CONSTRUIR UN PUENTE AL ÁLGEBRA LINEAL EN EL ENTORNO CABRI

Daniela I. Andreoli, Ma. Cristina Beltrametti, Cecilia J. Rodríguez Verardini
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste
Prov. de Corrientes (Argentina)
andreoli@exa.unne.edu.ar, macribel@exa.unne.edu.ar, charvey@arnet.com.ar

RESUMEN

Este artículo tiene como propósito dar a conocer algunos resultados de un trabajo de investigación que se viene desarrollando en el seno de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FaCENA), dependiente de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), y que surge de la necesidad de dar respuesta a algunos interrogantes con relación a las serias dificultades que se perciben en los estudiantes de primer año, para el logro de la apropiación de los conceptos básicos del Álgebra Lineal. En particular, el estudio se centra en la exploración de los procesos mentales asociados a la utilización del entorno geométrico Cabri, para la iniciación de los estudiantes en el aprendizaje de esta rama de la Matemática, en comparación con el habitual acercamiento algebraico, centrado en la construcción de los conceptos de vector, combinación, dependencia, independencia, transformaciones lineales. Asimismo, intenta caracterizar al menos una vía de acceso que asegure la transición del modo de pensamiento sintético-geométrico, al modo analítico-aritmético y analítico-estructural[1], de los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

Nuestro estudio se enmarca en el dominio de la Matemática Educativa. Al decir de Cantoral y Farfán (2000)

> El nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le han llamado Didáctica de las Matemáticas, *Didactique des Mathématiques*, *Didaktik der Mathematik*, por citar algunas de las escuelas más dinámicas. (p. 1)

[1] Artigue (1999) proporciona ejemplos respecto a estos modos de pensamiento cuando sostiene que: "Si uno piensa en las soluciones posibles de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas imaginándose el posicionamiento respectivo de tres planos en el espacio, está en el modo *sintético-geométrico*. Si uno piensa en este problema en términos de los resultados posibles de reducir una matriz de 3x3, está en el modo *analítico-aritmético*. Uno está en el modo *analítico-estructural* si, por ejemplo, piensa en términos de matrices singular y regular." (pp. 1382-1383)

No obstante la diferencia en las denominaciones adoptadas, según se trate de la tradición de escuela que los cobije, casi la totalidad de los investigadores utiliza indistintamente las tres denominaciones y esa es la postura que adoptamos a lo largo del presente trabajo.

Aquí convendremos que se trata de una disciplina científica autónoma que emergió en la década de los setenta en el seno de sectores académicos universitarios, con la pretensión de impactar positivamente en los sistemas educativos; que pone el acento en el estudio de los procesos de pensamiento propios del quehacer matemático, más bien que en la mera transferencia de contenidos y que se cuestiona sobre cómo aprenden Matemática los estudiantes. Este objetivo la ha llevado a plantearse sus propios interrogantes, desde una postura epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural, respecto a cómo construyó el conocimiento matemático la humanidad a lo largo del devenir histórico; cuál es el significado que los alumnos atribuyen a los términos, símbolos, conceptos y proposiciones de las obras matemáticas, y cuáles son las actividades que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático en los alumnos. Si bien recibe aportes de otras disciplinas, ha estructurado sus propios constructos teóricos como 'la transposición didáctica', 'los obstáculos epistemológicos', 'el contrato didáctico', 'las variables didácticas', 'la institucionalización', 'la ingeniería didáctica', etc.

El marco teórico específico, que tiene como propósito establecer un *corpus* mínimo de conceptos del campo de investigación en el que se desarrolla el presente trabajo, a fin de dotarlo de un sistema coordinado y coherente de nociones y proposiciones desde las cuales explicar, describir, justificar, analizar, fundamentar y argumentar, tanto las indagaciones como nuestras interpretaciones, en el abordaje del problema planteado, lo constituye la "Teoría Antropológica de lo Didáctico" (Chevallard, 1999/2002).

ANTECEDENTES

La exploración que nos ocupa recoge los resultados de otros dos trabajos; por una parte, "Construcción de los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de Primer Año de la Universidad" (Andreoli), y por otra, "Determinación de los niveles de pensamiento geométrico según la Teoría de Van Hiele de estudiantes de Profesorado en Matemática al inicio de un curso de Geometría Métrica" (Beltrametti, Esquivel, Ferrari), que se han desarrollado a partir de 2002 en la FaCENA, UNNE.

