LA PREDICCIÓN Y LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES[1]

PRIMERA PARTE: ARGUMENTOS Y DEMOSTRACIONES

Ricardo Cantoral* y Marcela Ferrari**
DME – Cinvestav, IPN. ** Cimate – UAG (México)
rcantor@cinvestav.mx , marcela_fe@yahoo.com.mx

RESUMEN

René Descartes publicó en 1637 su famosa *Géométrie*, un tratado donde aplica el álgebra a la geometría e introduce el simbolismo algebraico actual. En el tercer libro de la *Géométrie* enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos de Descartes. Durante dos siglos, el mundo matemático intentó sin éxito una demostración general y satisfactoria a los estándares de la época; finalmente Carl Frederick Gauss la demuestra, de la manera más general, en 1828 recurriendo a métodos algebraicos. Antes de ese acontecimiento, la regla de los signos vivió un intenso debate sobre la autenticidad y la originalidad que solía atribuírsele a Descartes.
En la primera parte de este artículo presentaremos algunos de los intentos que se hicieron por demostrarla, así como el tratamiento que la regla de los signos tiene en los libros de texto de álgebra y propondremos, en la segunda parte, una justificación original alternativa apoyada en la idea de predicción que, hasta donde sabemos, no ha sido reportada en la literatura especializada.

LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES. PRESENTACIÓN

René Descartes desarrolla, a principio del siglo XVII, un acercamiento del álgebra a la geometría, publicando en 1637 su *Géométrie* donde introduce el simbolismo algebraico actual que permitió, a la postre, la emergencia del álgebra clásica y de la geometría analítica. Particularmente, en el tercer libro de este tratado enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos y que hoy lleva su nombre:

> *...On connaist aussy, de cecy, combien il peut y avoir de vrayes racines, & combien de fausses, en chasque Equation. A sçavoir: il y en peut avoir autant de vrayes que les signes $+$ & $-$ s'y trouvent de fois estre changés, & autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes $+$ o deux signes $-$, qui s'entresuivent...*[2] (Descartes, 1637 p. 373).

[1] La primera versión de este artículo fue publicada en: Cantoral, R. & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica 2* (pp. 33–70). Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

[2] ...podemos determinar el número de raíces verdaderas o falsas que cualquier ecuación pueda tener, como sigue: una + a – o de – a +; y tantas raíces falsas como el número de veces que se encuentran en sucesión dos signos + o dos -.

Sin una demostración de esta regla, Descartes explica su método aplicándolo a la ecuación particular $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ que construye multiplicando las ecuaciones $x-2 = 0$, $x-3 = 0$, $x-4 = 0$, $x+5 = 0$; a fin de obtener una ecuación de cuarto grado con tres raíces positivas. En su explicación Descartes dice:

> *...Comme en la dernière, à cause qu'après* $+x^4$ *il y a* $-4x^3$, *qui est un changement du signe + en –; & après* $-19xx$ *il y a* $+106x$, *& après* $+106x$ *il y a* -120, *qui sont encore deux autres changemens, on connaist qu'il y a trois vrayes racines; & une fausse, à cause que les deux signes –, de* $4x^3$ *&* $19xx$, *s'entresuivent...*[3] (Descartes, 1637 p. 373).

La regla limita entonces el número de raíces positivas de una ecuación polinomial al declarar que no exceden el número de cambios de signo en los coeficientes del polinomio; cambios de signo naturalmente considerados cuando el polinomio ha sido escrito de forma tal que sus potencias desciendan o equivalentemente asciendan.

Una demostración satisfactoria y general de la regla de los signos de Descartes fue publicada por Gauss en 1828. Durante el periodo que va de 1637 a 1828 se produjo una gran cantidad de intentos de demostración sin que ninguno de ellos alcanzara su objetivo. Algunos sin embargo, sirvieron para analizar casos particulares y para explicar la regla en la enseñanza de la época. Una interesante reflexión al respecto puede leerse en Bartolozzi y Franci (1993) donde rastrean varios originales y los comentan.

Después de la demostración de Gauss, las discusiones sobre la regla de los signos de Descartes siguieron distintos rumbos. Por una parte se intentaba, como lo hicieran Budan, Sturm o Fourier, generalizarla de manera que los métodos de separación de raíces fuesen más potentes. Por otro lado, el desarrollo de la regla en la historia de las ideas, sirvió como campo fértil para la discusión sobre las diferencias entre una prueba puramente algebraica y una demostración analítica, entrando de este modo al terreno de los fundamentos de la matemática y al de sus implicaciones en los paradigmas de enseñanza.

En 1807, Budan extiende la regla de los signos de Descartes para determinar una cota superior del número de raíces reales que se encuentren en un intervalo cualquiera (p, q). Su idea básica consistió en desarrollar el polinomio en torno de nuevas variables, $x'=x-p$ y $x''=x-q$, para contar después el número de variaciones de signo que se perdieron en la sucesión de coeficientes de los polinomios transformados. Fourier retoma la argumentación de Budan y publica un teorema, en 1820, hoy conocido como Teorema de Budan - Fourier[4]. Posteriormente, en 1829, Sturm propone su teorema sobre la secuencia de los signos, el cual permite determinar de manera precisa, cuántas raíces de un polinomio se encuentran en un intervalo dado (Anderson, Jackson y Sitharam, 1998, p. 447).

---

[3] ...en la última ecuación, puesto que a $+x^4$ sigue $-4x^3$ se da un cambio de signo de + a – y a $-19x^2$ sigue $+106x$ y luego de $+106x$ a -120 dándose otros dos cambios, se conoce entonces que hay tres raíces verdaderas; y puesto que $-4x^3$ sigue $-19x^2$ hay una raíz falsa.

[4] El Teorema de Sturm y el Teorema de Budan-Fourier pueden consultarse en Kurosch (1981, pp.251-260), ambos previos a la presentación del Teorema de Descartes que propone este texto.

Si se revisa la literatura actual, se encuentran ciertos progresos en el estudio de la regla de los signos de Descartes, denotando que sigue suscitando nuevas preguntas como la que Anderson *et al*. (1998) proponen al cuestionarse sobre las razones por las que, siendo la regla un resultado tan útil y clásico, no se haya respondido que: *Dada una sucesión de signos, ¿es posible encontrar siempre un polinomio con el máximo número de raíces positivas y cuyos coeficientes tengan la secuencia dada de signos?* (p. 447) Particularmente ellos abordan el caso en el que los coeficientes del polinomio son todos diferentes de cero y dejan como problema abierto la situación que admite coeficientes nulos. Un año más tarde, Grabiner lo retoma proponiendo y demostrando el siguiente teorema:

> *Sea $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ una sucesión de signos -1, 0, y $+1$. Entonces para $k > n$, el polinomio*
>
> $$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j k^{-j^2} x^j$$
>
> *tiene el máximo número de raíces positivas y negativas según se indica en la regla de los signos de Descartes* (Grabiner, 1999, p. 854).

