DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU APLICACIÓN DIDACTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Julio Cesar Barreto García
Instituto Universitario de Tecnología "Antonio José de Sucre". San Felipe.
Instituto Universitario de Mejoramiento Profesional. UPEL, San Felipe.
Instituto Técnico y Manual Lissette Rodríguez. INCES San Felipe.
Liceo Bolivariano "José Antonio Sosa Guillen". Palito Blanco.
Liceo Bolivariano "José Antonio Páez". Boraure. (Venezuela)
juliocbarretog@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo analizaremos un poco la acepción geométrica del producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades en relación a la noción de área, tomando en consideración la aditividad que guardan las figuras geométricas elementales que la conforman al construir este producto notable en forma geométrica, bien sean estos paralelogramos unos cuadrados o rectángulos. Además, veremos la aplicación de esta suma del cuadrado de dos cantidades tratados desde un punto de vista geométrico aplicado en la solución de la ecuación cuadrática o mejor conocida ecuación de segundo grado, usando algunos procesos cognitivos y algunas aplicaciones algebraicas.

Palabras clave: magnitud, procesos cognitivos, producto notable, ecuación de segundo grado, Teorema de Pitágoras.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las acciones cognitivas llamada también los *procesos cognitivos* en el campo de la *Didáctica de la Matemática* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en la percepción geométrica del producto notable del cuadrado de una suma y alguna de sus aplicaciones en diversas situaciones que se les presenten cuando se usen en la ecuación de segundo grado, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998) y desarrollados por Torregrosa y Quesada (2007) en la ultima referencia, en donde el proceso cognitivo de *visualización* está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente, tomando en consideración la idea de área. La coordinación de estos *procesos cognitivos* les permitirá *construir* desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables como lo es el cuadrado de una suma de un binomio, las cuales necesitan del concepto de conjunto elemental y de figuras congruentes para facilitar la deducción y aplicación de estas fórmulas matemáticas.

RELEVANCIA

Es razonable pensar que los primeros orígenes de la geometría se encuentran en los mismos orígenes de la humanidad, pues seguramente el hombre primitivo clasificaba, aun de manera inconsciente, los objetos que le rodeaban según su forma. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento -informal e intuitivo- a la geometría, la cual parte para el estudio de área de conceptos primitivos que se toman en cuenta para desarrollar toda la teoría correspondiente, como mostraremos que lo hicieron los griegos antes de Cristo, según lo escrito en los Elementos de Euclides de acuerdo con la referencia de Heath, T. (1956), lo cual nos da una información histórica muy importante a este artículo de acuerdo con el desarrollo de la aplicaciones de la idea de área en la geometría. Es importante destacar que usáremos algunos *procesos cognitivos* que se usan en geometría como propuesta didáctica en el aula, en particular, a la *visualización-aprehensión* como camino para llegar al *razonamiento* matemático.

REFERENTES TEÓRICOS

El campo de la *Didáctica de la Matemática* ha tomado un auge muy importante en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los *procesos cognitivos* que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas específicamente de geometría en los cuales estén envueltos.

En este artículo usaremos el modelo propuesto por Duval, en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* definido por Zazkis et al. (1996) como “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (p. 441).

Un ejemplo lo ofrece Plasencia (2000): Imaginemos un paseo por la playa. Este paseo puede ser realizado o no, es decir, podemos construirlo mentalmente o recordar un paseo realizado. Imaginando el paseo, podemos: sentir la arena en nuestros pies, el frescor del aire en la cara (sentido del tacto); oír el sonido del mar (sentido auditivo); oler una violeta (sentido del olfato); ver la playa, las montañas, el paisaje (sentido visual); saborear el pescado de un determinado bar (sentido del gusto), o el sabor y el olor de la imagen visual de una comida sabrosa (combinación de las anteriores). Este concepto de *visualización* lo restringimos por el de *aprehensión*, en el cual “Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar”, según el Diccionario de la Real Academia Española (2001). En estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante realice por ejemplo una *aprehensión operativa de reconfiguración* (Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas planas según la Real Academia) el cual se usa al hallar la fórmula para calcular el área de un romboide la cual se logra a través de un *razonamiento discursivo como un proceso natural* (El cual es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación). Asimismo, se puede usar al tomar unos paralelogramos bien sean estos cuadrados y rectángulos y logremos formar el cuadrado de una suma de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica, y a través de esto resolver problemas numéricos relacionados con la fórmula cuadrática, tratándolos como si fueran problemas geométricos, es decir, haciendo una analogía entre la parte algebraica y geométrica que tiene un determinado problema logrando así incentivar la *visualización*, aunque sea de una manera un poco restringida ya que no es originada por el uso de todos los sentidos.

