

# LA PREDICCIÓN Y LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

## SEGUNDA PARTE: VISUALIZANDO LA REGLA

Ricardo Cantoral\* y Marcela Ferrari\*\*  
DME – Cinvestav, IPN. \*\* Cimate – UAG (México)  
[rcantor@cinvestav.mx](mailto:rcantor@cinvestav.mx) , [marcela\\_fe@yahoo.com.mx](mailto:marcela_fe@yahoo.com.mx)

### RESUMEN

La regla de los signos de Descartes, publicada en 1637 en el anexo titulado *Géométrie* del conocido libro filosófico *Discurso del Método* de Descartes; es el eje central de este trabajo. De la revisión y discusión de textos originales, artículos de investigación relacionados con este teorema así como de textos escolares, percibimos dos vertientes en la argumentación, una algebraica y otra analítica que presentáramos en la primera parte de este artículo. Nos interesa ahora, presentar una justificación alternativa de la regla de los signos de Descartes apoyada en la idea de predicción, noción construida socialmente a partir de vivencias cotidianas; así como, en la visualización como habilidad para representar, transformar, generar, comunicar y reflejar información visual.

### LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

El artículo que presentamos sobre la regla de los signos de Descartes, se centra en un método que se encuentra en el cruce de caminos entre los procedimientos algebraicos y analíticos y en una época marcada por el nacimiento de un nuevo espíritu científico.

Descartes, en su *Geometría* (1637), propone entre otras cosas, una técnica para determinar el mayor número de raíces positivas que podría tener una ecuación polinomial. Esta idea provoca controversias entre la originalidad y la posibilidad de plagio del trabajo de Harriot, discusión promovida entre otros por Wallis, así como alrededor de sus potencialidades y limitaciones.

Recordemos que la regla de los signos de Descartes establece que:

...podemos determinar el número de raíces verdaderas o falsas que cualquier ecuación pueda tener, como sigue: una + a – o de – a +; y tantas raíces falsas como el número de veces que se encuentran en sucesión dos signos + o dos - (Descartes, 1637 p. 373).

En este artículo presentamos entonces, una explicación de esta regla que consideramos pertinente a los fines didácticos. Utilizaremos para ello, una interpretación del signo de los coeficientes del polinomio desde un modelo geométrico, para proponer posteriormente una demostración de la regla basada en la predicción, entendida ésta como: *una actividad racional que permite*

*determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que lo producen* (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p.467). Efectivamente, predecir es una práctica social, es una noción construida socialmente a partir de ciertas vivencias que las comunidades perciben y modelan de alguna manera.

Pretendemos entonces, luego de analizar la evolución conceptual de la regla de los signos de Descartes que presentáramos en la primera parte de este artículo, proponer una justificación de naturaleza didáctica, que permita generar una red de modelos regida por la predicción, práctica social que ha propiciado la emergencia de herramientas matemáticas de distinto corte.

## **VISUALIZANDO LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES**

En la literatura contemporánea, el término visualizar adquiere diferentes connotaciones. Para nosotros la visualización trata de la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso social muy utilizado en distintas áreas del conocimiento matemático y científico, que conlleva interacciones personales y sociales, no ajeno al entretreído histórico de las matemáticas. Al decir visualización, no nos estamos refiriendo a una visión inmediata de ciertas relaciones, sino de una sutil interpretación de lo que somos capaces de percibir y contemplar. Esta posibilidad implica haber desarrollado cierta capacidad de entender un discurso a veces ajeno a nosotros, para lo cual deberíamos haber aprendido a leerlo correctamente en escenarios particulares.

En este sentido el estudio de las funciones también se trata desde las perspectivas de la visualización para ayudar en la descripción de ciertas propiedades, como por ejemplo: la paridad  $f(x)=f(-x)$ , periodicidad  $f(x)=f(x+k)$ , así como la traslación y sus efectos  $f(x)+a$  o  $f(x+a)$ , entre otras. En este sentido trataremos, en nuestra justificación de la regla de los signos de Descartes, con el significado visual de los signos de los coeficientes del polinomio asociándolos con los signos de las derivadas sucesivas de la función. Al respecto, diferentes e interesantes acercamientos están siendo llevados a cabo, en (Cordero, 1998; Aparicio y Cantoral, 2006; Sánchez, García y Llinares, 2008, Ferrari y Farfán, 2008) por ejemplo, donde se propone estudiar a las gráficas de ciertas funciones a través de los argumentos que se presentan en el ámbito escolar fundando sus reflexiones en estudios socioepistemológicos; a diferencia de los clásicos estudios de visualización que, aunque aportan considerables informaciones, restringen sus explicaciones a cuestiones estrictamente mentales o a los aspectos propios de los sistemas de representación.

Nos interesa entonces, analizar el comportamiento que tendrán las gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas a consecuencia de los signos de sus coeficientes. Consideramos que en estos casos particulares, es posible distinguir el papel que desempeñan los signos de los coeficientes de la función con las oscilaciones de las gráficas y en consecuencia con el número de raíces positivas de la ecuación algebraica respectiva.

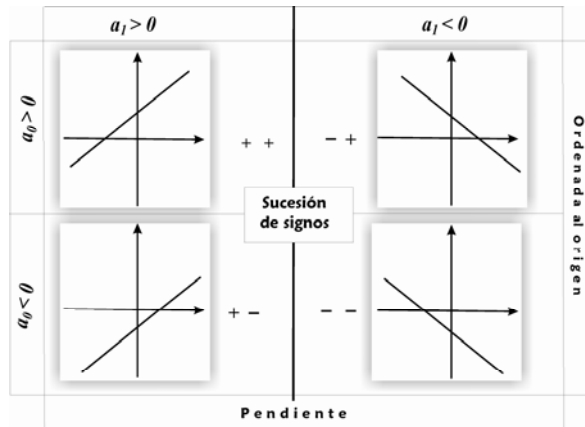


Tabla 1. Gráficas de  $p(x) = a_1x + a_0$  y la sucesión de signos de los coeficientes

Iniciemos esta discusión, planteando el caso de la función lineal  $p(x) = a_1x + a_0$ , donde  $a_1$  y  $a_0$  son reales distintos de cero; coeficientes que caracterizan a estas funciones, permitiéndonos identificar, respectivamente, la pendiente y la ordenada al origen de las mismas, por tanto son cuatro los casos posibles que se pueden presentar, de acuerdo a las combinaciones de sus signos (ver *Tabla 1*).