Pretendemos entonces, analizar la evolución conceptual de la regla de los signos de Descartes, no sólo desde ciertas obras originales como la de Descartes (1637) o Gauss (1828) o incluso desde artículos de investigación como los de Bartolozzi y Franci (1993), Borowczyk (1989) o Stedall (2000), entre otros; sino también desde libros escolares que nos permitan reflexionar y contrastar la argumentación presente en ellos, análisis insoslayables para profundizar en el discurso matemático escolar actual

DESCARTES Y SU ÉPOCA

Se sabe según sus biógrafos, que la vida de René Descartes transcurre en la aristocracia francesa del siglo XVII, en una sociedad lastimada por las guerras con grandes diferencias sociales. Descartes nació en 1596 en la Haye, en Touraine. Estudió derecho en la Universidad de Poitiers y se interesó por el estudio de las matemáticas en París. Esa época vivió un fuerte renacimiento filosófico, pues al tiempo que se desarrollan escuelas del pensamiento preocupadas por profundizar su comprensión del infinito, el cambio y el movimiento o la naturaleza del espacio, se reconsidera con fuerza el significado de la razón, el saber y el ser.
Esta época plantea un escenario adecuado para dar inicio al proceso de sustitución de ideas antiguas por otras nuevas, como el cambio que se dio entre aquella idea del cosmos finito y ordenado propias del pensamiento aristotélico, por la de un universo infinito y homogéneo. Período que según los historiadores sociales de la ciencia está lleno de contrastes, en el cual era frecuente escuchar tanto la frase *carpe diem* - goza de este día, como *memento mori* - recuerda que vas a morir.

El teatro, como símbolo o imagen de la vida, se ocupó por representar los contrastes de la época. Shakespeare por ejemplo, pone en boca de uno de sus personajes en *Como gustéis* la frase:

Todo el mundo es una escena sobre la cual los hombres y mujeres son pequeños actores que vienen y van. Un hombre ha de hacer muchos papeles en la vida.

Hamlet, en su obra homónima, provee la frase célebre:

Ser o no ser, esa es la cuestión.

Mientras que Calderón en su obra *La vida es sueño* plantea:

¿Qué es la vida? Un frenesí. ¿Qué es la vida? Una ilusión, una sombra, una ficción; y el mayor bien es pequeño; que toda la vida es sueño, y los sueños, sueños son.

Ellos reflejan, en algún sentido, una visión cultural de la época: la preocupación por la brevedad de la vida y la racionalización del ser, por los rastros de realidad y de ilusión que la vida condensa. Esta visión plantea una ruptura con la idea según la cual las producciones científicas son realizadas de manera aislada y en secreto, pues se alimenta entre los científicos y pensadores de la época necesidades de comunicación y de intercambio para la confrontación de ideas. Todo ello incentiva la producción de conocimiento y propicia la formación de las primeras agrupaciones y sociedades científicas y la producción editorial de revistas especializadas.

Este ambiente favorece la obra de René Descartes, uno de los filósofos más importantes del siglo XVII, quien sostiene, como Sócrates, que sólo la razón puede proporcionar conocimientos, y por tanto, se habrá de buscar la ciencia que pueda encontrarse en ella misma y en el examen del gran libro del mundo. Descartes pensaba, como otros de sus contemporáneos, que la ciencia debía orientarse hacia el provecho del hombre y escribe en 1619:

... de lo que es motivo de mi trabajo quisiera publicar no un Ars Brevis como Lulio, sino una ciencia toda nueva, que permita resolver en general todos los problemas que pudieran presentarse...

La época se caracterizó fuertemente por la literatura y por la simplificación del lenguaje, lo que tuvo una repercusión indirecta sobre la actividad matemática y sobre sus productos. Se realizaron numerosas traducciones y se publicaron múltiples obras de matemáticos de la antigüedad, fundamentalmente de los griegos clásicos. De este modo, se puso al alcance de los pensadores de la época la originalidad y profundidad de las matemáticas desarrolladas por una visión cultural representada por los textos griegos de Euclides, Aristóteles, Diofanto, Pappus, Herón. Todo ello produjo que los filósofos de la naturaleza desarrollaran técnicas matemáticas más poderosas. Durante el siglo XVI se avanzó en álgebra al resolverse las ecuaciones cúbicas y bicuadradas, y se dan en esta época pasos importantes hacia la comprensión de las raíces negativas y complejas, construyendo un simbolismo algebraico mejor adaptado a los problemas emergentes.

Según Acevedo y Falk (2000, p. 253), Descartes usaba transformaciones del tipo de Budan en sus consideraciones acerca de las soluciones negativas de ecuaciones polinomiales, en una época donde los números negativos no gozaban aún de una interpretación geométrica clara, es decir, no podían interpretarse como magnitudes de segmentos, generándose polémicas y desconciertos; cuestionamientos sobre su existencia como objeto matemático, que se revela en la terminología utilizada donde era común llamar a las raíces negativas como falsa o ficticias, o “menos que nada” como encontramos en la *Géométrie* de Descartes (1637, p, 372). Así, mediante transformaciones apropiadas, las ecuaciones se convertían en otras cuyas soluciones eran números positivos.

Tanto Pierre de Fermat como René Descartes, quienes desarrollan un método para abordar la geometría con apoyo del álgebra, se nutren de las ideas de Vieta respecto a la construcción geométrica de las raíces de una ecuación algebraica. Uno de los aportes más relevantes de Descartes a las matemáticas, lo constituye la asociación de la geometría con el álgebra puramente simbólica, lo que propició el desarrollo de técnicas algebraicas en forma independiente de la visualización; ello permitió superar las limitaciones dimensionales del álgebra geométrica de Euclides, al hacer que los cuadrados o los cubos de los términos algebraicos se expresaran como magnitudes lineales y con ello se tratara de expresar a los problemas geométricos como problemas algebraicos.