Además, usaremos un *proceso cognitivo* llamado *aprehensión operativa de cambio figural* (Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones), como por ejemplo al colocar un triángulo congruente con otro dado para formar un romboide al cual le habíamos deducido la fórmula para calcular su área de acuerdo a lo mencionado anteriormente y a partir de allí nos originan una *conjetura sin demostración* (La cual permite resolver el problema aceptando las conjeturas simples, a través de una *aprehensión operativa de cambio figural* y que conduce a la solución de un problema) y obtenemos las fórmulas para calcular el área de un triángulo cualquiera.

"La política posee un valor pasajero, mientras que una ecuación es valida para toda la eternidad" Albert Einstein (Ulm, 14 de marzo de 1879 – Princeton, 18 de abril de 1955)

DEDUCCIONES DE ALGUNAS FÓRMULAS PARA CALCULAR LAS ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS POLIGONALES

Las matemáticas son el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. Así vamos a dar las primeras definiciones, las cuales pueden profundizarse en el artículo de Barreto, J. (2008), esto nos va a servir para ver distintas formas de deducir una teoría matemática. Empecemos definiendo los conceptos primitivos que necesitamos para armar la teoría:

Definición 1 (Magnitud): Es todo aquel objeto o fenómeno que se pueda medir. Entre las magnitudes que vamos a usar están las denominadas *"magnitudes escalares",* las cuales quedan completamente identificadas dando su valor, que siempre es un número real acompañado de una unidad y trataremos mas específicamente las longitudes y las áreas de diferentes figuras geométricas, las cuales las iremos conociendo de una manera deductiva, partiendo de conceptos primitivos conocidos por los matemáticos griegos.

Definición 2 (Línea poligonal): Es la figura plana obtenida trazando segmentos no alineados, de modo que dos segmentos consecutivos tengan sólo un extremo común. Esto lo veremos en la **Figura 1** de abajo:

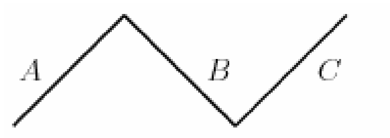


Figura 1: Línea poligonal.

Si cada vértice pertenece a dos lados, la poligonal se llama cerrada.

Definición 3 (Polígono): Es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Definición 4 (Cuadrilátero): Es un polígono de cuatro lados.

Definición 5 (Paralelogramo): Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Definición 6 (Rectángulo): Son los paralelogramos que tiene todos sus ángulos rectos.

Partiendo del cálculo de áreas de diferentes figuras poligonales se puede desarrollar a priori la idea de ***Medida***, partiendo de hechos primitivos conocidos por los griegos, tales como los dos siguientes:

(i). El área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab.

(ii). El área de un rectángulo es invariante por traslación.

Donde la **Figura 2** nos muestra lo sucedido:

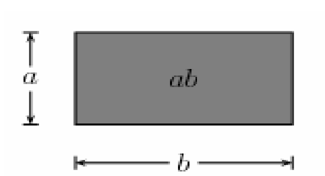


Figura 2: Rectángulo de longitudes en la base b y en la altura a.

Demos ahora la siguiente definición:

Definición 7 (Conjunto elemental): Un conjunto se llama elemental si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos. Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental, esto lo veremos en la **Figura 3** de abajo:

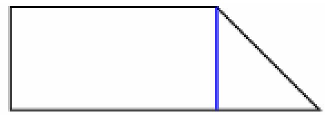


Figura 3: Representación geométrica de un conjunto elemental.