Observamos entonces que, en caso de producirse un cambio de signo entre los coeficientes  $a_1$  y  $a_0$ , se tendrá en consecuencia una raíz real positiva de la ecuación. Esta afirmación confirma el enunciado de la regla de los signos de Descartes y se apoya en el sentido que las variables visuales, pendiente y ordenada al origen, juegan en el diseño anterior.

Naturalmente, pendiente positiva y ordenada al origen positiva produce una gráfica que no podrá cruzar en la parte positiva del eje de las equis, de modo que las soluciones positivas provienen, como se aprecia en la *Tabla 1*, de la presencia de un cambio de signo en la sucesión de los coeficientes.

Analicemos ahora, el caso de las funciones polinomiales de segundo grado. Consideremos la función real  $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  en la que  $a_2$  no es cero. Como sabemos estas funciones tienen a las parábolas como sus gráficas. En esta situación habremos de centrar nuestra atención en la concavidad de la curva. Consideremos primero a las parábolas cóncavas hacia arriba, es decir, el caso para el cual  $a_2$  es positivo, representadas en la *Tabla 2a*, y, a continuación, las parábolas cóncavas hacia abajo al tomar  $a_2$ , el término líder, con valor negativo, representadas gráficamente en la *Tabla 2b*.

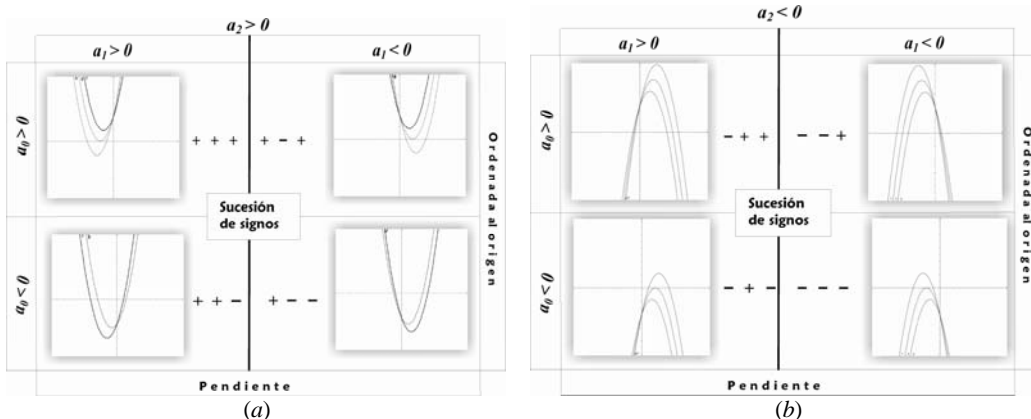


Tabla 2: Gráficas de  $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  y la sucesión de signos de los coeficientes

De este modo, al igual que en el caso de las ecuaciones lineales, observamos también que, de producirse un cambio de signo en la secuencia de los coeficientes  $a_2$ ,  $a_1$  y  $a_0$  de la cuadrática, tendremos en consecuencia, la existencia de tantas raíces reales positivas como cambios de signo se produzcan en la ecuación, o en su defecto, dos raíces menos a causa de la posibilidad de contar con raíces complejas conjugadas. Esto se expresa en las tablas anteriores con la familia de gráficas que aparece en cada recuadro. Hemos mostrado, en la *Tabla 2*, una variedad de parábolas que cumple con las diferentes opciones respecto del número de raíces reales positivas. Esta afirmación vuelve a confirmar el enunciado de la regla de los signos de Descartes, que en nuestra explicación hemos asociado a las variables visuales: concavidad, pendiente y ordenada al origen.

Naturalmente, esta estrategia nos permitiría analizar el comportamiento de las funciones polinomiales de mayor orden: cúbicas, cuárticas, etcétera. Habría que, en cada caso, considerar a todas las opciones posibles de las gráficas de la función. Sin embargo, consideramos que esta explicación resulta inusual en los libros de textos a causa de que los estudiantes, muestran dificultades al momento de trabajar en forma articulada con las variables visuales mencionadas. Normalmente cualquier presentación de este tipo se vería objetivamente limitada en la medida en que éstas suelen quedar fuera del control de los propios estudiantes; dificultad que se incrementa al no contar con referentes equivalente a las nociones de ordenada, pendiente y concavidad para el caso de funciones polinomiales de grado mayor que tres. Cabe decir, adicionalmente, que la maestría en el análisis del significado gráfico del signo del coeficiente de una función polinomial es, a todas luces, escaso entre los estudiantes y lo es más en la medida en que los programas escolares suelen hacer poco énfasis en los temas de graficación de funciones.

Para tratar esta cuestión hemos propuesto un acercamiento analítico que se apoya en la correspondencia entre las derivadas de orden superior con los coeficientes del polinomio. A su vez usaremos ideas de predicción para proponer una explicación de la regla de los signos de Descartes.

## PREDICCIÓN Y REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Resulta interesante remirar la regla de los signos de Descartes desde la noción de predicción, pues implica vincular los signos de los coeficientes con los signos de las derivadas sucesivas de la función original. En este sentido, al mirar al polinomio como una expresión en serie de potencias podremos interpretar los cambios de signo en los coeficientes con los cambios de “dirección” en la gráfica, y robustecer así nuestra propia significación de cada elemento.