El trabajo citado en primer término (Cerutti y Andreoli, 2002; Andreoli, 2003; 2005a, 2005b; 2009) ha incluido, entre las tareas y metas, el análisis histórico-epistemológico del concepto de Dependencia Lineal y el estado del conocimiento, a través del relevamiento y análisis de las investigaciones que abordan temas de la Enseñanza del Álgebra Lineal. En el devenir de este estudio, pudo notarse que la construcción y organización de las ideas que estructuran el Álgebra Lineal, no fue ni rápida, ni sencilla, ni lineal. Lo más notable es que, en el transcurrir del tiempo hasta alcanzar la unificación y generalización en el siglo XIX, "el mismo autor podía usar la misma idea dos veces (en términos de la teoría del Álgebra Lineal) en contextos diferentes, sin notar la semejanza de los métodos.” (Dorier, 1995, p.254). Las nociones de Dependencia e Independencia Lineal alcanzan su status actual, luego de nacer al corazón de los sistemas lineales y atravesar todos los Espacios Vectoriales. Por otra parte, la preocupación de los investigadores se ve centrada en el formalismo y la generalización que es intrínseca al Álgebra Lineal, y las grandes discusiones están vinculadas a la reducción o no de los tópicos en un primer curso de la universidad, o bien, en *cómo se encara la entrada a ese estudio*.

Todos coinciden en la dificultad que plantea la diversidad de representaciones, lenguajes, modos de pensamiento, ajustes, puntos de vista, etc., que han quedado abarcados por el término de ‘flexibilidad cognitiva’. Asimismo, se percibe con fuerza la relevancia que otorgan a la introducción de lenguajes computacionales para favorecer la apropiación de los conceptos del Álgebra Lineal, muy particularmente los que constituyen el objeto de estudio de nuestro trabajo. En ese contexto podemos mencionar los artículos de Leron & Dubinsky (1995, p. 27); Harel (en Dorier (ed.), 1997, en Grandsard, 1998); Hillel y Sierpinska (1994, en Artigue, 2003, p. 128); Muench (1990); Hern & Long (en Dubinsky, 2001, pp. 9-10) ; Dreyfus, Hillel & Sierpinska (1998).

Este escenario, analizado a la luz del bajo rendimiento obtenido por los estudiantes, nos permitió concluir que el aprendizaje del Álgebra Lineal, en concordancia con su génesis histórica, no sólo es sumamente complejo, sino que además existen dudas entre los mismos investigadores con respecto a cuál es el modo más eficaz de entrar a su estudio.

Por otro lado, en el segundo de los trabajos citados, Beltrametti et al (2002, 2003, 2004, 2005) analizaron los avances de nivel alcanzados por los estudiantes en cursos de Geometría según el conocido Modelo de Van Hiele, que si bien no es reciente ni novedoso, no ha perdido vigencia bajo la mirada de la didáctica actual. Dicho modelo, desarrollado por el matrimonio Dina y Pierre Van Hiele, sostiene que alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que, con un nuevo orden de pensamiento, una persona es capaz, respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos (en Fouz, 2005) y explica al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible ayudarlos a pasar del nivel 0: reconocimiento o visualización; al 1: análisis; al 2: deducción informal u orden; al 3: deducción formal; al 4: rigor.

El modelo someramente descrito operó de referencia en el análisis del desempeño de dos grupos en que se dividió la matrícula inicial, aplicando a uno de ellos las prácticas de lápiz y papel y al otro, como complemento, el empleo del soft Cabri Géomètre. Los resultados revelaron que el 62% de los estudiantes que utilizaron el soft, pasó a un nivel superior de razonamiento, mientras que el 38%, permaneció en el mismo nivel y que estos valores resultaron ser recíprocos a los obtenidos por el grupo de estudiantes que realizaron prácticas tradicionales (Beltrametti et al, 2004).

Como se sabe, el soporte Cabri es un programa computacional desarrollado por Y. Baulac, F. Bellemain y J-M. Laborde del Instituto de Informática y Matemáticas Aplicadas de la

Universidad J. Fourier de Grenoble (Francia) y permitiría planificar un aprendizaje paso a paso, siguiendo el proceso:

Diseñar → Explorar → Modelizar → Conjeturar → Definir → Argumentar → Demostrar.