Ahora bien, de acuerdo a estos dos hechos primitivos tenemos que un paralelogramo rectángulo de iguales lados como es el caso del cuadrado tiene área igual al producto de sus lados, es decir, lo que vino a ser el lado al cuadrado. Veamos la **Figura 4** de abajo:

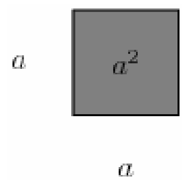


Figura 4: Rectángulo de lados iguales llamado cuadrado. Se puede decir que todo cuadrado es un rectángulo ya que es un paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos, pero que todo rectángulo no es necesariamente un cuadrado, como un ejemplo de esto lo podemos ver en la **Figura 2** de arriba.

Axioma[1] **1:** El área de un conjunto elemental es aditiva.

Esto quiere decir que: Si A y B son conjuntos elementales tal que A intersecado con B es vacío, un punto o un segmento, entonces el área de A unión B es igual a la suma del área de A mas el área de B.

Un buen uso de este **Axioma 1**, se puede ver en el siguiente **Ejercicio 1**, donde a partir de este axioma y los hechos primitivos, podemos hallar la fórmula para calcular el área de un romboide.

Definición 8 (Romboide): Es el paralelogramo que no tiene ni sus ángulos ni sus lados iguales. Comúnmente al romboide se le denomina simplemente paralelogramo o también paralelogramo no rectangular.

Ejercicio 1: Hallar la fórmula para calcular el área de un romboide.

[1] Son las afirmaciones que se aceptan sin ser demostradas.

Solución: Como todo paralelogramo no rectangular (romboide) como en la **Figura 5** de abajo y a la izquierda, puede ser transformado en un rectángulo de igual área, aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*, esto lo hacemos moviendo el triángulo AEC a la derecha del paralelogramo no rectangular para formar el triángulo BFD. Ahora, veamos lo ocurrido en la **Figura 5** de abajo a la derecha:

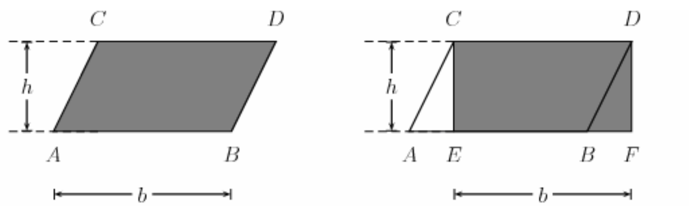


Figura 5: A la izquierda se muestra un paralelogramo no rectangular de longitudes en la base b y en la altura h. A la derecha se le aplica al paralelogramo no rectangular una *aprehensión operativa de reconfiguración*.

Y por la propiedad primitiva (ii) vemos que el paralelogramo no rectangular $ABCD$ ha sido transformado en el rectángulo $EFDC$ de igual área, de esta forma partiendo de un *razonamiento discursivo como un proceso natural* tenemos que el área del paralelogramo no rectangular viene dada por la fórmula:

$$A_{\text{P}} = b \times h.$$

Donde A_{P} denota el área del paralelogramo no rectangular, b es la longitud de la base y h es la longitud de la altura.

Observación 1: Aunque tienen la misma fórmula para calcular el área lo que cambia siempre es el nombre de las longitudes, es decir, lo que para el paralelogramo no rectangular puede ser base y altura, para el rectángulo era largo y ancho.

Ahora bien, usando la siguiente definición podemos ampliar nuestras fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas poligonales. Veamos:

Definición 9 (Figura congruente): Dos figuras son congruentes si se pueden hacer coincidir en todos sus puntos mediante una isometría (traslación, rotación, simetría).

Definición 10 (Triángulo): Es un polígono de tres lados.

Ahora podemos hallar la fórmula para calcular el área de un triángulo cualquiera.

Ejercicio 2: Hallar la fórmula para calcular el área de un triángulo cualquiera.