Elegimos así, como punto de partida, el análisis de la idea de predicción en su relación con el binomio de Newton y con la serie de Taylor. Iniciamos entonces, con la siguiente cuestión, que fuera desarrollada en Cantoral y Farfán (1998): *¿Por qué Newton escribió por vez primera su binomio como  $(P + PQ)^{m/n}$  y no, como es usual hoy en día, como  $(a + b)^n$ ?*

Si bien los desarrollos en serie de potencias de  $(P + PQ)^{m/n}$  y de  $(a + b)^n$  son equivalentes matemáticamente, sostenemos que conceptualmente son distintos. Efectivamente:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}-1} Q + \frac{m}{n} \frac{m-n}{2n} P^{\frac{m}{n}-2} Q^2 + \frac{m}{n} \frac{m-n}{2n} \frac{m-2n}{3n} P^{\frac{m}{n}-3} Q^3 + \text{etc.}$$

y

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots$$

Una lectura ingenua de la cuestión nos haría creer que se trata sólo de un asunto de la notación propia de la época, Europa del siglo XVII. Pero en nuestra opinión, ello no es así. Se trata de una verdadera concepción alternativa del binomio, que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase. De hecho, sostenemos que obedece a un programa emergente en aquella época, un programa alternativo en el campo de la ciencia, con el que se buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático. Un amplio programa de matematización de los fenómenos que se podían modelar con una muy fructífera metáfora del flujo del agua, una metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes reales.

La idea básica a la que nos referimos consiste en la asunción de que con la predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, es posible anunciar, anticipar su estado ulterior; pues conociendo ciertos valores iniciales de un sistema en evolución, sabremos la forma en la que éste progresa. Veremos enseguida la nitidez de esta idea en una situación específica; que trata del estudio de la cinemática de una partícula que se desplaza rectilíneamente; situación en la que se precisa de una predicción de largo alcance en ámbitos de variación continua. Iniciemos pues, con el antecedente fundamental de la matematización de este fenómeno, con el binomio de Newton.

Desde nuestro punto de vista, la noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud  $B$  con el paso del tiempo. Sabemos, por ejemplo, que  $B$  depende a su vez de otra magnitud  $P$  que fluye incesantemente. Necesitamos saber entonces el valor que tomará  $B$  antes de que transcurra el tiempo, antes de que  $P$  transite del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que, el verdadero valor de  $B$  esté distante de las expectativas que nos generan los valores de  $B$  y de  $P$  en un momento dado, de la forma en la que  $P$  y  $B$  cambian, de la forma en la que cambian sus cambios, y así sucesivamente.

El objeto matemático, binomio de Newton, se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que precisan de la predicción. De modo que si  $P$  evoluciona de cierta manera, la cuestión central consiste en saber cómo será  $B(P)$  si conocemos el inicio de  $P$ , el cambio que sufre  $P$ , el cambio del cambio de  $P$ , etcétera. El binomio fue entonces, una respuesta a la cuestión y una organización de las prácticas sociales.

Veamos esto con un ejemplo particular. Supongamos que  $B$  ha sido dada respecto de  $P$  por la relación  $B(P)=P^2$ . Entonces imaginemos que  $P$  evoluciona y pasa de  $P$ , hasta llegar a ser ella misma incrementada por un pequeño pedazo  $PQ$  (la magnitud  $Q$  es menor que la unidad y en consecuencia  $PQ$  es una parte de  $P$ ), de modo que  $P$  deviene  $P+PQ$ . Luego, como  $B$  está dada según la fórmula particular que establecimos, la cuestión central radica en saber quién es  $B$  después del flujo de  $P$ . La respuesta es, en este caso, inmediata, pues será  $(P+PQ)^2=P^2+2P^2Q+P^2Q^2=P^2(1+2Q+Q^2)$ . Del mismo modo, y aquí sí interviene la época, imaginemos que sólo se conocen fórmulas que combinan expresiones de la forma  $x^{m/n}$ , la extensión necesaria del resultado anterior estaría dada por la expresión  $(P+PQ)^{m/n}$ . En general, si  $f(x)=x^3$ , tendremos que:

$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$$

Esta expresión puede escribirse según las derivadas sucesivas de la función  $f$  en el punto  $x$  con un incremento  $h$  como sigue:

$$f(x+h)=(x+h)^3=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(x)\frac{h^3}{6}$$

El caso de mayor interés se presenta, naturalmente, cuando no se dispone en forma explícita de la relación entre  $B$  y  $P$ . Entonces, habrá que hacer emerger progresivamente una nueva noción, una que permita de algún modo la generación de la solución óptima a una clase de situaciones propias de la predicción. Para ello, habrá que considerar tanto la diversidad de contextos en los que puede suceder la variación, como la variedad de fenómenos estudiados con estrategias similares. En su momento, este programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva

cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo con el programa de Lagrange donde emerge la noción de función analítica.

Estudiemos pues esta situación en un caso conocido. Supongamos que tenemos los valores iniciales (en el tiempo  $t = 0$ ), tanto de la posición  $s(0) = s_0$ , como de la velocidad  $v(0) = v_0$ , y la aceleración  $a(0) = a_0$  de una partícula que se desplaza sobre una recta. Para cualquier instante posterior  $t$  la posición  $s(t)$ , la velocidad  $v(t)$  y la aceleración  $a(t)$  estarán dadas mediante el instrumento para predecir, a saber, la serie de Taylor,  $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2! + f'''(0)x^3/3! + \dots$

Consideremos que la función está representada por la posición, la velocidad y la aceleración respecto del tiempo de la partícula en movimiento. Así tendremos,