Alertados por los resultados de los dos trabajos citados, se gestó la idea de que el ordenador puede resultar una potente herramienta, por cuanto provee a los estudiantes de un ambiente exploratorio propicio para la construcción de algunos de sus conceptos centrales. En particular, y respecto a este último punto, llamó nuestra atención el artículo "Cabri based Linear Algebra", en el que Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1998) afirman que el acercamiento aritmético (en R^2 o R^3), con vectores como n-úplas y transformaciones como matrices, que es a la sazón, el más habitual en las clases de los primeros cursos de nuestra Universidad (Andreoli, 2003; 2009), tiene varios defectos y es una fuente de confusión para los estudiantes; a lo que agregan, que un conjunto de actividades con Cabri permite una introducción geométrica y exploratoria de nociones como la linealidad, la no linealidad, las transformaciones, etc..

Estos hallazgos, junto a la necesidad de efectuar un análisis institucional y regional del objeto de estudio, conforman el cuerpo de antecedentes, motivaciones y preocupaciones que fundamentan y dan sentido al abordaje de este estudio comparativo.

METODOLOGÍA

El tipo de trabajo que encaramos para el desarrollo de los proyectos de investigación citados, se encuadra en un estudio mixto descriptivo-explicativo según la clasificación Dankhe (1986, en Hernández, Fernández y Baptista, 1994), basado en la observación y recolección de datos; en algunos casos, a través del análisis historio-gráfico, y en otros, del análisis de contenido. El enfoque predominante es el cualitativo hermenéutico-interpretativo, combinado en ciertos casos, con métodos cuantitativos. Cabe mencionar que la forma de alcanzar el conocimiento que pretendemos en el caso de la experiencia que aquí reportamos, sin aspirar aún a la construcción de una secuencia didáctica acabada, consiste en el diseño e implementación de un dispositivo indagatorio destinado a una entrevista clínica y la observación. Los instrumentos empíricos fueron aplicados a alumnos que cursan la asignatura Álgebra y Geometría Analítica.

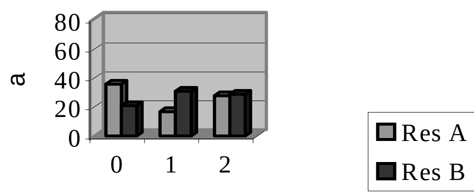
DESARROLLO

Con el propósito de que opere como referente para la comparación, retomamos aquí los resultados obtenidos en el primero de los trabajos citados, cuando se formularon dos preguntas más que básicas, entre otras 23 de otros temas del programa, a 81 alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas, en situación de examen. Cabe señalar que previamente se dictó el curso completo de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, que se imparte para varias carreras y que incluye la presentación axiomática de los espacios vectoriales, y sus definiciones centrales: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, generador, base, dimensión, pero no tiene incorporado el tópico que abarca las transformaciones lineales.

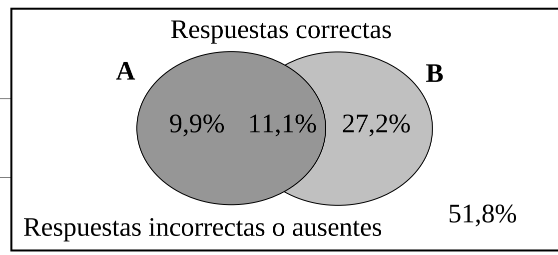
> Establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:
> A. *El vector (-3,2) es combinación lineal de los vectores (0,1) y (3,2)*
> B. *Los vectores (3,-2) y (-3/2,1) son linealmente independientes*.

Aproximadamente, el 21% de los alumnos resolvió correctamente la tarea A, el 38%, la tarea B, en tanto que sólo el 11% resolvió correctamente ambas tareas, mientras que el 21% figura con respuesta ausente en ambas.

