UN ENFOQUE PARA LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL PRIMER CICLO UNIVERSITARIO

Fred Alberto Lucuy Suarez., María Graciela Dodera., Laura Virginia Ponce
Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires (Argentina)
gdodera@cbc.uba.ar ; alucuy@gmail.com

RESUMEN

En este artículo se introduce el concepto de *compatibilidad parcial* a un sistema incompatible de ecuaciones lineales a partir de la visualización gráfica. Se explicitan las condiciones para la clasificación en sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles haciendo hincapié en las implicancias gráficas de las mismas, en especial para el caso de incompatibilidad. Se introduce la noción de compatibilidad parcial y se detallan los métodos para alcanzar la solución más cercana a la esperada u óptima. Por último, se presenta un ejemplo de aplicación. La propuesta intenta, con la inclusión de la noción de compatibilidad parcial y de inversa generalizada, contribuir a una mayor comprensión del tema *Sistemas de ecuaciones lineales* y, en particular, al fortalecimiento del concepto 'solución'. Consideramos que este enfoque es adecuado para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en los primeros cursos universitarios de Algebra. Creemos además, que constituye una motivación para el alumno el poder hallar, frente un problema real, la solución más cercana a la esperada u óptima.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas no sólo implica la aplicación de pasos estructurados y reglas sino la utilización de la capacidad de análisis, síntesis, correlación y la observación-intuición.

Se debe considerar la visualización como apoyo al álgebra lineal, no sólo para volcar sus resultados de manera gráfica, sino para afianzar conceptos y métodos matemáticos.

Hillel (1997) en un trabajo sobre nivel de descripción y nivel de representación en Algebra Lineal realizado con alumnos universitarios marca que las dificultades en el aprendizaje se centran en el contenido del tema teórico en sí mismo y en las características del álgebra lineal. Señala además, la dificultad que tienen los alumnos en el manejo del lenguaje de la teoría general (espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores), del lenguaje de la teoría específica en R^n (n-uplas, matices, determinantes, soluciones de sistemas de ecuaciones) y del lenguaje geométrico en dos o tres dimensiones (vectores, rectas, planos, hiperplanos, proyecciones).

Según Alsina Catalá (1987) el referente geométrico en dos y tres dimensiones contribuye a la formación del pensamiento visual. Por su parte, Guzmán (2002) afirma que existe una correspondencia entre la representación visual y los significados matemáticos (representación isomórfica).

Observamos que en las escuelas de nivel primario y secundario, y en los primeros cursos universitarios los alumnos poseen y adquieren conocimientos algebraicos pero prescinden del empleo de la geometría para analizar y correlacionar conceptos y resolución de problemas. En particular, con referencia a sistemas de ecuaciones lineales, los alumnos alcanzan a dominar las técnicas de resolución pero presentan serias falencias en la comprensión del concepto 'solución' y en la visualización del conjunto solución, aún en R^2 y R^3.

Algunos autores, entre ellos Mallet (2007), proponen métodos de enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales a partir del uso de programas tales como Maple que permiten graficar las ecuaciones de manera de facilitar la visualización del sistema propuesto y su correspondiente conjunto solución.

Cabe destacar que, en general, en los primeros cursos de Álgebra Lineal a nivel universitario, se introduce el tema Sistemas de ecuaciones lineales detallando las condiciones para que exista o no solución, los métodos para alcanzar el conjunto solución y la representación gráfica. En el caso de sistemas compatibles indeterminados, si bien se hallan las infinitas soluciones generalmente no se enfatiza que la forma de expresarlas no es única. En el caso de sistemas incompatibles sólo se hace referencia a que no existe solución, sin tener en cuenta que se puede buscar una solución aproximada que compatibilice en forma parcial el sistema de ecuaciones. Dichas soluciones presentan error que es necesario minimizar para optimizar la solución aproximada.

Una revisión de los textos utilizados en cursos preliminares de Algebra permite afirmar que el tema se desarrolla prescindiendo de la noción de compatibilidad parcial.

En este artículo se pretende introducir el concepto de *compatibilidad parcial* a un sistema incompatible de ecuaciones lineales a partir de la visualización gráfica. Se dan las condiciones para la clasificación en sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles, haciendo hincapié en las implicancias gráficas de las mismas, en especial para el caso de incompatibilidad, introduciéndose la noción de compatibilidad parcial. Se detallan los métodos para alcanzar la solución más cercana a la esperada u óptima, y por último, se presenta un ejemplo de aplicación.