Descartes presenta los principios de su geometría analítica en un libro que forma parte de su trabajo filosófico, el *Discurso del Método*. En síntesis, el libro primero de la *Géométrie*, titulado: *Problemas que pueden construirse empleando sólo circunferencias y líneas rectas* trata de los problemas que se pueden construir sin emplear más que los elementos mencionados. Podemos considerar que contiene el germen de la Geometría Analítica pues se plantean algunos procedimientos para resolver geométricamente ciertas operaciones algebraicas, mostrándose también cómo llegar a las ecuaciones que permiten resolver ciertos enunciados de geometría.

El segundo libro, *De la naturaleza de las líneas curvas*, proporciona quizás, el aspecto más moderno de su trabajo. Descartes expresa que fue escrito respondiendo a la necesidad de aclarar e introducir los conceptos que se usarán en el tercer libro. Para lo cual trata problemas sobre planos, sólidos y “lineales” es decir, aquellas líneas que no fueran ni rectas ni secciones cónicas, terminología heredada de Pappus, mediante las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto o mayor grado. Es aquí donde demuestra que basta conocer las relaciones que mantienen los puntos con las líneas rectas para encontrar las propiedades de las curvas, y proporciona ideas para la construcción de normales a una curva.

Finalmente, en el Libro III, *De la construcción de problemas que son sólidos y o más que sólidos,* estudia el tema de la resolución de ecuaciones y discute las relaciones que se establecen entre las raíces de una ecuación algebraica con los coeficientes de la ecuación. Presenta su técnica para el tratamiento de estas cuestiones que consiste en mostrar, mediante ejemplos diversos, cómo es que una ecuación algebraica pueda tener tantas raíces como lo indique el grado del polinomio y presenta también su célebre regla de los signos, tema que nos interesa discutir en este artículo.

LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES EN LOS TEXTOS

Destinamos este apartado para mostrar algunos de los enunciados de la regla de los signos de Descartes como han sido presentados en libros de texto escolar y para discutir, cuando sea el caso, las argumentaciones propuestas. El tema de la regla de los signos suele presentarse en aquellos apartados sobre teoría de ecuaciones en cursos de álgebra superior y, en menor proporción, en aquellos llamados de precálculo según la tradición anglosajona, eventualmente también en algunos textos de álgebra básica. Sin lugar a dudas, actualmente el tema ha perdido popularidad en la medida en que el cálculo aproximado y la localización y aislamiento de raíces se encuentra a la baja en el terreno educativo.

A fin de disponer de factores de contraste, comenzaremos presentando la versión que originalmente propusiera el propio Descartes. Como señalamos en el apartado anterior, es en la página 373 del Libro III de la *Géométrie* que establece una relación entre el número de cambios de signo de la sucesión de los coeficientes de un polinomio real con el número de sus raíces positivas. En dicho enunciado, aunque no se haga de manera explícita, se asume que los términos del polinomio están ordenados en forma descendente, de modo que sus potencias decrezcan; mientras que en la parte final del texto cuando se alude al método para determinar el número máximo de raíces negativas se asume, implícitamente, que la ecuación polinomial no presenta coeficientes nulos. Una adaptación del enunciado original dado por Descartes, cambiando falsas por negativas, verdaderas por positivas y ecuaciones por ecuaciones polinomiales, versaría en:

> *También se puede determinar el número de raíces positivas o negativas que cualquier ecuación polinomial pueda tener como sigue: una ecuación polinomial puede tener tantas raíces positivas como cambios de signo contenga, de $+a-$ o de $-a+$; y tantas raíces negativas como número de veces se encuentren en sucesión dos signos $+$ o dos signos $-$.*

Para nuestros propósitos, dividiremos el enunciado anterior en dos partes. La primera, aquella que trata sobre cómo determinar el número máximo de raíces positivas de una ecuación polinomial; mientras que la segunda, se ocupa de la determinación del número máximo de raíces negativas de la misma. En ambos casos, como señalamos anteriormente, la ecuación polinomial habrá de ser escrita de manera que las potencias de x decrezcan:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

El ejemplo que Descartes discute para tratar con la primera parte de su enunciado de la regla, es una ecuación polinomial de cuarto grado sin coeficientes nulos, a saber, $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. En esta ecuación, el número de cambios de signos es tres y el número de raíces positivas es tres también, lo que concuerda con su enunciado. De hecho como dijimos anteriormente, la ecuación polinomial propuesta fue construida de manera que se conocieran todas sus raíces positivas {2, 3, 4}, pues dicha ecuación fue el resultado de multiplicar las ecuaciones $x-2=0$, $x-3=0$, $x-4=0$, $x+5=0$.

La segunda parte de su enunciado sería falsa, a menos que no hubiese términos con coeficiente cero, pues si consideramos el caso de los polinomios:

$$x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + x; \qquad x^6 - x^5 - x^3 - x^2 + 1,$$

la secuencia de signos en ambos es idéntica {+, –, –, –, +}, así la formulación original de Descartes diría que ambos polinomios tienen el mismo posible número de raíces negativas, digamos que dos o ninguna. Pero la formulación correcta para derivar el posible número de raíces negativas se logra mediante la inspección del polinomio auxiliar $f(-x)$. Así obtendríamos que la sucesión de signos en el primer polinomio es {+, –, +, –, –} y tendrá, posiblemente, tres raíces o una raíz, mientras que en el segundo la sucesión {+, +, +, –, +} implica dos o cero raíces. Esto muestra, que Descartes al formular la segunda parte de su regla, habrá tenido en mente sólo a polinomios con coeficientes no nulos.

Este error en la formulación de la regla de los signos debido a Descartes, fue adecuadamente advertido pronto en el mundo académico, y la segunda parte de la regla fue modificada en los libros de texto y en sus posteriores formulaciones, al introducir al polinomio auxiliar $f(-x)$ como medio para localizar las raíces negativas de una ecuación polinomial.

En otro orden de ideas, nos llama la atención el párrafo siguiente en el que establece su posición respecto de la simplicidad de las demostraciones y, como dato curioso, sus comentarios sobre la actitud del lector ante el aprendizaje:

> *…he omitido aquí la demostración de la mayoría de mis enunciados, pues me parece tan fácil que si se toma la molestia de examinarlas sistemáticamente, las demostraciones se presentarán ante usted y será de mucho mayor valor aprenderlas así, que leyéndolas...* (Descartes, 1637, p. 389)[5].