Solución:
Para calcular el área del triángulo ABC, colocamos mediante una *aprehensión operativa de cambio figural* el triángulo BCD congruente con el triángulo ABC como se muestra en la **Figura 6** de abajo y a la derecha, formando el romboide $ABCD$ con fórmula para el área deducida anteriormente, y de esta forma partiendo de una *conjetura sin demostración,* tenemos que el área del triángulo ABC es la mitad del área del romboide $ABCD$:

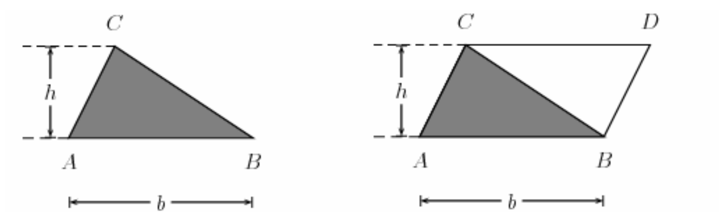


Figura 6: A la izquierda se muestra un triángulo de longitudes en la base b y en la altura h. A la derecha se le coloca al triángulo otro triángulo congruente con este mediante una *aprehensión operativa de cambio figural.*

Así, la fórmula para calcular el área de esta figura es:

$$A_T = \frac{b \times h}{2}.$$

Donde A_T denota el área del triángulo, b es la longitud de la base y h es la longitud de la altura.

Usando todo lo anteriormente definido y deducido podemos realizar el siguiente **Ejercicio 3**. Se puede revisar la referencia de Barreto, J (2008).

Ejercicio 3:

- Hallar la fórmula para calcular el área de un trapecio.
- Hallar la fórmula para calcular el área de un rombo.
- Hallar la fórmula para calcular el área de un polígono regular cualquiera partiendo por ejemplo un pentágono regular, y luego un hexágono regular hasta que se deduzca una fórmula general para un polígono regular cualquiera.

INTERPRETACIONES GEOMÉTRICAS

Ahora podemos aplicar las fórmulas de área del cuadrado y de los rectángulos anteriores para ver el producto notable del cuadrado de una suma desde una perspectiva geométrica.

Producto notable del cuadrado de una suma de dos cantidades

Ahora veamos como podemos representar geométricamente el cuadrado de la suma de dos cantidades cuando los valores son positivos. Usemos los siguientes pasos:

Construimos dos cuadrados, uno de a unidades de lado y otro de b unidades de lado como veremos en la **Figura 7** de abajo:

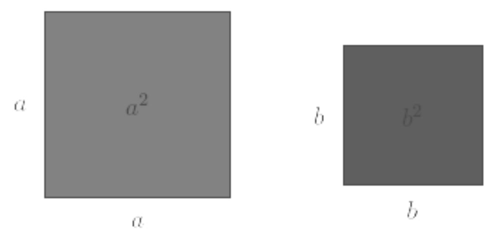


Figura 7: Dos cuadrado, uno de lado a y otro de lado $b.$ Dentro de los cuadrados se muestra el área de cada uno de acuerdo a lo deducido anteriormente.

Construimos dos rectángulos de largo a y ancho $b,$ como en la **Figura 8** siguiente:

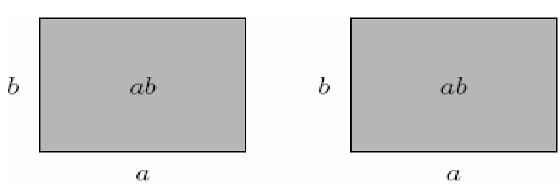
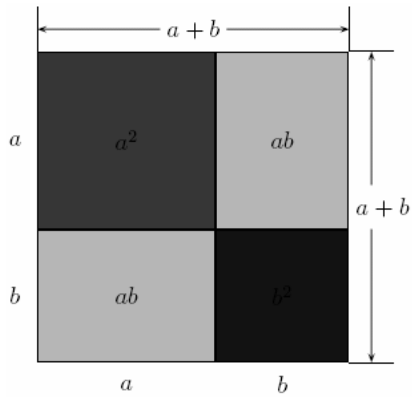


Figura 8: Dos rectángulos de largo a y ancho $b.$ Dentro de los cuadrados se muestran el área de cada uno de acuerdo a lo deducido anteriormente.