Resultados de cada tarea



0: incorrecta
1: correcta
2: ausente



A \ B	0	1	2	TOTAL	
0	11	14	11	36	44,4%
1	7	**9**	1	17	21,0%
2	3	8	17	28	34,6%
TOTAL	21	31	29	81	100%
	25,9%	38,3%	35,8%	100%	

Un análisis *a priori*, a través de la construcción de dos praxeologías locales, arrojó como resultado que las técnicas más eficaces son: A) Observar que el cardinal del conjunto de los tres vectores de R^2 dados, supera la dimensión del espacio y que los vectores (0,1) y (3,2) no son múltiplos entre sí, y concluir que la afirmación es verdadera. B) Exhibir la combinación lineal $(-2)(-3/2,1)=(3,-2)$ y concluir que la afirmación es falsa. Sin embargo, los alumnos privilegiaron el uso de las definiciones, en ambos casos y lo más probable es que lo hayan hecho sin otorgar sentido a sus acciones. Tampoco se observaron señales de intento de encontrar mentalmente[2] los escalares (4) y (-1) que hacen verdadera a la proposición de la Tarea A. Ahora bien ¿qué interpretación cabe en estos casos en que los estudiantes optaron por la utilización de otras técnicas? Justamente, la elección de la técnica, que en otra circunstancia puede no ser relevante, según nuestro modo de ver se torna aquí en una pieza vital que nos revela una primera aproximación al grado de flexibilidad de los conocimientos de los alumnos, vinculado a su fragmentación o no, a su posibilidad de movilizarlos o no y ponerlos en relación cuando resulta económico y eficaz. Veamos ahora los resultados, cuando una tarea similar, es propuesta a los estudiantes en un entorno de geometría dinámico.

UNA APROXIMACIÓN A LAS TAREAS A Y B CON CABRI

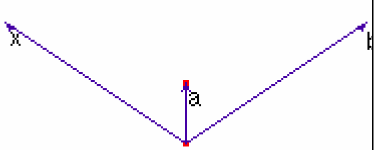
Durante el ciclo lectivo 2008 y durante el cursado de la misma asignatura, se formó una comisión de seis estudiantes ingresantes a los que se les brindó una breve capacitación en el manejo del soft Cabri, centrada exclusivamente en el trazado de vectores, suma y transformaciones sencillas, sin la utilización de macros ni sistemas de coordenadas.

Previo al desarrollo habitual del tópico que abarca las nociones básicas de espacios vectoriales se presentó a estos alumnos una única definición:

> "El vector *x* es una combinación lineal de los vectores *a* y *b* si, y sólo si, $\alpha.a+\beta.b=x$"

A continuación se les solicitó que en forma individual intenten resolver la Tarea A en un contexto bien diferente, mediante el uso exclusivo del soporte Cabri y sin coordenadas.

Se llevó a cabo entonces, con cada uno de ellos, una entrevista semiestructurada que fue grabada en audio. De los seis alumnos, sólo uno no logró ejecutar ni argumentar nada valioso; los restantes construyeron producciones similares a la que hemos seleccionado para transcribir a continuación, donde A significa 'alumno' y E 'entrevistador'.

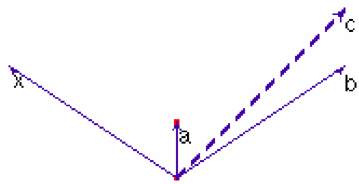
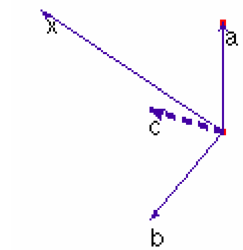
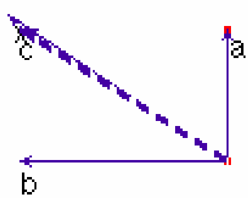


En una ventana nueva se presenta a los alumnos los tres vectores de la izquierda con la consigna:

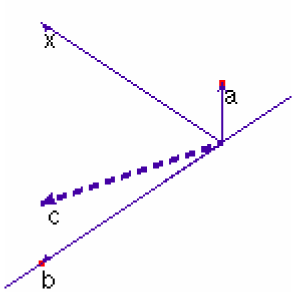
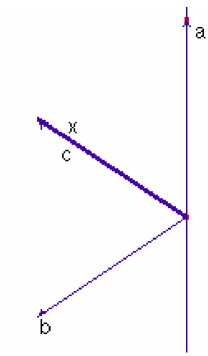
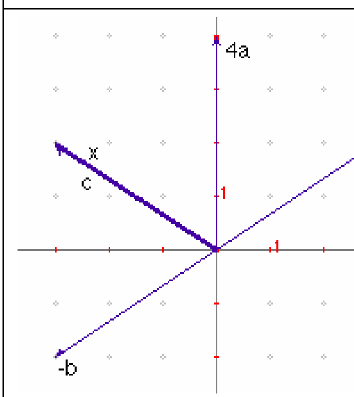
¿Es el vector *x* una combinación lineal de los vectores *a* y *b*?