Es claro que la noción de rigor evoluciona y pertenece, por así decirlo, a una época, entendiendo entonces, que la argumentación es producto de acciones de una comunidad que responden a un escenario sociocultural particular (Crespo, Farfán & Lezama, 2009); de modo que interpretando la cita anterior desde una perspectiva didáctica, ella sugiere el examen sistemático como medio para la justificación. En nuestra opinión, esta postura parece haber influido considerablemente a los autores de texto de entonces a la fecha. Aún ahora, en los libros de texto contemporáneos, no se suele presentar a la regla de los signos de Descartes acompañada de sus demostraciones ni de justificaciones que la presenten factible frente a los estudiantes, sino más bien, como dijera el propio Descartes, se considera que el examen de diversos ejemplos dará las pistas de su validez. Así encontraremos, en los libros de texto, presentaciones que en nuestra opinión se ubican en dos vertientes: unas que se ocupan de mostrar la validez y pertinencia de la regla de los signos de Descartes a partir de ejemplos genéricos y otras que se interesan por demostrarla bajo un cierto cuerpo discursivo. Entre las primeras tendremos las de (Sullivan, 1989; Mataix, 1967; Hall & Knight, 1980), mientras que entre las segundas ubicamos a las de (Dickson, 1939; Ferrar, 1943; Kostrikin, 1983; Uspensky, 1990).

---

[5] *...i'ay omis icy les demonstrations de la plus part de ce que iay dit a cause qu´elles m´ont semblé si faciles, que pourvûque vous preniés la peine d´examiner methodiquement si iay failly, elles se prefenteront a vous d´elles mesme : & il sera plus utile de les apprendre en cete façon, qu' en les lisant.* (Descartes, 1637, p. 389)

Una primera observación que podemos hacer de la revisión de los textos escolares consiste en señalar una clara coincidencia entre ellos; los autores tratan a la regla de los signos de Descartes como una técnica de fácil aplicación que resulta de suma utilidad para la identificación del número de raíces reales, positivas y negativas, de un polinomio. Si bien no todos la demuestran, ni todos buscan una construcción que la dote de sentido más allá que su mera ejemplificación, restringen su introducción a su enunciado y exhiben el funcionamiento que ésta tiene mediante ejemplos concretos. Con la intención de compartir esta opinión, hemos entresacado de los textos citados, con un poco más en detalle, lo que los autores hacen en su tratamiento.

Iniciemos con los autores que presentan la regla sin demostrarla. Aunque en el capítulo de funciones y gráficas del libro de precálculo de Sullivan (1989) se tratan las operaciones gráficas a un nivel introductorio y éstas se extienden hasta el tratamiento de los polinomios, la regla de los signos en cambio, sólo se ejemplifica con polinomios particulares y no se apoya en ningún tipo de información gráfica para sustentarla. Dice el autor, por ejemplo, que la regla de los signos de Descartes es un resultado que provee información acerca del número y localización de los ceros de una función polinomial, por lo tanto, sostiene, ayuda a determinar dónde buscar sus ceros. Se asume implícitamente que el polinomio debe estar ordenado en potencias decrecientes de x y que se requiere contar el número de variaciones de signos de los coeficientes de $f(x)$ y el de los coeficientes de $f(-x)$. Después de desarrollar un ejemplo, enuncia la regla como teorema y dejará la demostración como un ejercicio para el lector:

> *Let f denote a polynomial function. The number of positive zeros of f either equals the number of variations in sign of the coefficients of* $f(x)$ *or else equals that number less some even integer. The number of negative zeros of f either equals the number of variations in sign of the coefficients of* $f(-x)$ *or else equals that number less some even integer*[6] (Sullivan, 1989, p. 181).

El texto de Hall & Knight (1980), considerado un clásico del álgebra superior, a diferencia de Sullivan, se ocupa de la regla de los signos de Descartes en el capítulo destinado a la teoría de las ecuaciones. Presenta la relación entre el grado del polinomio y el número de sus raíces, así como entre éstas y los coeficientes de la ecuación. Encontramos al respecto el siguiente texto:

> *Una ecuación* $f(x)=0$ *no puede tener más raíces positivas que el número de cambios de signo que hay en* $f(x)$*, y no puede tener más raíces negativas que el número de cambios de signo que haya en* $f(-x)$ (Hall & Knight, 1980, p. 553).

No proporciona demostración alguna, aunque presenta una idea que sirve de base para construirla; multiplicar por un binomio cuyos signos sean respectivamente + y –, lo que produce, para el ejemplo que tratan, un cambio de signo adicional a los cambios que originalmente tenía el polinomio. Presentan entonces la demostración para un caso particular. Esta idea fue

[6] Denotemos con f a una función polinomial. El número de raíces positivas de f es igual al número de variaciones de signo de los coeficientes de $f(x)$ o es igual a este número menos algún entero par. El número de las raíces negativas de f iguala el número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(-x)$ o es igual a este número menos algún entero par.

originalmente usada por Segner en 1756 y posteriormente incorporada en la demostración de Gauss de 1828.

Por su parte, el texto de Kostrikin (1983) dedica un capítulo al estudio de las raíces de polinomios y en su presentación establece que esta cuestión ha dejado de ser determinante en álgebra, pero que su importancia no es discutida por nadie. Ello obedece, en su opinión, a que muchos problemas matemáticos se reducen al cálculo de raíces aisladas de polinomios concretos, o a la descripción cualitativa del conjunto de ellas. Después de definir raíz, enuncia el teorema de Berzout[7] respecto a la divisibilidad de los polinomios por binomios *x – raíz*. Trata al polinomio como una función y desarrolla las fórmulas de interpolación de Lagrange y de Newton. En el capítulo de polinomios con coeficientes reales, estudia la descomposición en factores irreducibles y enuncia la regla de los signos de Descartes en el apartado para la localización de las raíces. Este texto enuncia la regla como un teorema con el siguiente enunciado:

> *El número de raíces positivas del polinomio f con coeficientes reales, coincide con* $L(f)$ *o es menor en un número par* (Kostrikin, 1983, p. 254).

donde $L(f)$ es el número de cambios de signo de los coeficientes del polinomio. Considera de sumo interés determinar un intervalo [*a*, *b*] donde se hallen todas las raíces del polinomio y también los intervalos donde ellas quedan aisladas unas de otras, mencionando que, en el año de 1829, es Sturm quien proporciona la primera resolución satisfactoria del método para aislar las raíces.