Nuestra propuesta intenta, con la inclusión de la noción de compatibilidad parcial y de inversa generalizada, contribuir a una mayor comprensión del tema *Sistemas de ecuaciones lineales* y, en particular, al fortalecimiento del concepto 'solución'. Consideramos que este enfoque es adecuado para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en los primeros cursos universitarios de Algebra.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES - COMPATIBILIDAD PARCIAL

Las diferentes técnicas empleadas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales permiten encontrar por lo general tres tipos de soluciones, respecto de las cuales dichos sistemas se clasifican como compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles.

Al desarrollar tales técnicas, suele ocurrir que en la mayoría de los casos no se exige una interpretación geométrica más amplia y adecuada del problema a resolver, y por tal motivo, se pierde información lo suficientemente relevante, que impide compatibilizar las ecuaciones en forma parcial o total, para lograr una solución determinística.

Al escribir un sistema de ecuaciones en su forma matricial se obtiene una ecuación del tipo:

$$Ax = b \quad , \ A \in R^{m \times n} \ , \ x \in R^{n \times 1}, \ b \in R^{m \times 1} \tag{1}$$

El sistema tendrá solución siempre que el vector b pertenezca al subespacio $col(A)$ generado por vectores columna $\{W_1, W_2, ..., W_k\}$ linealmente independientes de la matriz original A, siendo $rg(A) = k$, $k \leq n$.

Si x_0 es solución única de (1) el vector b puede expresarse como una combinación lineal de la forma $b = \sum_{j=1}^{k} x_{0j} W_j$, siendo $k = n$ y x_{0j} cada una de las componentes del vector x_0.

Si el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones del tipo $x_0 + \lambda\Phi$, la combinación lineal se reduce a:

$$b = \sum_{j=1}^{k} \left[x_{0j} W_j + \lambda\left(\varphi_j W_j\right) \right], \text{ con } k < n \text{ y } \Phi = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j W_j = 0 .$$

De esta forma la solución se puede expresar como una solución particular x_0 más la solución del homogéneo $\lambda\Phi$.

Por el contrario, si el sistema es incompatible, el vector b no podrá estar completamente generado por $col(A)$, y en cuyo caso el rango de su matriz ampliada A' será mayor que la dimensión del subespacio $col(A)$. Sin embargo, a menos que el vector b se encuentre íntegramente generado por el subespacio ortogonal al $col(A)$, existirá una compatibilidad parcial debido a la proyección de dicho vector sobre el hiperplano generado por los vectores base de $col(A)$, como se muestra en el esquema de la Fig.1:

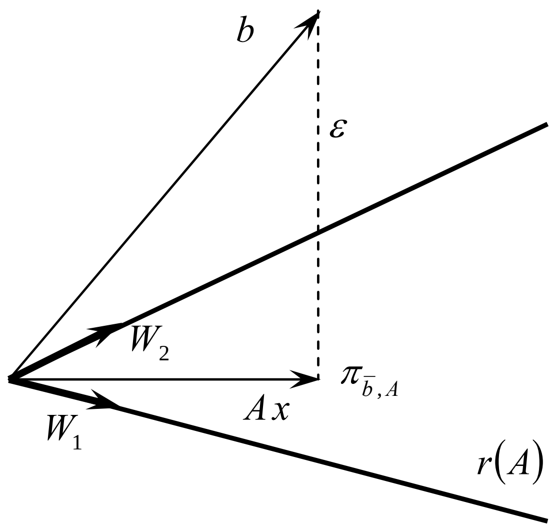

Figura 1: Proyección del vector b sobre el subespacio generado por el $col(A)$, que compatibiliza en forma parcial el sistema $Ax = b$

Esta proyección permite definir el vector ε como

$$\varepsilon = b - Ax \iff Ax = b - \varepsilon \iff b = Ax + \varepsilon \tag{2}$$

Dicho vector es el vector diferencia o residuo cuya norma se quiere anular o en el peor de los casos minimizar.

Al extender la base de $col(A)$ a $\{W_1, W_2, \ldots\ldots, W_k, W_{k+1}, W_{k+2} \ldots\ldots W_m\}$, de manera de generar todo el espacio, el vector b se puede escribir como:

$$b = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j W_j + \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_j W_j \tag{3}$$

donde la primera sumatoria es la combinación lineal de vectores que generan la proyección del vector b sobre $col(A)$ y la segunda sumatoria corresponde a la proyección del vector b sobre $Nul(A)$.