---

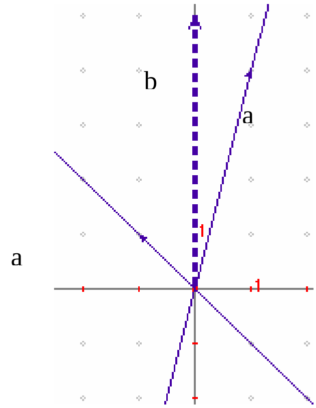
[2] Debe quedar claro que no estamos privilegiando aquí la técnica del 'tanteo' respecto al 'planteo de una ecuación' sino la posibiliadad de dirigir una 'mirada global' y cargada de significado a la expresión $\alpha(0,1)+\beta(3,2)=(-3,2)$, del mismo modo que la enfoca un experto para dar la solución de la ecuación $2x-1=0$, sin despejar.

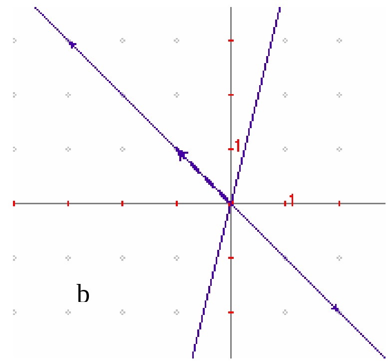
<table>
<tr><td>
</td><td>- A: Voy a efectuar la suma[3] de a y b.
- E: ¿Para qué?
- A: Para ver más o menos dónde se ubica. (Hace la suma y la designa c)
- A: No se parece en nada al vector x. Acá hay que hacer muchos cambios
- E: ¿Cambios a quién?
- A: A los vectores a y b
- E: ¿Es posible hacer cualquier modificación?
- A: Mmm... No lo se</td></tr>
<tr><td>
</td><td>(Prueba algunos cambios, dilata a; rota y encoge b)
- A: El vector c se está acercando al x, pero es mucho más chico.
(Intenta alargar el vector x pero nota que el soft no se lo permite)
- E: ¿Por qué crees que no te deja hacer esa transformación?
(Piensa un rato)
- A: ¡Ah!... ¡claro! El vector c es la suma de a y b ... <u>depende</u> de ellos. Sólo voy a poder modificar c, si cambio a y b ¿El soft sabe eso?
- E: Si, lo sabe.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>(Efectúa y deshace algunos cambios. Finalmente gira y dilata el vector b)
- A: Ahora parece que c coincide con x pero no exactamente.
- E: ¿Te preocupa que la superposición no sea exacta?
- A: Y ... Si ... Pero puede ser defecto del programa o del monitor.
- E: Bueno ... supongamos que es un defecto del programa o del monitor ¿cuál es tu respuesta entonces?
- A: Y ..., que sí ..., que el vector x es combinación lineal de los vectores a y b, porque se lo puede obtener combinándolos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">- E: ¿Aunque los vectores originales hayan cambiado tanto? Te das cuenta que ya no son los mismos ¿no?
(Revisa inmediatamente la única definición que se le brindó)
- A: Si, claro ... Mmm..., acá dice que para que lo sea, tengo que sumar un alfa por a más un beta por b, digo, un múltiplo de a con un múltiplo de b.
- E: ¿Pensás que es eso lo que hiciste?
- A: Este nuevo vector a puede ser ... porque lo dilaté ... y puede ser algún alfa por a ... pero este b que lo giré ... no me parece que pueda ser algún beta por el b viejo.
- E: ¿Pensás que nunca se pueden girar los vectores en estos casos?</td></tr>
</table>

[3] Otros alumnos no comenzaron efectuando la suma, transformaron los vectores *a* y *b* de modo que *x* resulte la suma de los transformados. Esta operatoria se considera equivalente a la descripta por cuanto el objetivo y los procesos mentales asociados son los mismos.