Con relación a los autores que se ocupan de dar alguna demostración de la regla de los signos, tenemos a Dickson (1939). En ese texto, la regla de los signos de Descartes aparece en el capítulo sobre el número de las raíces reales y su aislamiento donde enuncia la regla como sigue:

> *The number of positive real roots of a real equation either is equal to the number v of its variation of sign or is less than v by a positive even integer. A root of multiplicity m is here counted m time*[8] (Dickson, 1939, p. 77).

En el texto de Mataix (1967) en cambio, se demuestran algunos teoremas mediante la fórmula de Taylor y se utiliza cierto tipo de argumentos gráficos relativos al papel que juegan las derivadas en la determinación, por ejemplo, del número de ondulaciones de una gráfica de una función polinómica. Introduce el teorema de Rolle, para discutir la ubicación relativa de las raíces de la función con las de sus derivadas, para lo cual se vale del examen de los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Enuncia la regla de los signos de Descartes como sigue:

> *El número de raíces reales y positivas de una ecuación no puede exceder al número de variaciones de su primer miembro, y cuando es menor, la diferencia es un número par* (Mataix, 1967, p. 269).

---

[7] También conocido como Teorema del resto o de Ruffini, idea que incluso Descartes enuncia en su Geometría (1637, p.372)

[8] *El número de raíces positivas de una ecuación real es igual al número v de sus variaciones de signo o es menor que v por un entero par positivo. Una raíz de multiplicidad m es contada m veces.*

El autor no demuestra esta aseveración, aunque muestra por qué se presenta la paridad del número de raíces con argumentos puramente algebraicos y deriva de su presentación las siguientes consecuencias interesantes:

- *El número de raíces negativas de una ecuación no puede exceder al número de variaciones de su transformada en* $-x$, *y cuando es menor la diferencia es un número par.*
- *La suma* $(v+v')$ *de las variaciones de una ecuación y de su transformada en* $-x$ *no es mayor que el grado m de la ecuación, y cuando es menor, la ecuación tiene por lo menos* $m-(v+v')$ *raíces imaginarias.*
- *Si todas las raíces de una ecuación son reales, el número p de las positivas es igual al número v de variaciones, y el número de raíces negativas es igual al número* v'*de variaciones de la transformada en –x.*
- *Si una ecuación es completa y no tiene más que variaciones, todas sus raíces reales son positivas.*
- y finalmente*, si una ecuación no tiene más que permanencias, todas sus raíces reales son negativas* (Mataix, 1967, pp. 270-271).

En el libro de Uspensky (1990), la regla de los signos se presenta en el capítulo sobre la separación de raíces en polinomios con coeficientes reales, luego de discutir el efecto que tienen sobre el signo del polinomio los valores grandes o pequeños de la variable. Afirma y utiliza en sus demostraciones el hecho de que existirá una raíz del polinomio si éste pasa de positivo para un determinado valor de *x* a negativo para otro. Se apoya también en el teorema de Rolle y en el teorema de Jean-Paul de Gua para probar la regla de los signos de Descartes. Enuncia la regla como:

> *El número de raíces reales positivas de una ecuación con coeficientes reales* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, *nunca es mayor que el número de variaciones en la sucesión de sus coeficientes* $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ *y, si es menor, siempre lo es en un número par* (Uspensky, 1990, p. 138).

Como dijimos, a diferencia de los libros anteriores, la demostración se apoya en un resultado conocido como teorema de *de Gua*, el cual trata de la relación entre el número de raíces de la función $f(x)$ con el número de raíces de su derivada. Para lo cual, trabaja con la ecuación auxiliar, $F(x)=xf'(x)-\lambda f(x)=0$ en la que controlando el valor de la constante arbitraria λ se busca alcanzar al objetivo de la prueba.

Por último, en el libro de Ferrar (1943) se introduce el tema de la regla de los signos en el capítulo de teoría de ecuaciones después de haber analizado algunas cuestiones sobre gráficas de funciones polinomiales y donde propone una justificación basada en el teorema de Bolzano para funciones continuas. Enuncia algunos resultados notables para el polinomio $y=p(x)$; como por ejemplo: si $p(a)>0$ y $p(b)<0$, entonces existe al menos una raíz en [*a*, *b*]; o, dadas $p(x)$ y $p'(x)$, entonces entre dos raíces de $p(x)$ hay al menos una de $p'(x)$; y entre dos raíces de $p'(x)$ hay al menos una de $p(x)$. Se desprende de esta afirmación que el autor considera que el polinomio

$p(x)$ tiene todas sus raíces reales, pues de otro modo no se cumpliría con esta segunda afirmación.

Establece también que si $p(x)$ tiene a la expresión $(x-a)^r$ como factor, entonces $p'(x)$ tendrá a la expresión $(x-a)^{r-1}$ como factor, por tanto la multiplicidad de una raíz de $p(x)$ es de un orden menor en $p'(x)$. Posteriormente, enuncia la regla de los signos de Descartes como un teorema que demuestra inductivamente haciendo uso de los resultados anteriores:

> *Let $p(x)$ be a given polynomial. Then the equation $p(x)=0$ cannot have more positive roots then there are changes of sign in $p(x)$*[9] (Ferrar, 1943, p.141).

Su demostración, como señalamos, utiliza la inducción matemática haciendo uso de los polinomios $p(x)$ y su derivada $p'(x)$.

La mayoría de los textos mencionados, establecen que la Regla de los signos de Descartes es una herramienta matemática que resulta práctica cuando todas las raíces de la ecuación son reales contrastando con la muy limitada de su aplicación al no conocer de antemano, en la mayoría de los casos, la naturaleza de las raíces.

ARGUMENTOS Y DEMOSTRACIONES

En nuestra opinión, básicamente son dos las argumentaciones que se utilizan para demostrar o explicar la regla de los signos de Descartes en la literatura analizada. La primera de dichas formas, se apoya en el teorema fundamental del álgebra de Gauss, mientras que la segunda lo hace basando sus argumentaciones en el teorema de Bolzano o teorema del valor intermedio del análisis matemático clásico.

Dado que la cuestión que plantea la regla de los signos de Descartes trata de la relación que se establece entre el número de variaciones de signo de los coeficientes del polinomio y la cantidad de sus raíces positivas, las demostraciones que hemos analizado siguen, en nuestra opinión, una de dos lógicas, a las cuales llamaremos, genéricamente, como el acercamiento algebraico y el acercamiento analítico.