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + s''(0)t^2/2! + \dots$$

$$v(t) = v(0) + v'(0)t + v''(0)t^2/2! + \dots$$

$$a(t) = a(0) + a'(0)t + a''(0)t^2/2! + \dots$$

Al tratar con el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se tiene que, para todo valor de  $t$ ,  $a(t) = a(0)$ , y en consecuencia  $s^{(n)}(t) = 0$  si  $n \geq 3$ , de modo que las tres ecuaciones anteriores se transforman respectivamente en las siguientes:

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + s''(0)t^2/2!$$

$$v(t) = v(0) + v'(0)t$$

$$a(t) = a(0)$$

Si utilizamos la notación acostumbrada, recordando que la variación de la posición es regida por la velocidad y la variación de ésta no es otra cosa que la aceleración, tendremos:

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = a$$

Generalicemos esta idea de predicción; si los valores de un parámetro son conocidos en un único sitio espacial o temporal, digamos en  $x_0$ , se precisa entonces, con esos datos, anunciar el estado posterior de dicho parámetro, esto es su valor en  $x_0 + h$ . De modo que, al conocer los valores de inicio,  $x_0, h, f(x_0), f'(x_0), f''(x_0)$ , etcétera, se podrá anunciar el valor posterior del parámetro representado, en este caso se trata del valor de  $f(x_0 + h)$ , pues:

$$f(x+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + \dots$$

Estas ideas, aunque intuitivas, requieren para su uso, de la aceptación por parte de los alumnos de la serie de Taylor, tanto al nivel de su notación como del de su concepción. Aunque lo segundo se alcanza mediante los argumentos esbozados y alguna construcción original proveniente de un análisis socioepistemológico, el primer asunto en cambio, encuentra una fuerte resistencia en el discurso matemático escolar contemporáneo, debido a que el tratamiento didáctico que le acompaña exhibe a la serie de Taylor más como un resultado de naturaleza teórica, que requiere para su deducción de principios propios del análisis matemático como el axioma de completitud en alguna de sus versiones y de los teoremas de los valores medios. Hoy contamos con diversas presentaciones de estos resultados que bien podríamos llamar de naturaleza constructivista, algunas sugeridas por la didáctica de antaño (Lacroix, 1797), o por la génesis histórica (Taylor, 1715), (Lagrange, 1797) y otras más fruto de investigaciones en matemática educativa como en (Cantoral, 1995; Cantoral y Mirón, 2000; Cantoral y Montiel, 2003; Cantoral, Molina y Sánchez, 2007).

Ahora bien, volviendo a nuestro trabajo para aplicar estas ideas de predicción al problema de la determinación de las raíces positivas de un polinomio arbitrario tendremos que hacer algunas precisiones adicionales. Dado que los coeficientes de una ecuación polinomial se corresponden con las derivadas sucesivas de la función polinomial evaluadas en cero, ejemplificaremos esto para el caso de las funciones cúbicas.

Consideremos una función de tercer grado  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , donde los coeficientes son números reales y  $a_3 \neq 0$ . Nos interesa escribir esta expresión en su forma analítica haciendo uso de las derivadas sucesivas de  $f$  en  $x=0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 & \Rightarrow f(0) &= a_0 \\ f'(x) &= 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 & \Rightarrow f'(0) &= a_1 \\ f''(x) &= 6a_3x + 2a_2 & \Rightarrow f''(0) &= 2a_2 \\ f'''(x) &= 6a_3 & \Rightarrow f'''(0) &= 6a_3 \end{aligned}$$

De modo que la función polinomial toma el aspecto siguiente:

$$f(x) = \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''(0)}{2}x^2 + f'(0)x + f(0)$$

De este modo, la ecuación  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ , puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''(0)}{2}x^2 + f'(0)x + f(0) = 0$$

El número de cambios de signo entre  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  y  $a_0$  es entonces el número de cambios de signo entre  $f'''(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'(0)$  y  $f(0)$ . Esto es coherente con la idea de predicción que hemos presentado anteriormente, pues el comportamiento de la gráfica a la derecha (a la izquierda) del origen está completamente determinado por el comportamiento de la función en un punto, en nuestro caso en  $x = 0$ .



Hagamos un análisis gráfico de la situación planteada. Las gráficas posibles de las funciones cúbicas tomando  $a_3 > 0$  son, como sabemos, las que aparecen en el *Diagrama 1a*, mientras que si  $a_3$  es negativo, se trata de las formas invertidas respecto del eje equis como se puede apreciar en el *Diagrama 1b*.



*Diagrama 1a.* Formas genéricas de una cúbica con coeficiente líder positivo ( $a_3 > 0$ )



*Diagrama 1b.* Formas genéricas de una cúbica con coeficiente líder negativo ( $a_3 < 0$ )

El primer argumento que se puede esgrimir al respecto, corresponde al signo de la tercera derivada y a su interpretación. Una afirmación que podemos realizar es respecto al papel que juega el signo de la tercera derivada, pues éste caracteriza a la forma de la curva. Esto significa que si se cumple con  $f'''(0) > 0$ , entonces la gráfica tendrá alguno de los aspectos presentados en el *Diagrama 1a*, es decir, se hará infinitamente grande cuando la  $x$  crezca al infinito e infinitamente negativa cuando  $x$  tienda a menos infinito.

Por otro lado, dado que sabemos que la tercera derivada mide el cambio de la segunda derivada, ella suministra, en consecuencia, la información respecto de los cambios en la concavidad de la curva estudiada. Más específicamente es el cambio de la “medida de la concavidad”.

Para el caso de las funciones cúbicas la tercera derivada es constante, pues como vimos  $f'''(x) = 6a_3 = f'''(0)$ , por tanto será siempre positiva o siempre negativa. En el caso en que  $f'''(0) > 0$ , tendremos que la derivada segunda cambia de un valor menor a otro mayor; en realidad, lo hace de un valor negativo a otro positivo. Esto se debe a que la segunda derivada es, claramente, una función lineal y como tal, sólo tiene una raíz real que marca el pasaje de los valores negativos a los positivos o viceversa.