Uniendo estas cuatro figuras, teniendo en cuenta la *aprehensión operativa de reconfiguración*, podemos formar un cuadrado más grande de $a + b$ unidades de lado como vemos la **Figura 9** a continuación:



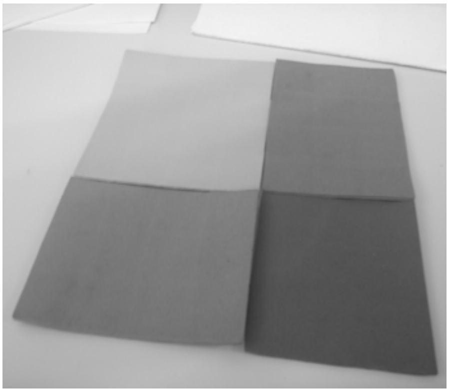


Figura 9: Acepción geométrica del cuadrado de una suma, a la izquierda se muestra la *subconfiguración* hecha con los polígonos de la **Figura 7** y de la **Figura 8** dadas anteriormente. Y a la derecha una foto hecha con figuras para actividades con foami[2].

El área de este cuadrado es $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$, como puede verse en la **Figura 9** anterior, y así el área completa está formada por un cuadrado rojo de área a^2, un cuadrado azul de área b^2 y dos rectángulos verdes de área ab cada uno o sea $2ab$. Esto es debido a que los rectángulos, bien sean estos cuadrados, son conjuntos elementales, tenemos que el área de estos de acuerdo al **Axioma 1** es aditiva.

Así, tenemos la siguiente *conjetura sin demostración*:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1).$$

a) Resolver la ecuación de segundo grado simple, usando el trinomio cuadrado perfecto, centrando la *visualización* en una ecuación factorizada y llevando la comprensión de la fórmula de Bhaskara.

Por ejemplo, resuelva la ecuación de segundo grado $x^2+4x+4=0$ para lo cual considere una **Figura 10** de debajo de acuerdo con lo efectuado en la **Figura 9**:

[2] Foto tomada por los compañeros participantes del IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática para unas actividades de un taller efectuado en la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA) Canoas/RS, los días 25, 26 e 27 de outubro de 2007.

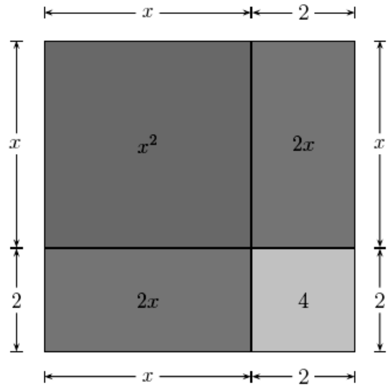


Figura 10: Configuración geométrica de un cuadrado de lado $x+2$.

Luego, notamos que con estos tres términos formamos un área dada por un cuadrado de lado $(x\ +\ 2)$, así:

$$\begin{aligned}(x\ +\ 2)^2 &= 0.\\ \sqrt{(x\ +\ 2)^2} &= \sqrt{0}.\\ x+2 &= 0.\\ x+2-2 &= 0-2.\\ x &= -2.\end{aligned}$$

Así, el valor de x que anula la ecuación es -2. En este caso la ecuación admite dos soluciones iguales.

- Utiliza este procedimiento geométrico para resolver la ecuación de segundo grado: $x^2+bx+c=0.$

Solución: Tenemos los siguientes datos: $a, b, c =$ coeficientes o términos de la ecuación, $x =$ incógnita y $a \neq 0$. Ahora, dividiendo la ecuación $ax^2+bx+c=0$ entre $a \neq 0$ tenemos lo siguiente:

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}=0-\frac{c}{a}, \text{sumando opuestos a ambos lados de la igualdad.}$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}, \text{ reduciendo.}$$

Luego, asociemos a x^2 con el área de un cuadrado de lado x, $\frac{bx}{a}$ con el área de dos rectángulos de ancho $\frac{b}{2a}$ y largo x, es decir, de área $\frac{bx}{2a}$ cada uno para lo cual podemos usar el **Axioma 1** y formar un cuadrado como el mostrado en la **Figura 11** de abajo agregando un cuadrado de área $\frac{b^2}{4a^2}$:

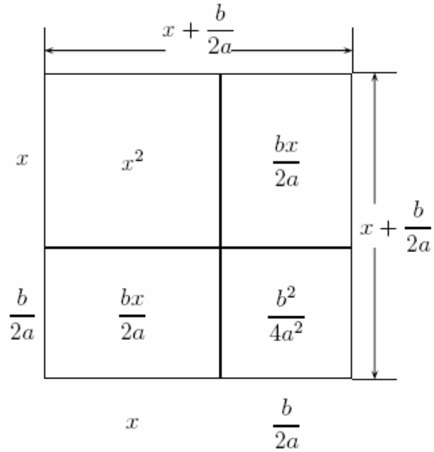


Figura 11: Representación geométrica de un cuadrado de lado $x + \frac{b}{2a}$.