Para la lógica algebraica, la explicación de las variaciones de signo entre los coeficientes se debe al efecto que produce sobre el signo de los coeficientes la multiplicación del polinomio por el factor (*x – raíz positiva*); mientras que en la lógica analítica en cambio, la presencia de la raíz positiva se justifica a través de las variaciones de signo entre coeficientes. En este segundo caso se usa la explicación del cambio de signo de la función en dos puntos del dominio para mostrar la existencia de raíces entre dichos puntos.

---

[9] Sea $p(x)$ un polinomio dado. Entonces la ecuación $p(x)=0$ no puede tener más raíces positivas que los cambios de signos que hay en $p(x)$.

Así las cosas, en un caso, se habrá de multiplicar un polinomio arbitrario por un factor lineal de la forma $x-r$, para mostrar que dicha multiplicación introduce en el resultado al menos un cambio adicional de signo. Mientras que en el otro, la cuestión radica, no en multiplicar por un factor más, sino en mostrar que un cambio en el signo de dos coeficientes consecutivos, o bien de dos coeficientes cuyos términos intermedios sean cero, produce a lo más una raíz real en un cierto intervalo.

Acercamiento algebraico	***Acercamiento analítico***
Si $V(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = q \Rightarrow V[(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)(x - a)] = q + 1$	Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_i\, a_{i+1} < 0$ *para algún* $i \Rightarrow f$ *puede tener a lo más una raíz en un cierto intervalo*
Una adición de un cambio de signo proviene de la presencia de una raíz positiva más	*Un cambio de signo en la lista de los coeficientes sucesivos, hace factible una raíz positiva más*

Diagrama 1. Esquema de las lógicas algebraica y analítica

Analicemos, como un ejemplo de los dos acercamientos que hemos presentado en el diagrama anterior y que hemos denominado como acercamiento algebraico y acercamiento analítico, los argumentos propuestos por Hall & Knight (1980) en su texto de álgebra superior conjuntamente con la demostración original de Gauss (1828); y discutiremos a continuación la demostración que brinda Ferrar (1943) como ejemplo de la lógica analítica.

El argumento que utilizan los autores Hall & Knight (1980) para mostrar la validez de la regla de los signos de Descartes, descansa en el análisis de la estructura de un ejemplo particular. Proponen considerar una sucesión específica de signos que represente a los signos de los coeficientes de un polinomio, luego "multiplican" por los signos de un factor de la forma $x-a$, con $a>0$ y muestran que el número de cambios de signo crece al menos en uno.
Consideran entonces, la sucesión de signos $\{+ + - - + - - - + - + -\}$; que será multiplicada por la sucesión de signos $\{+-\}$. Afirman que habrá cuando menos un cambio de signo más en el producto que en el polinomio original.

$$\begin{array}{r}
+ + - - + - - - + - + - \\
+ - \\
\hline
- - + + - + + + - + - + \\
+ + - - + - - - + - + - \\
\hline
+ \pm - \mp + - \mp \mp + - + - +
\end{array}$$

A partir de este ejemplo, argumentan que una ambigüedad ∓ o ± reemplaza cada permanencia de signo en el polinomio original. Señalan también que los signos colocados antes y después de una ambigüedad son distintos y que se introduce un cambio de signo adicional en el extremo. A continuación comentan que el caso más desfavorable es aquel en el que las ambigüedades se tornan permanencias; observándose que el resultado tiene al menos un cambio adicional de signo respecto a la serie original y por tanto el resultado sería $\{+ + - - + - \ - \ - + - + - +\}$.

La argumentación anterior está basada en una prueba presentada por Segner en 1756 ante la Real Academia de Ciencias de Berlín. Su prueba de naturaleza algebraica descansa en que al multiplicar un polinomio cualquiera por un factor de la forma $x - a$, se aumenta una variación en los cambios de signo y que al multiplicar por un factor de la forma $x + a$ se aumenta en una unidad el número de sus permanencias.

La demostración de Gauss de 1828 utiliza esa misma idea tratando con el caso más general posible. Para ello, demuestra que si se toma un polinomio de grado uno con un cambio de signo, entonces éste tendrá una sola raíz positiva. Luego advierte que si se le multiplica por un factor $x-a$ se produce al menos un nuevo cambio de signo. Posteriormente toma un polinomio arbitrario y demuestra que si se le multiplica por un factor $x- a$ se incrementa también, como en el caso anterior, al menos en uno el número de cambios de signo.
La demostración de gauss a la regla de los signos de descartes, fue considerada como la más general y elegante. Considera un polinomio x, del cual algunos de sus coeficientes pueden ser cero y lo representa de la siguiente manera:

$$X = x^m + \ldots - nx^n - \ldots + px^p + \ldots - qx^q - \ldots \pm v$$

Donde $-nx^n$ es el primer término negativo, $+px^p$ es el primer término sucesivo positivo, etcétera.
El producto de x por un binomio $x- a$, $a > 0$, tendrá la forma:

$$X\,(x-a) = x^{m+1} + \ldots - n'x^{n+1} - \ldots + p'x^{p+1} + \ldots - q'x^{q+1} \ldots$$

Con n', p', q' positivos. El producto cambia entonces el signo, al menos en una unidad adicional, pues si se consideran los términos cuyo signo no se conoce (como cero o sin cambio), sólo se ha agregado un cambio más. Naturalmente este producto podrá tener más cambios de signo, pero el enunciado a demostrar dice que este producto produce al menos un cambio más de signo. Así fue probada por gauss la regla de los signos de descartes.

Si seguimos los cálculos a los que hace referencia Gauss, notaremos con mayor nitidez la estructura de su argumentación. Supongamos que un polinomio general:

$$F\,(x) = x^m + a_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + a_1\,x + a_0$$

Es escrito en la forma

$$X^m + \ldots - nx^n - \ldots + px^p + \ldots - qx^q - \ldots \pm vx^v \pm \ldots,$$

Donde n, p, q, ..., v son positivos y $-nx^n$ es el primer término negativo, $+px^p$ es el primer término positivo después de $-nx^n$ y así sucesivamente. De esta manera se agrupan los términos del polinomio $f(x)$ en bloques del mismo signo, es decir, sin variaciones de signo en cada uno de ellos, se tendrá:

$$(x^m + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}) - (a_n x^n + \ldots + a_{p+1}x^{p+1}) + (a_p x^p + \ldots + a_{q+1}x^{q+1}) - (a_q x^q + \ldots + a_{v+1}x^{v+1}) + \ldots \pm (a_v x^v + \ldots + a_0)$$