Comparando (2) y (3), se deduce que el vector diferencia o residuo ε está generado por $Nul(A)$, de dimensión $m-k$.

Cabe destacar que si $m-k=0$ es $\varepsilon=0$, el vector b resulta estar íntegramente generado por $col(A)$ y por ende el sistema planteado en (1) será compatible. En cambio, si $m-k>0$ $(\varepsilon \neq 0)$, el sistema (1) será incompatible, pero a menos que la proyección del vector b sobre $col(A)$ sea nula será posible encontrar una solución aproximada que compatibiliza, al menos parcialmente, al sistema dado en (1). Dicha compatibilidad parcial se optimiza proyectando el vector b sobre $col(A)$ en forma ortogonal pues dicha proyección es la que minimiza al vector diferencia o residuo ε definido en (2).

Interesa pues encontrar la proyección ortogonal del vector b sobre $col(A)$ de modo de compatibilizar parcialmente el sistema optimizando la solución aproximada. Multiplicando a izquierda en (2, expresión central) por la traspuesta de A se obtiene

$$A^t Ax = A^t(b-\varepsilon) \tag{4}$$

donde A^tA resulta inversible (siempre que el vector b no sea ortogonal al $col(A)$) y $A^t\varepsilon=0$, por ser el producto $A^t\varepsilon$ la proyección ortogonal del vector residuo ε sobre el subespacio generado por $col(A)$. Por último, multiplicando a izquierda en (4) por la inversa de A^tA , se llega a la siguiente expresión para la solución x más cercana a la esperada u óptima del sistema planteado en (1):

$$x = \left(A^t A\right)^{-1} A^t\ b \tag{5}$$

La matriz $\left(A^t A\right)^{-1} A^t$, que puede no ser única, se conoce como inversa generalizada de A o inversa de Moore-Penrose o pseudoinversa.

Existe también otra manera de optimizar la solución en base al análisis estadístico, minimizando la suma de los cuadrados de los errores SSE.

En efecto, a partir de (2), se calcula la suma de los cuadrados de las componentes del vector residuo (*SSE*):

$$(b-Ax)^t(b-Ax) = \varepsilon^t\varepsilon = \sum \varepsilon_i^2 = SSE \tag{6}$$

Luego de distribuir y agrupar convenientemente, la (6) se puede expresar como:

$$x^t A^t A\ x - b^t A\ x - x^t A^t b + b^t b = SSE \tag{7}$$

Al desarrollar los productos matriciales en (7), se obtiene una expresión escalar que puede derivarse respecto de las componentes x_i del vector solución x. Teniendo en cuenta que la matriz $A^t A$ es siempre simétrica y que $\left(b^t A\,x\right)^t = x^t A^t b$, derivando la (7) respecto de cada componente x_i e igualando a cero, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(SSE\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 2A^t A\,x - 2A^t b = 0 \quad \Rightarrow \quad A^t Ax = A^t\left(b-\varepsilon\right) \qquad (8)$$

Dado que $A^t A$ resulta inversible, despejando de (8) se obtiene la expresión (5). Esta solución es la que optimiza el vector solución x debido a que da un valor estacionario de $\varepsilon^t\varepsilon$ que corresponde al mínimo de la norma del vector residuo ε .

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Al analizar los sistemas incompatibles se deberá trabajar con la proyección ortogonal $\pi_{b,A}$ del vector b sobre $col(A)$, de manera de minimizar la norma del vector ε .
Supongamos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad (9)$$

Al triangular dicho sistema, se obtiene un sistema incompatible de acuerdo con la matriz ampliada equivalente, dada por:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right)$$

El vector $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no se puede escribir como combinación lineal de los vectores $W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $W_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vectores linealmente independientes que generan $col(A)$.

Extendamos la base a R^3 de forma tal que el nuevo vector W_3 sea ortogonal a $col(A)$, con la finalidad de optimizar la solución.

Planteando la condición de ortogonalidad $W_3 . \left[\alpha W_1^t + \beta W_2^t\right] = 0$ y considerando que dicha condición se debe verificar $\forall\ \alpha, \beta$ no simultáneamente nulos, se obtiene $W_3^t = \delta\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

Elijamos, sin perder generalidad, $W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ para completar la base de R^3.