	(Piensa un rato y retoma la figura , traza la recta sostén de *b* y lo rota 180º) -A: nunca... nunca... no me parece. Por ejemplo este *b* nuevo, es el simétrico de *b* ... el opuesto de *b* ... quiero decir (-1).*b*. Y si lo achico o lo agrando, mientras esté en la misma recta, tampoco está prohibido. - E: Esa conclusión es muy buena, pero todavía no conseguís lo que estabas buscando ¿no? - A: no, todavía no, pero ahora se que sólo puedo mover los vectores sobre sus líneas.
	(Traza la recta sostén del vector *a* y comienza a dilatarlo hasta conseguir la superposición de los vectores *c* y *x*) - A: ¡Ahí está! Ahora están bien encimados. El vector c, y también el *x* se consigue sumando el opuesto de *b* y .... y un número positivo por *a* ... pero no conozco ese número. (Intenta ver cuántas veces cabe el vector original en el nuevo) - E: Si le agregamos un sistema de coordenadas ¿crees que podemos hallarlo? - A: Y si ... tal vez aunque sea en forma aproximada, a menos que sea un número entero. (La entrevistadora le enseña a incorporar un sistema cartesiano)
	- A: Primero me voy a asegurar que éste (señala el nuevo *b*) realmente sea el opuesto de *b*. (Retoma la figura y halla el trasformado de *b* mediante simetría central, lo anota –*b*, vuelve a dilatar *a*) - A: es 4 ... si, es 4.*a*. Además, el vector *x* parece ser el simétrico de *b*. - E: ¿Cuál es entonces la combinación lineal? - A: Es 4.*a* + (-1).*b* = *x* (dice verbalmente) - E: ¿Podés verificar ese resultado de otra manera? - A: Y... si me dan las coordenadas de *a* y *b*, si puedo, haciendo cuentas. - E: Bueno, te propongo que abras la figura original, le agregues un sistema y estimes las coordenadas de los vectores *a* y *b* dados.

- A: (Tomando el lápiz por primera vez escribe) *a*=(0;1); *b*=(3;2); *x*=(-3;2)
Entonces, debería ser <u>4.(0;1)+(-1).(3;2) = (-3;2)</u> Y si ... las cuentas dan.
- E: Bien. Ahora te pregunto ... Supongamos que α y β no fueran números enteros ¿hubieras podido hallarlos tan cómodamente?
- A: No ... no ... el ojo no ve tanto.
- E: ¿No se pueden hallar entonces?
- A: No se ... porque son dos valores desconocidos y yo se de la escuela que se necesitan dos ecuaciones. Yo veo una sola. (Escribe) <u>α.(0;1)+ β.(3;2) = (-3;2)</u>.... aunque ... alfa por cero más beta por 3, me tiene que dar -3 y alfa por uno.... si, parece que de allí salen dos (escribe) α.0+ β.3 = -3 ; α.1+ β.2 = 2. (Sin mencionar que se trata de un sistema, dice) ¡Ahí está! De la primera sale que β=-1 y puedo reemplazar en la otra. (Hace algunas cuentas) Si ... da α=4.
- E: Bien. Si ahora cambiamos algo y en lugar del vector (-3;2) escribimos cualquier otro sin alterar *a* y *b* ¿crees que podés usar el mismo procedimiento? Digo ¿sin ayuda del Cabri?
- A: Y si ... A mi me parece que sí ... que siempre van a salir dos valores, uno para alfa y otro para beta, aunque sean feos. (Prueba cambiando (-3;2) por (1;2) y escribe) <u>α.(0;1)+ β.(3;2) = (1;2)</u> Beta sale 1/3 y alfa ... (se pierde en las cuentas) ... pero sale. Es otra combinación, pero sale.
- E: ¿Y con un vector general?
- A: ¿Cómo un vector general? ¿Uno cualquiera de aquí? (Señala la rejilla que ve en pantalla)
- E: Sí, uno que represente a todos ellos.
- A: ¿Quiere decir con letras? Eso sólo se puede hacer con letras (escribe) <u>α.(0;1)+ β.(3;2) = (*e*;*f*)</u>. (Escribe dudando las dos ecuaciones) α.0+ β.3 = *e* ; α.1+ β.2 = *f* . Para hallar beta hay que dividir a *e* por 3 ... para alfa ... está más difícil ... (finalmente escribe) α+(*e*/3).2 = *f* entonces α = *f* – (2/3).*e*
- E: ¿Podés enunciar una conclusión general de lo que acabás de hacer?
- A: Que siempre se puede.
- E: ¿Qué es lo que se puede siempre?
- A: Escribir <u>cualquier vector</u> así. Encontrar primero los números y <u>escribirlos como una combinación lineal de los vectores *a* y *b*</u>.
- E: ¿Podríamos decir que los vectores *a* y *b* permiten 'fabricar' todos los demás vectores de ese plano?
- A: Si ... viéndolo al revés ... si.
- E: Así es. Para indicar ese hecho, decimos que los vectores *a* y *b* <u>generan</u> al plano. Ahora te pregunto ¿crees que cualquier par de vectores tendrán esa posibilidad de generar al plano?