Se observa que al multiplicar por el factor $x-a$, con $a > 0$, usando el método de la multiplicación sintética considerando sólo los signos de los coeficientes se tendrá lo siguiente:

$$\begin{array}{r}
(+\ldots+) - (+\ldots+) + (+\ldots+) - (+\ldots+) +\ldots\pm (+\ldots+) \\
(+\ -) \\
\hline
(-\ \ldots\ -) + (+\ \ldots\ +) + (-\ \ldots\ -) + (+\ \ldots\ +) +\ldots+ (\mp\ \ldots\ \mp) \\
\\
(+\ldots+) +(-\ \ldots\ \ -) +(+\ \ldots\ \ +) +(-\ \ldots\ \ -) + \ldots+ (\pm\ldots\ \pm) \quad \\
\hline
(+\ldots?) +(-\ldots\ ?) + (+\ \ldots\ ?) +(-\ \ldots\ ?) +\ldots+ (\pm\ldots?)\ldots\ \mp
\end{array}$$

En tal caso, siempre el primer término del bloque resultante conserva el signo del polinomio original, salvo en su último término, donde cambia de signo. De modo que el resultado tendrá, al menos, un cambio de signo más respecto del original.

Por otra parte, para el caso de los argumentos de tipo analítico que encontramos en la revisión de los textos escolares, la presentación es sensiblemente diferente que la de aquellos de corte algebraico. Veamos como un ejemplo, el caso de la demostración de Ferrar (1943, pp.133-160) en su libro de álgebra superior destinado a los primeros años universitarios. En este texto se introduce el tema de la regla de los signos en el capítulo sobre la teoría de ecuaciones, a la par que trata con algunas ideas relativas a la continuidad de funciones. Se ocupa de las gráficas de los polinomios al discutir qué curvas podrían describir polinomios (las ondas suaves) y cuales no (aquellas con picos) y discute algunos teoremas elementales ya mencionados en la sección anterior, algunos de los cuales son resultados clave en su demostración de la regla de los signos de descartes, donde utiliza inducción matemática trabajando simultáneamente con la función y su derivada como se muestra a continuación.

> *Sea $p(x)$ un polinomio dado. Entonces la ecuación $p(x)=0$ no puede tener más raíces positivas que los cambios de signos que hay en* $p(x)$ (ferrar, 1943, p. 141).

El autor inicia mostrando que el teorema es verdadero para polinomios lineales y supone que el teorema es verdadero para un polinomio $p(x)$ de grado $n-1$. Considera al polinomio $p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, que tiene *m* cambios de signo y donde $a_0 > 0$. Analiza la situación organizándola en casos, primero, para $a_1 > 0$ el segundo cuando $a_1 < 0$ y el tercero para $a_1 = 0$.

I) el teorema es válido cuando el polinomio $p(x)$ es de primer grado; pues la ecuación $a_1 x + a_0 = 0$ no puede tener una raíz positiva al menos que a_1 y a_0 tengan signos opuestos.

II) supone ahora que el teorema es cierto para polinomios de grado $n-1$ y considera primero cualquier polinomio de grado *n* con término constante positivo, es decir, $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, con $a_0 > 0$ y el cual tiene *m* cambios de signo.

IIA) sea $a_1 > 0$. Ningún cambio de signo se pierde cuando el término a_0 (positivo) se omite al derivar, pues $p'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$ también tiene *m* cambios de signo. Por ii), $p'(x) = 0$ no puede tener más que *m* raíces positivas. Debido a que $p(0) = a_0$ y $p'(0) = a_1$ son ambos positivos, la gráfica de $p(x)$ cerca de $x = 0$ tiene la forma indicada en la figura iia. En ella, la gráfica crece desde a_0 pues $p'(0)$ es positiva, y a representa la raíz positiva más pequeña de $p'(x)=0$. (si $p'(x)=0$ no tiene raíz positiva, la gráfica crece incesantemente desde a_0 en adelante y la ecuación $p(x)=0$ no tiene raíces positivas).

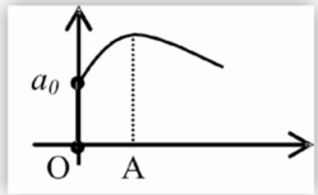

Figura II A

IIB) sea $a_1 < 0$. Entonces $p'(x)=n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$ tiene $m-1$ cambios de signo, pues se pierde un cambio cuando el término positivo a_0 desaparece. Como $p'(0)=a_1$ es negativo, la gráfica de $p(x)$ cerca de $x=0$ desciende y tiene una de las formas indicadas en la figura ii b.

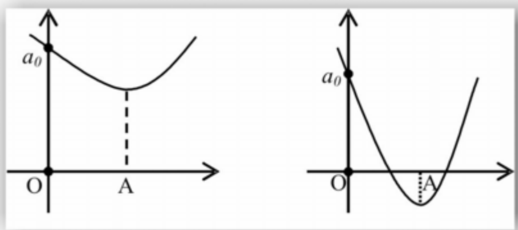

Figura II B

Por II), $p'(x)=0$ tiene a lo más $m-1$ raíces positivas. Entre ellas están a lo más $m-2$ raíces de $p(x)=0$; una raíz de $p(x)=0$ puede estar entre o y a y otra a la derecha de la raíz positiva más grande de $p'(x)=0$. Así $p(x)=0$ no puede tener más que m raíces positivas.

IIC) sea $a_1=0$. Entonces, la ecuación puede ser $a_n x^n + a_0 = 0$, la cual no tiene raíces positivas cuando a_n y a_0 tienen el mismo signo, y a lo más una cuando a_n y a_0 tengan signos opuestos, y así el teorema es probado directamente; o la ecuación es $a_n x^n + \ldots + a_r x^{n-r} + a_0 = 0$, donde $a_r \neq 0$ y no existen términos en $x, x^2, \ldots, x^{n-r-1}$.

Cuando $a_r > 0$, $p'(x)$ es positivo para x pequeños y el argumento procede exactamente como en IIA), salvo que la tangente a la gráfica en a_0 es paralela al eje x. Cuando $p'(x)$ es negativo, el argumento procede como en iib), siempre con la tangente en a_0 paralela al eje x, por tanto, $p(x) = 0$ no tiene más que m raíces positivas.

Si a_0 es negativo, se aplica el trabajo previo a la ecuación. En caso de que a_0 sea cero y el polinomio contiene al término x^k, pero no x^{k+1}, como un factor, se aplica el trabajo al polinomio obtenido al dividirlo por x^k, pues quitar este factor no altera el número de las raíces positivas ni el signo de los varios términos del polinomio.