Observamos entonces, que el único cambio significativo en el valor de la segunda derivada está asociado con su cambio de signo. La raíz real, corresponde al punto de inflexión, es decir, el punto donde se anula la segunda derivada y también donde cambia de signo, y ésta es única. Estos argumentos nos permiten asegurar que existirá un único cambio de signo de la segunda derivada.

De este modo concluimos que las únicas gráficas posibles para las funciones cúbicas son las presentadas en los diagramas anteriores, en los cuales se realizan todas las combinaciones posibles de este particular cambio de concavidad.

De aquí en adelante consideraremos  $f'''(0) > 0$ , dado que en otro caso los análisis serían análogos. En síntesis, dado que en las funciones cúbicas la tercera derivada es constante, entonces existe un único cambio de concavidad y por tanto un único punto de inflexión.

Recapitemos entonces, el análisis de la información que suministra la derivada segunda:

$$f''(x) = 6a_3x + 2a_2 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2a_2$$

donde vemos que se trata de una función lineal, como adelantáramos anteriormente, luego tiene una única raíz. Ésta marca el cambio de signo de la derivada segunda; por tanto, el cambio de concavidad de la gráfica, pues se trata del punto de inflexión de la gráfica de la función.

Si escribimos la segunda derivada en función de las derivadas en cero, y calculamos la abscisa del punto de inflexión, obtendremos que:

$$f''(x) = f'''(0)x + f''(0) \quad \Rightarrow \quad x_I = -\frac{f''(0)}{f'''(0)}$$

Entonces, siendo  $f'''(0) > 0$  y tomando  $f''(0) > 0$ , el punto de inflexión se encontrará en un valor negativo de  $x$ , es decir a la izquierda del origen. En caso contrario, cuando  $f''(0) < 0$ , se encontrará a la derecha del origen, en tanto que si  $f''(0) = 0$  el punto de inflexión estará sobre el eje  $y$ . Además, en todos estos casos, el cambio de la concavidad se producirá yendo de un valor negativo a otro positivo.

Veamos algunas de las posibles gráficas que se presentan en los casos mencionados:

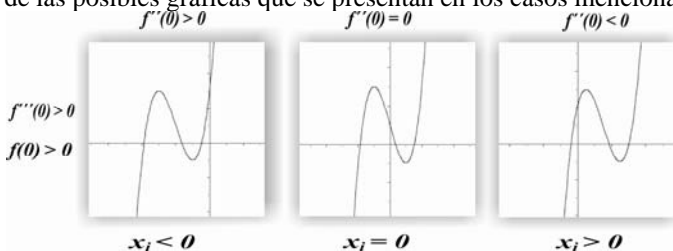


Diagrama 2. Gráficas de las cúbicas según el signo del coeficiente cuadrático

Ahora veamos lo que ocurre con el análisis de la primera derivada de una función, que proporciona información acerca de su crecimiento o su decrecimiento, además de que permite la localización de los puntos extremos relativos.

En el caso particular de la función cúbica, que hemos trabajado, tenemos que:

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

la cual, al expresarla utilizando los valores de las derivadas en el cero queda:

$$f'(x) = \frac{f'''(0)}{2}x^2 + f''(0)x + f'(0)$$

Vemos que se trata de una función cuadrática, y que ésta tendrá a lo más dos raíces reales. En este caso, en el punto de inflexión se tendrá un máximo o un mínimo, por tanto será el vértice de la parábola, que corresponde a la gráfica de la función derivada primera.

Para completar el análisis y decidir si efectivamente se tienen puntos máximos o mínimos, observemos el signo de la segunda derivada en estos puntos. En este sentido, es relevante establecer la relación que existe entre los puntos críticos y el punto de inflexión de estas funciones.

Los puntos críticos serán las raíces de la cuadrática presentada, por tanto, aplicando la fórmula conocida para calcularlas, obtenemos la relación siguiente:

$$x_c = -\frac{f''(0)}{f'''(0)} \pm \sqrt{\left[\frac{f''(0)}{f'''(0)}\right]^2 - \frac{2f'(0)}{f'''(0)}}$$

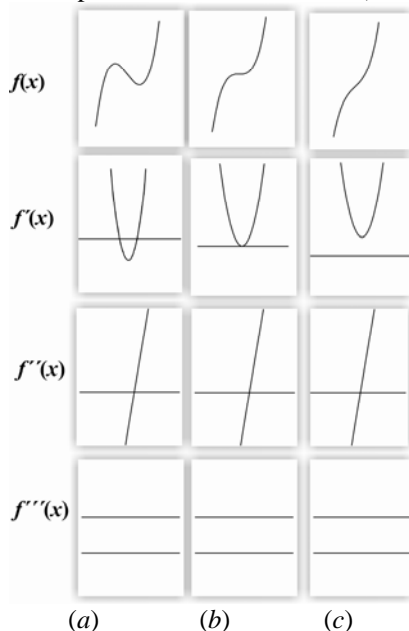
Vemos que, si el discriminante de la derivada primera,  $D = \left[\frac{f''(0)}{f'''(0)}\right]^2 - \frac{2f'(0)}{f'''(0)}$ , es positivo, las

raíces serán simétricas respecto al punto de inflexión, lo cual ocurre cuando  $f'(0) < 0$  o cuando  $\left[f''(0)\right]^2 > 2f'(0)f'''(0)$ . Éste corresponde al caso graficado anteriormente, donde se observa que, al considerar  $f'''(0) > 0$ , la gráfica presenta un máximo a la izquierda del punto de inflexión, que se corresponde con el valor negativo de la segunda derivada en esa región; y un mínimo, a la derecha del mismo (ver *Diagrama 3a*).