Así, tenemos que cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo*[3] que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad (2).$$

Sumando el área $\frac{b^2}{4a^2}$ de un cuadrado de lado $\frac{b}{2a}$ ambos lados de la ecuación. Luego factorizando de acuerdo a la **Figura 11** de arriba tenemos:

[3] Es la asociación de un dibujo a una afirmación matemática. Donde en el dibujo podemos obtener un objeto mental que no tiene por qué ser el mismo para todos los observadores, ya que el dibujo está unido a unas afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades o relaciones) que la figura (imagen mental de un objeto físico) no posee, y le son atribuidas por el observador.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2},$$ de acuerdo a la Figura 14 y la ecuación (2).

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}},$$ extrayendo raíz cuadrada a ambos lado de la igualdad.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$ pues $x+\frac{b}{2a}$ es positivo y sumando fracciones.

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}},$$ restando $\frac{b}{2a}$ a ambos lados de la igualdad.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$ reduciendo y sumando fracciones.

Por tanto el conjunto solución es $U=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\},$ los cuales son los valores que anula la ecuación.

- Una utilidad numérica para la ecuación (1) es hallar la solución de cuadrados de números mayores que 10, por ejemplo el cuadrado de 11 colocándola de la manera siguiente: $(11)^2=(10+1)^2=10^2+2(10)(1)+1^2=100+20+1=121$. Colocando $a=10$ y $b=1$. Así, sucesivamente lo podemos usar para calcular cualquier cuadrado de un número.

- Generaliza el procedimiento geométrico anterior (Bhaskara) para resolver la ecuación: $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$.

b) Uno de los matemáticos Árabes más importantes durante la época de la expansión Árabe fue Al-khuwarizmi[4]. En el "Algebra" de Al-khuwarizmi se resuelven varios tipos de ecuaciones mediante consideraciones geométricas. El método que utiliza para la solución geométrica de ciertas ecuaciones de segundo grado consiste en la igualación de áreas cuidadosamente seleccionadas para la *interpretación geométrica* de la ecuación de segundo grado. Por ejemplo una de esas ecuaciones, en la notación actual, es $x^2+10x=39$, para lo cual considera una **Figura 12** como la siguiente:

[4] De aquí surgió la palabra Algoritmo, pues de la deformación del nombre de este matemático por intermedio de las diversas traducciones que se hacían, modificaron dicho nombre hasta que se convirtió en Algoritmo. Un Algoritmo es una lista completa de instrucciones o pasos necesarios para realizar una tarea o un cálculo. Los pasos en un Algoritmo pueden consistir en descripciones precisas de cada detalle o en descripciones generales.

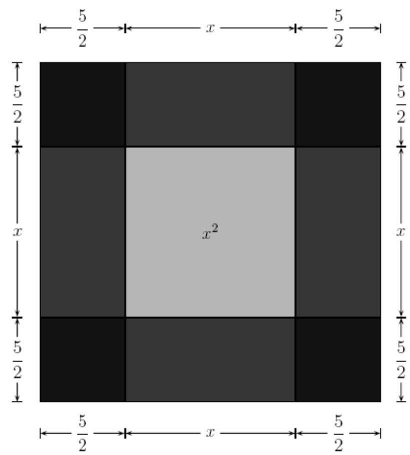


Figura 12: Un cuadrado en el centro de área x^2 (lado x) y cuatro cuadrados de lado $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

Sea A el área del cuadrado más grande, se tiene que:

$$A = x^2 + 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{5}{2}\right)x = x^2 + 10x + 4\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$= 39 + 25, \text{ pues } x^2 + 10x = 39.$$
$$= 64. \qquad (1)$$

Por otra parte, calculando el área de A como un cuadrado, es decir: $A = l^2$. Donde,

$$l = x + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}.$$
$$l = x + 5.$$

Tenemos que: $$A = (x+5)^2. \qquad (2)$$

Luego, de (1) y (2) nos queda:

$$(x+5)^2 = 64.$$
$$x + 5 = 8, \quad \textit{(únicamente la raíz cuadrada positiva).} \qquad (3)$$
$$x = 3.$$

- ¿Porqué se tomó únicamente la raíz cuadrada positiva en (3)?

