-6,4) - \dfrac{1}{\lambda}(3,-2,-1)$ (invirtió y cambió de signo el parámetro)

Del resto de los alumnos que cometen error, 4 plantean que el vector director de *t* debe ser ortogonal a *u*, pero no logran continuar; uno grafica la situación pero no resuelve el ejercicio; otros estudiantes toman como vector director de *t* al vector $(3,-2,-1)$;

En este ítem, un 46 % de los alumnos que responde evidencia modelos sintéticos.

CONCLUSIONES

Los alumnos que cursan Álgebra y Geometría Analítica manejan el concepto de recta en el plano (ecuación, elementos, propiedades, posiciones relativas): se trata de contenidos que adquirieron en la escuela media, reforzaron en el Seminario de Ingreso a la Universidad y revieron en la primera unidad de la asignatura que nos ocupa.

Los conocimientos sobre recta en el espacio introducidos en el curso no pueden ser simplemente "adicionados" a la información anterior que poseen, sino que requieren de una reestructuración de su conocimiento previo (es decir, requieren de un *cambio conceptual*) que, observamos, se produce en muy pocos casos: es importante el número de alumnos que extrapola al espacio el concepto de pendiente de un recta, y las condiciones de ortogonalidad de rectas, que resultan suficientes en el plano pero no así en el espacio. El concepto de *pendiente* de una recta en el plano actúa como "barrera" para la adquisición del nuevo concepto más general de *dirección* de una recta (válida en el plano y en el espacio) y algunos alumnos "superan" el conflicto elaborando una modelo intermedio en el que conviven ambas ideas, inacabadas y mal ensambladas.

Los contenidos relacionados con posiciones relativas de rectas en el espacio fueron ya desarrollados, ejercitados y evaluados con estos alumnos, y sin embargo subsisten estas ideas previas y modelos sintéticos que revelan que los estudiantes, en su mayoría, no se han apropiado de los conceptos. Las causas de que esto ocurra pueden llegar a pasar inadvertidas para la mayor parte de los docentes, que atribuirán los errores a falta de estudio o distracción, sin embargo subyace en su origen esta reestructuración necesaria de los conocimientos que no ha llegado a producirse, o se ha producido parcialmente, dando lugar, en el esfuerzo por asimilar la nueva información a la existente, a la creación de los modelos sintéticos que se manifiestan en los errores.

Nuestra intención al mostrar este trabajo es llamar la atención de los docentes sobre este hecho, que requiere de una readecuación de las acciones didácticas con el fin de evitar los mecanismos simplemente aditivos o los modelos sintéticos inadecuados que resultan fuente de error: saber identificar correctamente los distintos tipos de aprendizaje necesarios (simple adición o cambio conceptual) permite seleccionar las estrategias más efectivas en cada caso. Juzgamos que sería de gran utilidad conocer qué contenidos de la asignatura que se imparte requieren de un cambio conceptual y cuáles admiten una simple expansión del marco conceptual previo.

Para que los alumnos puedan reemplazar sus marcos conceptuales debe ocurrir que:

- sientan insatisfacción con sus concepciones previas;
- la nueva concepción les sea comprensible;
- la nueva concepción les parezca plausible;
- la nueva concepción les parezca útil. (Vosniadou y Verschaffel, 2004).

Todos estos pasos requieren de la adecuada intervención del docente: para provocar el conflicto oportuno, y para plantear los problemas adecuados que requieran de los nuevos conceptos para su resolución y pongan en evidencia la insuficiencia de las nociones previas. Aún así, la robustez de las ideas previas no garantiza que el cambio conceptual vaya a producirse, pero al menos se estará en el camino más adecuado.

Vosniadou y Verschaffel señalan que sería importante también que los alumnos mismos pudieran desarrollar habilidades metacognitivas que les permitieran identificar correctamente los distintos tipos de aprendizaje (aprendizaje aditivo ó cambio conceptual) de modo que pudieran aplicar las estrategias de aprendizaje más efectivas en cada caso. Personalmente nos parece que este objetivo es más difícil de alcanzar en el escaso tiempo que corresponde a un curso cuatrimestral o anual de nuestra asignatura, pero debería constituir un rasgo más de los que definen el perfil de alumno autónomo que pretendemos lograr a lo largo de la carrera universitaria en su totalidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asmuth, J. y Lance, R. (2006). Conceptual Change in Non Euclidean Mathematics. En: Proceedings of the *28th Annual Conference of the Cognitive Science Society and 5th International Conference of the Cognitive Science*, 30-35. New Jersey: Cognitive Science Society, Inc.

Ausubel, D. (1976). Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento. En: Elam, S. (Ed.) *La educación y la estructura del conocimiento.* Buenos Aires: El Ateneo.

Biza, I.; Souyoul, A. y Zachariades, T. (2005). Conceptual Change in Advanced Mathematical Thinking. En: *Actas del Cuarto Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática*, CERME 4.

Campanario, J. M. y Otero, J. C. (2000). Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias* 18 (2), 155-169

del Puerto, S.; Minnnard, C. y Seminara, S. (2007). Identificación y clasificación de los errores cometidos por los alumnos en el aprendizaje del Álgebra y la Geometría Analítica. *Elementos de Matemática*, *Publicación Didáctico Científica de la Universidad CAECE* 21 (81), 5-14.

Driver, R. y Easley, J. (1978). Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education*, (10), 37-70.

Driver, R.; Guesne, E. y Tiberghien, A. (1989). *Ideas científicas en la infancia y la adolescencia.* Madrid: Ediciones Morata.

Novak, J. (1979). The reception learning paradigm. *Journal of Research in Science Teaching* (16), 481-488

Posner, G.; Strike, K.; Hewson, P. y Gertzog, W. (1982). Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education* 66 (2), 221-227.

Rodríguez Moneo, M. (1999). *Conocimiento previo y cambio conceptual*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Schnotz, W.; Vosniadu, S. y Carretero, M. (Comps.) (2006). *Cambio conceptual y educación*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Shinno, Y. (2007). On the Teaching Situation of Conceptual Change: Epistemological Considerations of Irrational Numbers. En: Proceedings of the 31st. Annual General Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME31), (4), 185-192.

Tirosh, D. y Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education?. *Learning and Instruction* (14), 535-540.

Viennot, L. (1976). *Le Raisonnement Spontané en Dynamique Elémentaire*. Tesis doctoral. Université París 7. (Publicada en 1979 por Herman: París).

Vosniadou, S. y Vamvakoussi, X. (2006). Examining Mathematics Learning from Conceptual Change Point of View: Implications for the Design of Learning Environments. En: *Instructional Psychology: Past, Present and Future Trends. Sixteen Essays in honour of Erik De Conte.* Oxford: Elseivier Ltd.

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. En: *The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching, Special Issue of Learning and Instruction*, 14(5), 445-451.