Por otro lado, que el discriminante sea cero, implica que el punto de inflexión coincide con el único punto crítico, de multiplicidad dos, que presenta la función. En este caso, la función no presenta un máximo o mínimo pues allí la derivada segunda también se anula y cambia de signo al pasar de izquierda a derecha del punto (ver *Diagrama 3b*). En el caso de que el discriminante sea negativo, tendremos raíces complejas conjugadas, luego no tendremos un punto crítico para la función, lo cual se refleja en la gráfica ante la imposibilidad de que la curva presente una tangente horizontal (ver *Diagrama 3c*).

También es importante analizar la información que suministra el valor de la función en el cero. El valor de  $f(0)$  indica el lugar donde la función corta al eje de las ordenadas y esto será relevante para determinar criterios de la existencia de las raíces reales positivas de la función utilizando los argumentos de Descartes respecto al cambio de signo de los coeficientes.

En forma sucinta diremos que todas las consideraciones realizadas, en los apartados anteriores, pueden resumirse en un diagrama que muestre la relación entre los signos de las derivadas sucesivas de una función con el comportamiento de la función (ver *Diagrama 3*).



*Diagrama 3.* Gráficas de las cúbicas y sus derivadas

Como vimos anteriormente, la presentación usando las ideas de predicción se basa en la capacidad de anunciar el comportamiento de la gráfica a la derecha del origen, usando sólo los datos que proporcionan los signos de las derivadas en el cero. Podemos ahora establecer la regla de acotación de Newton, teorema que es consecuencia de esta idea:

Un número positivo  $a$  es cota superior de las raíces positivas de la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es una función polinomial de grado  $n$ , si ninguna de las derivadas sucesivas en  $a$  es negativa. Si  $f(a) \geq 0, f'(a) \geq 0, \dots, f^{(n-1)}(a) \geq 0$  y  $f^{(n)}(a) > 0$ , se tendrá entonces para todo número  $p$  mayor que la cota,  $p > a$ , que la función evaluada es:

$$f(p) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(p-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(p-a)^n > 0$$

De este modo, sabemos que el comportamiento de la función después de  $a$ , es tal que no le permite cruzar al eje  $x$  en esa zona.

De ahí, resulta claro que el número de raíces positivas de una función polinomial queda también determinado por el número de cambios de signo en las derivadas sucesivas evaluadas en el origen.

Veamos esto con un diagrama de árbol adecuado a las combinaciones de signo en los coeficientes de una función polinomial.

Escribamos a la función polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

de la forma:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

y construyamos progresivamente las gráficas de:  $f(0)$ ,  $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x$ ;

$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$ , ...,  $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ , estudiando todas las combinaciones de signos de los coeficientes.

Sin perder generalidad, a fin de simplificar el diagrama, supondremos que ninguno de los coeficientes es cero, de este modo, sólo pueden alternar sus signos entre positivo y negativo.

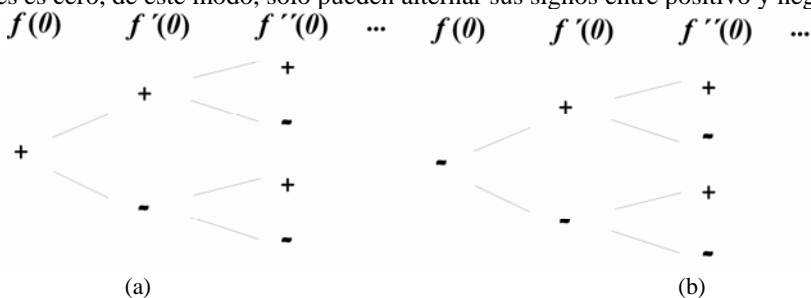


Diagrama 4. Signos de los coeficientes

De este modo podemos estudiar las combinaciones de signos y analizar las posibles gráficas de los polinomios:

$$y = f(0),$$

$$y = f(0) + f'(0)x,$$

$$y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2,$$

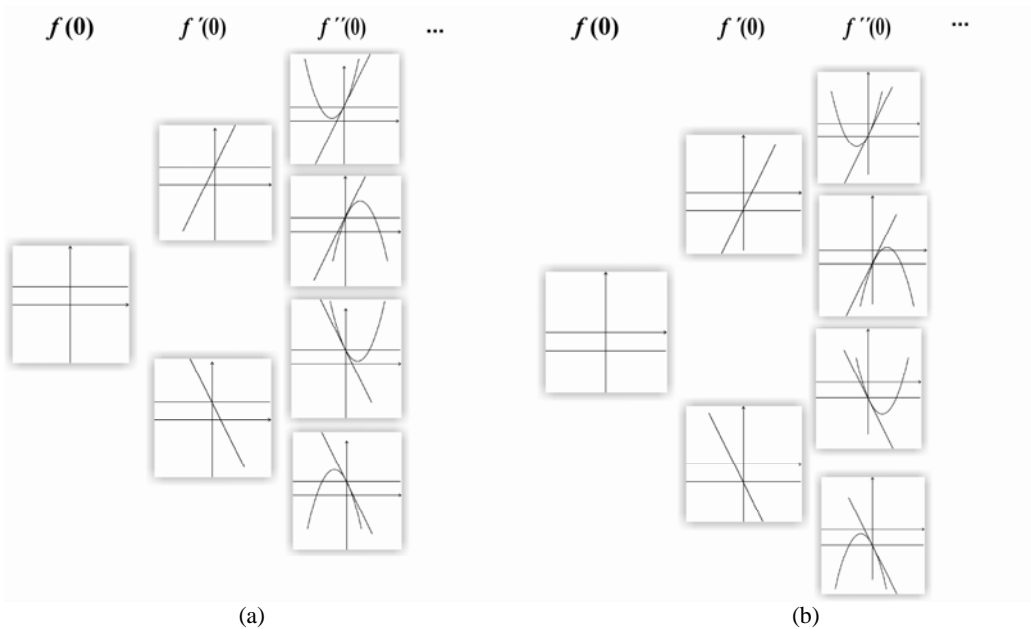
....

$$y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

que aproximan a la función polinomial  $f$ .