Otra aplicación importante de este producto notable es que podemos partir en vez del rectángulo como la figura elemental para generar las deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas poligonales, podemos partir del cuadrado y deducir el área del rectángulo, es decir, partamos que el área de un cuadrado de lado l es l^2. Luego formemos un cuadrado como el mostrado en la **Figura 13** de abajo:

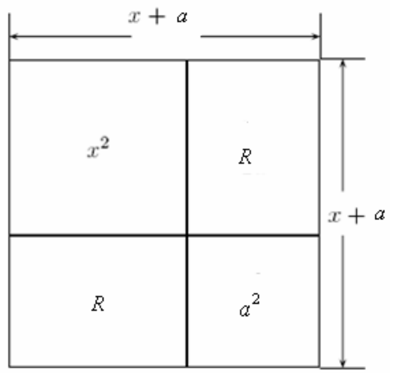


Figura 13: Representación geométrica de un cuadrado de lado $x+a$.

Así, tenemos que cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo* que el área del cuadrado de lado $x+a$ es $(x+a)^2$, el cual al desarrollar el producto de si mismo por ser una potencia nos da que $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (I). Además, notemos que geométricamente el área del cuadrado es también $(x+a)^2 = x^2 + 2R + a^2$ (II), donde R es el área de la figura desconocida (Rectángulo). Ahora, igualando las ecuaciones (I) y (II) tenemos que $x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 2R + a^2$, lo cual reduciendo nos da que $R = ax$, la cual es el área de un rectángulo cualquiera de lados a y x. Así, se puede desarrollar la teoría inicial como antes pero partiendo del área de un cuadrado, y luego del área del rectángulo deducida se puede encontrar por ejemplo la del romboide.

INTERPRETACIONES Y CONCLUSIONES

Es importante para nuestros estudiantes tener no sólo una idea de la parte numérica en el uso del producto notable del cuadrado de una suma, sino que también es necesario verlo geométricamente (En donde, se denomina la visualización en el estudio de la geometría al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental o viceversa según lo desarrollado por Torregrosa, G. y Quesada, H. **(**2007) en su articulo base de esta teoría didáctica) y sobre todo usarlo tanto en aplicaciones numéricas así como en la demostración geométrica por ejemplo de la ecuación de segundo grado.

Además, ver que se puede usar para cambiar inclusive el surgimientos de teorías como sucede con las deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas poligonales, las cuales se pueden empezar con la idea del área de un rectángulo o un cuadrado indiferentemente como vimos en el presente articulo y luego deducir las demás fórmulas para diferentes figuras, los cuales son muy importante en la formación de la teoría de cuadratura que puede ser usada para deducir e inclusive generalizar o extender geométricamente el teorema de Pitágoras como podemos ver revisando la referencia de Barreto, J. (2009).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barreto, J. (2008). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. Versión electrónica. *Revista Números* (69). Obtenida en mayo de 2009 en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php

Barreto, J. (2009). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. Versión electrónica. *UNION* revista digital Iberoamericana de Educación Matemática (17). Obtenida en mayo de 2009 en http://www.fisem.org/descargas/17/Union_017_007.pdf.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mannana. V. Villani (Eds), Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Heath, T. (1956). The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg. Volume I. Segunda edición. Dover Publications, INC. New York.

Plasencia, I. (2000). Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos. Tesis de doctorado sin publicar, Universidad de la Laguna, Las Palmas de Gran Canaria, España.

Real Academia Española (2001). Diccionario de la lengua española. Madrid, España: Espasa Calpe.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). "Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría". Relime, 10 (2), 273-300. México: Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a student's understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematic Education 27* (4), 435-457.