(Comienza trazando un par de vectores en una ventana de Cabri y realiza la suma. Traza también sus rectas sostenes para usarlas de referencia cuando los dilata, encoge o gira. Mientras realiza esta operatoria, parece comenzar a aceptar la idea de que cualquier par de vectores permitiría generar el plano. Dilata *a* y cuando pretende girar *b*, éste se alinea con *a*.)

- A: Se que *b* no puede hacer ese giro, pero ahora que se quedó en la misma <u>dirección</u> que *a* me doy cuenta que si estos vectores fueran los originales, cualquier combinación se queda en esa recta, como ahora se quedó la suma. Así no se pueden fabricar todos los puntos del plano ... sólo los de esa recta.
- E: ¡Ajá! ¿Y cómo dirías que son esos vectores, además de alineados? Me refiero a sus coordenadas.
- A: Son múltiplos unos de otros ... como <u>proporcionales</u> ... (Interrumpimos aquí la trascripción de la entrevista)

REFLEXIONES

A pesar de la extremada sencillez de la tarea propuesta a los estudiantes, surgen del desarrollo de la entrevista, de la que acabamos de transcribir sólo una parte, diversas cuestiones dignas de destacar, en particular cuando se tiene en cuenta que no han recibido instrucción alguna vinculada al Álgebra Lineal, más que una sola definición del concepto de combinación lineal. Ello justifica el hecho de que no se hizo presente la técnica que hemos indicado como eficaz en el análisis *a priori* de la Tarea A, esto es, apelar a la dimensión del espacio en el que se estaba trabajando.
En la trascripción se han subrayado algunos términos (depende, líneas, dirección, proporcionalidad, escritura de todos los vectores, etc.) introducidos en el escenario didáctico por parte de los alumnos, que revelan la aparición de procesos mentales que permitirían la transición del modo de pensamiento sintético-geométrico, al modo analítico-aritmético y luego al analítico-estructural que hemos mencionando en el comienzo.

Prueba de ello es la evolución que puede observarse en las expresiones que van desde lo verbal, hasta alcanzar un nivel avanzado de generalización y formalismo, tal como puede apreciarse en las siguientes escrituras:

$$4.a + (-1).b = x \rightarrow 4.(0;1)+(-1).(3;2) = (-3;2) \rightarrow \alpha.(0;1)+ \beta.(3;2) = (-3;2) \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha.(0;1)+ \beta.(3;2) = (1;2) \rightarrow \alpha.(0;1)+ \beta.(3;2) = (e;f)$$

No nos pasan desapercibidas algunas cuestiones de formalismo que habrá que atender, como por ejemplo el hecho de que los estudiantes conservan la notación de los vectores, aún luego haberlos transformado, sin embargo, parecen tener clara la idea de que se trata de múltiplos de aquellos.
Admitiendo que resta mucho por hacer, y reconociendo las limitaciones naturales de los contextos geométricos, queda a la vista un camino abierto a los conceptos de dependencia e independencia lineal, a la linealidad y no linealidad, a la proporcionalidad como idea central de lo lineal, a las nociones de generador, base y dimensión. Con esta base robusta, más tarde habrá que abordar la tarea de encontrar un acceso a otros espacios vectoriales, de lo contrario, el intento habrá sido en vano.

Finalmente, este estudio pretende ser el inicio, sólo una humilde idea de cómo es posible comenzar a construir un puente al Álgebra Lineal de modo que los estudiantes no tengan la sensación de haber desembarcado en un nuevo planeta y puedan encontrar su camino en este desconocido mundo. (Adaptado de Dorier (ed.) (1997), en Gransard (1998))

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andreoli, D. (2003). Construcción de los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de Primer Año de la Universidad (Segunda Fase). Disponible en: http://www.unne.edu.ar.