En el *Diagrama 5*, presentamos algunas de las posibles gráficas de los polinomios que satisfacen la relación de signos que se propone en el *Diagrama 4*. En la primer columna, se muestran los dos casos: (+) y (-), aquel donde la  $f$  es positiva en cero (*Diagrama 5a*) y cuando es negativa (*Diagrama 5b*). La segunda columna, de ambas partes, abre en árbol que se corresponde con la columna anterior. Se alterna aquí, el valor positivo de la derivada en cero con su valor negativo,

formando la colección de signos: (+, +), (+, -) en el *Diagrama 5a* y (-, +), (-, -) en el *Diagrama 5b*. La tercera columna continúa el árbol para incluir a la segunda derivada, formando así las combinaciones con tres signos + y -, tales como: (+, +, +), (+, +, -), (+, -, +), etcétera.



*Diagrama 5. Gráficas de las aproximaciones polinomiales*

Con este esquema, el número de cambios de signo en las derivadas es coherente con la tesis que postula la regla de los siglos de Descartes y explica el comportamiento de la gráfica a partir de las ondulaciones de la gráfica de la función original.

## CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

El desarrollo de nociones y conceptos como función, raíz o solución precisan de grandes períodos de evolución hasta alcanzar sus estados actuales, al igual que la noción de rigor que evoluciona y pertenece, por así decirlo, a cada época. Todo argumento entonces es producto de acciones de una comunidad que responde a un escenario sociocultural particular (Crespo, Farfán & Lezama, 2009). Durante ese tiempo las nociones se modifican y adquieren progresivamente significados que les son característicos. Por esa razón, consideramos importante indagar respecto al proceso de construcción de los significados compartidos, asociados a los conceptos y procedimientos matemáticos a lo largo de su devenir histórico y social. Pues comprender estos episodios, que ilustra el sentido de la búsqueda de la construcción social del conocimiento que sustenta la socioepistemología en el sentido de Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006), resulta valioso al momento de buscar explicarse el por qué dichas entidades matemáticas resultan tan resistentes

al entendimiento de los alumnos de nuestros días. Dos destacados estudios con esta filosofía y referidos respectivamente a la noción logaritmo, la noción de punto de inflexión o la de convención matemática, pueden consultarse en (Ferrari, 2008; Castañeda, 2004; Martínez-Sierra, 2006).

Consideramos también que el conocimiento matemático, como parte de la cultura, vive en instituciones y se materializa a través de las prácticas y contextos que les son propios. La predicción, la regla de los signos, la teoría de ecuaciones o la noción de verdad en la ciencia, comparten escenarios y circunstancias culturales, históricas e institucionales. Las actividades humanas, que acontecen al seno de organizaciones sociales, impregnan por igual a las prácticas cotidianas como aquellas que consideraríamos las más especializadas. En este sentido, al atender estas cuestiones creemos que un amplio programa de investigación emerge en beneficio del quehacer didáctico. El problema de la estructuración del conocimiento escolar, cada vez con más claridad, está siendo entendido como un verdadero asunto de investigación científica. Este aporte en consecuencia, se suma a aquellos que plantean el estudio sistémico del quehacer educativo.

En forma breve mostramos a continuación algunas explicaciones de la regla de los signos de descartes que consideramos podrían usarse en las clases o en momentos particulares de las actividades escolares, fuera de una clase habitual, como una forma de anticipar o de preparar a los estudiantes con la naturaleza del método de descartes. De hecho, como se puede prever, es posible realizar tales presentaciones apoyados en asuntos prácticos de tipo cotidiano.

Para finalizar esta sección, mostramos algunas posibles presentaciones que podrían anticipar a la regla de los signos asociada con la idea de predicción. En lo que sigue nos referiremos a funciones polinomiales. Como hemos hecho a lo largo de este artículo, supondremos que la función  $f$  está definida por la relación polinomial  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , donde cada uno de los  $a_i$  es un número real positivo y el coeficiente líder no es cero. Retomamos entonces, como un antecedente de la regla de los signos de descartes, la siguiente cuestión: ¿porqué sin cambios de signo en la sucesión de los coeficientes de la función  $f$ , ésta no se anula para  $x$  positivos?

Abordaremos a continuación la cuestión desde diferentes enfoques. Llamaremos a cada una de ellas explicaciones.

### **EXPLICACIÓN PRIMERA**

Supongamos que una bicicleta se mueve en línea recta partiendo del reposo. Fijemos el punto O como nuestro origen de coordenadas y establezcamos la dirección OA como la dirección de la velocidad positiva. Esto es, cuando la bicicleta viaje de O hacia A su velocidad será positiva, mientras que cuando lo haga de A hacia O, convenimos en que su velocidad sea negativa.



Supongamos ahora que la bicicleta parte del reposo de un punto a la derecha de O y se dirige en la dirección OA, con velocidad positiva, y además lo hace sin cesar cada vez más rápido. Naturalmente no podrá regresar al punto O, pues en cada instante estará cada vez más lejos del origen O.

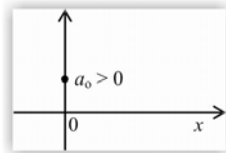
La única forma de que la bicicleta vuelva al origen es que baje su velocidad, se detenga y camine en la dirección AO, es decir, con velocidad negativa. Esta breve descripción del movimiento presenta a la regla de los signos de una manera muy inusual, pero intuitiva. Un cero de la función posición  $f(x)$ , para  $x$  positivo, sólo puede ocurrir si algunas de las derivadas sucesivas cambian su signo. Mientras sean todas positivas, la bicicleta irremediablemente se alejará cada vez más y más.