Así en todos los casos, si el teorema es cierto cuando $p(x)$ es de grado $n-1$, entonces es también cierto cuando $p(x)$ es de grado n; entonces, por inducción, es cierto para ecuaciones de cualquier grado.

En esta prueba el autor basa sus argumentos en las gráficas cuyos puntos de retorno no están sobre el eje x, pero señala que en caso de que existan puntos de retorno sobre el eje x, digamos que en $x = a$, entonces $(x–a)^k$ es un factor de $p'(x)$ y $(x–a)^{k+1}$ es un factor de $p(x)$.

A MANERA DE SÍNTESIS. PARTE I

El desarrollo de nociones y conceptos como función, raíz o solución, precisan de grandes periodos de evolución hasta alcanzar sus estados actuales. Durante este tiempo las nociones se modifican y adquieren progresivamente significados que les son característicos. Por esa razón que consideramos importante indagar respecto al proceso de construcción de los significados compartidos asociados a los conceptos y procedimientos matemáticos a lo largo de su devenir histórico y social. Pues comprender estos episodios, es nuestra tesis, resulta valioso al momento de buscar explicarse el por qué dichas entidades matemáticas resultan tan resistentes al entendimiento de los alumnos de nuestros días. Dos destacados estudios con esta filosofía y referidos respectivamente a la noción de función logaritmo y a la noción de punto de inflexión pueden consultarse en (Ferrari, 2008; Castañeda, 2004).

El artículo que ahora presentamos sobre la regla de los signos de Descartes, centró su atención en un método que se encuentra en el cruce de caminos entre los procedimientos algebraicos y analíticos y en una época marcada por el nacimiento de un nuevo espíritu científico.

Como se pudo apreciar en estas páginas, hemos sintetizado aspectos de la evolución de un teorema, “ires y venires”. Aunque la presentación ha sido limitada a algunos rasgos de su historia, creemos que ilustra el sentido de la búsqueda de la construcción social del conocimiento que sustenta la socioepistemología en el sentido de Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez (2006), pues si bien el teorema que hemos estudiado es publicado por descartes y por Harriot, hecho que dio lugar a una muy prolongada polémica respecto de la originalidad del resultado (Stedall, 2000), es cierto también que su completa demostración y difusión institucional se ha debido a una gran cantidad de personas en contextos y circunstancias concretas.

Consideramos también que el conocimiento matemático, como parte de la cultura, vive en instituciones y se materializa a través de las prácticas y contextos que les son propios. La predicción, la regla de los signos, la teoría de ecuaciones o la noción de verdad en la ciencia, comparten escenarios y circunstancias culturales, históricas e institucionales. Las actividades humanas que acontecen al seno de organizaciones sociales impregnan por igual a las prácticas cotidianas como aquellas que consideraríamos las más especializadas; en este sentido, al atender a estas cuestiones creemos que un amplio programa de investigación emerge en beneficio del quehacer didáctico. El problema de la estructuración del conocimiento escolar, cada vez con más claridad, está siendo entendido como un verdadero asunto de investigación científica. Este aporte en consecuencia, se suma a aquellos que plantean el estudio sistémico del quehacer educativo

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, M. & Falk, M. (2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 245 – 264.

Anderson, B., Jackson, J. & Sitharam, M. (1999). Descartes' Rule of Signs Revisited. *American Mathematical Monthly 105*(5), 854 – 856.

Bartolozzi, M. & Franci, R. (1993). La Regola del Signi dall'Enunciato di R. Descartes (1637) alla Dimostrazione di C. F. Gauss (1828). *Archive for History of Exact Sciences 45*(4), 335 – 374.

Borowczyk, J. (1989). Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations de signe de Descartes. *La Démonstration mathématique dans l'histoire.* Actes du 7ème colloque inter - IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 275 – 293.

Cantoral, R., Farfán, RM., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(4), 83 –102.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la Serie de Taylor. *Mathesis 11*(1), 55 – 101.

Cantoral, R. & Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon*, Vol. 42, Núm. 14(3), 353 – 369.

Cantoral, R. & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica* 2 (pp. 33–70). Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

Cantoral, R., Molina, J. & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez & J. Molina (Eds.) *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 18* (463-468). México: Clame.

Cantoral, R. & Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 265 – 292.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada -IPN, México.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(1), 56 – 74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo: Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Crespo, C., Farfán, R.-M. & Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(1), 29 – 66.

Descarte, R. (1637). *La Geometría*. México: Serie Matemáticas, IPN y Limusa.

Dickson, L. E. (1939). *New course in the theory of Equation*. NY, USA: John Wiley & Sons.

Farfán, R.-M. (1997). *Ingeniería didáctica: la matemática de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrar, W. L. (1943). *Higher Algebra for School.* UK: Oxford University Press.

Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 309-354.

Gauss, C. F. (1828). Beweis eines algebraischen Lehrsatzes. *Journal für die reine und angewandte Mathematick.* 1 – 4.

Grabiner, D. (1999). Descartes' Rule of Signs: Another Construction. *American Mathematical Monthly 106*(9), 854 - 856.

Hall, H. S. & Knight, S. R. (1980). *Álgebra Superior*. México: Unión tipográfica editorial hispano americano.

Kostrikin, A. I. (1978). *Introducción al Álgebra*. Moscú, Rusia: Editorial MIR.

Kurosch, A. G. (1981). *Curso de Álgebra Superior*. Moscú, Rusia: Editorial MIR.

Lacroix, S. F. (1797). *Traité élémentaire de calcul différentiel, et de calcul intégral.* Bachelier Imprimeur Libraire de l'Ecole Polytechnique.

Lagrange, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques.* Imprimeur libraire pour les mathématiques.

Mataix, C. (1967). *Análisis algébrico e infinitesimal*. Madrid, España: Editorial Dossat.

Sánchez, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(2), 267 – 296.

Stedall, J. (2000). Rob'd of Glories: The Posthumous Misfortunes of Thomas Harriot and His Algebra. *Archive for History of Exact Sciences 54*(6), 455 – 497.

Sullivan, M. (1989). *Precalculus*. USA: Maxwell Macmillan International Editions.

Taylor, B. (1715). *Methodus incrementorum directa et inversa.* Gran Bretaña.

Uspensky, J. V. (1990). *Teoría de Ecuaciones*. México: Noriega Limusa.

Vrancken, S. & Engler, A. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa* Agosto 2008 10(38), 36 – 45.