Andreoli, D. (2005a). Construcción de los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de Primer Año de la Universidad (Tercera Fase). Disponible en http://www.unne.edu.ar.

Andreoli, D. (2005b). La Noción de la Dependencia Lineal y el Pensamiento Matemático en Primer Año de la Universidad. *Revista del Instituto de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la UNNE*. Resistencia. Argentina.

Andreoli, D. (2009). Análisis de los Obstáculos en la Construcción del Concepto de Dependencia Lineal en Alumnos de Primer Año de la Universidad. Tesis de Maestría no publicada. CICATA. IPN. México, D.F.

Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education, *Notices of the American Mathematical Society, 46* (11), pp. 1377-1385. Disponible en *www.ams.org/notices/ 199911/fea-artigue.pdf* Acceso 2004 Dic. 13.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X*, No. 2, pp. 117-134. Traducción del original realizada por Alejandro S. González-Martín con la autorización de la autora. Disponible en *www.emis.de/journals/BAMV/conten/ vol10/artigue.pdf* Acceso 2004 Dic. 13.

Beltrametti, M.; Esquivel, M.; Ferrari, E. (2002). Teoría de Van Hiele y Cabrí Géométre en la construcción del concepto de transformaciones rígidas del plano.

Beltrametti, M.; Esquivel, M.; Ferrari, E. (2003). Determinación de los niveles de pensamiento geométrico según la Teoría de Van Hiele de estudiantes de Profesorado en Matemática al inicio de un curso de Geometría Métrica.

Beltrametti, M.; Esquivel, M.; Ferrari, E. (2004). Análisis de la evolución de los niveles de pensamiento geométrico en la construcción del concepto de Transformaciones Rígidas del Plano según la Teoría de Van Hiele y el empleo del Soft Cabrí Géomètre de estudiantes del Profesorado en Matemática que cursaron la asignatura Geometría Métrica y Trigonometría en el año 2003.

Beltrametti, M.; Esquivel, M.; Ferrari, E. (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes del Profesorado en Matemática.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Cerutti, R.; Andreoli, D. (2002). Construcción de los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de Primer Año de la Universidad (Primera Fase).

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2): 221-266. Traducción Barroso, R. y Fernández, T. *Revista Eletrónica de Didáctica de las Matemáticas*. Publicación Trimestral. Año 3, nº 2: 1-33. Octubre 2002. Universidad Autónoma de Querétaro. (México). Revisión Chevallard, Y. y Bosch, M. Disponible en *http://www.uaq.mx/matematicas/redm/articulos.html*?1005. Acceso 6 Dic. 2004.

Dorier, J.-L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia Mathematica*, *22*(3), 1995, 227-261.

Dubinsky, E. (2001). Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at College Level, *Purdue University and Education Development Center*, pp. 1-24. Disponible en *http://trident.mcs.kent.edu/~edd/publications.html*. Acceso 2004 Dic 13.

Dreyfus, T., Hillel, J. & Sierpinska, A. (1998), Cabri-based Linear Algebra: transformations. *Paper presented at CERME-1* (First Conference on European Research in Mathematics Education, Osnabrück, August 1998). pp.209-221. Disponible en http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html, Acceso 2004 Dic.13.

Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Disponible en http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf.

Gransard, F. (1998). Book Reviews. ZDM 98/6, pp. 206-210, Brussels (Belgium). Reseña del libro: Dorier J.-L. (ed.) (1997). *L'algèbre linéaire en question*, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble: La Pensée Sauvage Éditeur. (331 pages).

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1994). *Metodología de la investigación*. Ed. McGraw Hill Interamericana de México, S.A. de C:V., México, D.F., págs.505.

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An Abstract Algebra Story, *American Mathematical Monthly*, 102, 3, March 1995, pp. 227-242. Disponible en http://trident.mcs.kent.edu/ ~edd/publications.html, pp. 1-32. Acceso 2004 Dic. 13.

Muench, D. (1990). Teaching and Learning the Concept of Linear Dependence using ISETL, *Eastern Small Colleges computing Conference*, Allentown, PA, August 1990, pp. 1-6.