## EXPLICACIÓN SEGUNDA

Construyamos paso a paso, por aproximaciones, la gráfica de la función:

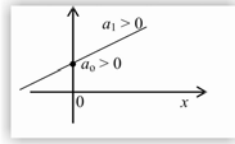
$$f(x) = x^n + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Gráficamente esto se interpreta de la siguiente manera, cuando  $x = 0$ , entonces se tiene  $f(0) = a_0$ , como  $a_0$  es positivo, entonces la gráfica de  $f$ , en las proximidades del eje  $y$ , pasa por un punto que se ubica por encima del eje  $x$ .

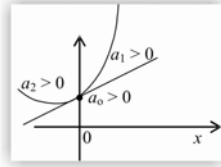


Ahora bien, si sabemos que tanto  $f(0) = a_0$  como  $f'(0) = a_1$  son positivos, entonces la segunda de las aproximaciones de la función,  $y = f(0) + f'(0)x$ , nos indica que, en torno del origen, la función crece, esto es:





En caso de seguir de este modo, la parábola que aproxima a  $f$ , la función cuadrática  $y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ , tiene la propiedad de pasar por el punto  $(0, a_0)$ , de tener por tangente a la recta  $y = f(0) + f'(0)x$ , y de ser cóncava hacia arriba, de modo que la gráfica se verá cada vez alejándose más del eje  $x$  en su parte positiva.



De este modo, la única posibilidad de tener una raíz positiva descansa en que al menos uno de los signos de las derivadas sucesivas se torne negativo.

### EXPLICACIÓN TERCERA

Como hemos visto anteriormente, la presentación de la regla de los signos de Descartes usando las ideas de predicción se apoya en la posibilidad de anunciar el comportamiento de la gráfica a la derecha del origen (a la izquierda en otro caso) utilizando sólo los datos que proporcionan los signos de las derivadas en un punto, el cero en este caso. Recordamos, en la sección anterior, un teorema que es consecuencia de esta idea y que nos permite saber si un número positivo  $a$  cualquiera es una cota superior de las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es una función polinomial de grado  $n$ , en el caso, como vimos, que ninguna de las derivadas sucesivas en  $a$  sea negativa. Pues si los valores son  $f(a) \geq 0$ ;  $f'(a) \geq 0$ , ...,  $f^{(n-1)}(a) \geq 0$  y  $f^{(n)}(a) > 0$ , se tendrá entonces para todo número  $p > a$ , que:

$$f(p) = f(a) + f'(a)(p-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(p-a)^n > 0.$$

De este modo, sabemos que el comportamiento de la función después de  $a$ , es tal que no le permite cruzar al eje equis en el semieje positivo.

Supongamos para finalizar que la función  $f$  tiene todas sus raíces reales, entonces el número de raíces positivas de la ecuación  $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ , se determina por el número de cambios de

signo de sus coeficientes. La explicación del teorema descansa entonces en usar las ideas que han podido ser construidas en enseñanzas anteriores. Aunque habremos de señalar que las dificultades que los estudiantes muestren ante un cierto tipo de tareas que involucren lo que aquí hemos analizado deben, todavía, estudiarse sistemáticamente a fin de entender las formas en que los alumnos encaran estas cuestiones. Sólo entonces sabremos si la presentación sugerida ayuda verdaderamente a los aprendizajes de los alumnos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(1), 7 –30.
- Bartolozzi, M. & Franci, R. (1993). La Regola del Signi dall'Enunciato di R. Descartes (1637) alla Dimostrazione di C. F. Gauss (1828). *Archive for History of Exact Sciences* 45(4), 335 – 374.
- Borowczyk, J. (1989). Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations de signe de Descartes. *La Démonstration mathématique dans l'histoire*. Actes du 7ème colloque inter - IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 275 – 293.
- Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la Serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55 – 101.
- Cantoral, R. & Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon*, Vol. 42, Núm. 14(3), 353 – 369.
- Cantoral, R. & Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(3), 265 – 292.
- Cantoral, R., Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números* 55, 3 – 22.
- Cantoral, R. & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica* 2 (pp. 33–70). Bologna, Italia: Pitagora Editrice.
- Cantoral, R., Molina, J. & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez & J. Molina (Eds.) *Acta latinoamericana de Matemática Educativa* 18 (463-468). México: Clame.
- Cantoral, R., Farfán, R.M., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(4), 83 –102.
- Cantoral, R., Molina, J., Sánchez, M. (2007). Aspectos numéricos y gráficos de la derivada de orden superior. En C. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20 (pp. 554 – 559); México, Clame. ISBN: 978970-9971-13-2.
- Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada -IPN, México.

- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(1), 56 – 74.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo: Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.
- Crespo, C., Farfán, R.-M. & Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(1), 29 – 66.
- Descartes, R. (1637). *La Geometría*. México: Serie Matemáticas, IPN y Limusa.
- Farfán, R.-M. (1997). *Ingeniería didáctica: la matemática de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.
- Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(3), 309-354.
- Gauss, C. F. (1828). Beweis eines algebraischen Lehrsatzes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1 – 4.
- Lacroix, S. F. (1797). *Traité élémentaire de calcul différentiel, et de calcul intégral*. Bachelier Imprimeur Libraire de l'Ecole Polytechnique.
- Lagrange, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques*. Imprimeur libraire pour les mathématiques.
- Martínez, G. (2006). Los procesos de Convención Matemática como Generadores de Conocimiento. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 379-401). México DF, México: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISBN: 84-7978-803-8.
- Sánchez, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(2), 267 – 296.
- Stedall, J. (2000). Rob'd of Glories: The Posthumous Misfortunes of Thomas Harriot and His Algebra. *Archive for History of Exact Sciences* 54(6), 455 – 497.
- Taylor, B. (1715). *Methodus incrementorum directa et inversa*. Gran Bretaña.
- Vrancken, S. & Engler, A. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisas* Agosto 2008 10(38), 36 – 45.