Escribiendo b como combinación lineal de los vectores $W_1, W_2\ y\ W_3$, la expresión (3) se reduce a

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{8}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{3}{11}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{2}{11}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 \\ 13/11 \\ 5/11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/11 \\ -2/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$$

Como resultado de la proyección ortogonal, y de acuerdo a la Fig.1, b se puede escribir como suma de los vectores proyección $\pi_{b,A} = \begin{pmatrix} 2/11 \\ 13/11 \\ 5/11 \end{pmatrix}$ y residuo $\varepsilon = \begin{pmatrix} -2/11 \\ -2/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$.

En consecuencia, el sistema incompatible $Ax = b$ se podrá expresar como

$$Ax = \pi_{b,A} + \varepsilon \tag{10}$$

Debido a que $\pi_{b,A}$ es combinación lineal de los vectores $W_1\ y\ W_2$, que generan $col(A)$, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 \\ 13/11 \\ 5/11 \end{pmatrix}$$

resulta compatible.

Al triangular la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | \ 2/11 \\ 2 & 1 & | 13/11 \\ 1 & 1 & | \ 5/11 \end{pmatrix}$ se obtiene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | \ 8/11 \\ 0 & 1 & | -3/11 \\ 0 & 0 & | \ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ 8/11 \\ x_2 = -3/11 \end{cases}$

El vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}$ es la solución del sistema $Ax = \pi_{b,A}$.

Dicha solución, por ser la que deriva de la proyección ortogonal de b sobre $col(A)$, determina la compatibilidad parcial óptima del sistema incompatible en cuestión. La solución más aproximada u óptima del sistema dado es pues $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}$, y el vector residuo resulta $\varepsilon = \begin{pmatrix} -2/11 \\ -2/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$.

Es posible llegar en forma más directa al mismo resultado empleando el método matricial referido a la inversa generalizada empleado en la (5), de acuerdo con:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de manera que resulta $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Al multiplicar a izquierda la expresión anterior por la matriz inversa, resulta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/11 & -5/11 \\ -5/11 & 6/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/11 & 7/11 & 1/11 \\ 7/11 & -4/11 & 1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}$,

donde $\begin{pmatrix} -4/11 & 7/11 & 1/11 \\ 7/11 & -4/11 & 1/11 \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t$ es la inversa generalizada de la matriz A.

Finalmente, el vector residuo se puede obtener de acuerdo a (2) mediante:

$$\varepsilon = b - Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 \\ 13/11 \\ 5/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/11 \\ -2/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$$

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En el área de Ciencias Económicas e Ingeniería, entre otras, se cuenta con datos experimentales y es altamente probable que al plasmar un problema o diseño en lenguaje algebraico y proceder a su resolución resulte un sistema incompatible. No debemos quedarnos en la enseñanza de que dicho sistema no admite solución –lo cual puede comprobarse gráficamente en dos o tres dimensiones o bien en forma analítica con la utilización de sistemas matriciales– sino en visualizar si existiere un camino de resolución que haga factible el problema.

En el presente trabajo empleamos la visualización geométrica como herramienta para introducir la noción de compatibilidad parcial y de inversa generalizada con la finalidad de buscar soluciones aproximadas en los sistemas de ecuaciones lineales incompatibles. Dichas soluciones presentan error. Este debe ser el menor posible, lo cual se consigue mediante la aplicación del método de cuadrados mínimos –o equivalentemente, mediante la proyección ortogonal– siendo el mejor ajuste aquel que se adecue al contenido que la solución exige.

Consideramos que este enfoque es adecuado para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en los primeros cursos universitarios de Algebra ya que la propuesta intenta contribuir a una mayor comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales y, en particular, al fortalecimiento del concepto ‘solución’. Creemos además, que constituye una motivación para el alumno el poder hallar, frente un problema real, la solución más cercana a la esperada u óptima.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina Catalá C., Fortuny J., Burgués C. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Ed. Síntesis, Madrid.

De Guzmán M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometría*. Ed. Nivola, Madrid.

Grossman, S. (1989). *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Herstein, I.N., Winter, D.J. (1989). *Algebra lineal y teoría de matrices.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Hillel J. (1997). Des niveaux de description et du problème de la representation en algèbre linéaire. In J,L. Dorier (ed.) *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, *Panorama de Recherche en Didactique sur ce Thème* (pp.231-247). Grenoble, France: La pensée sauvage

Mallet D.G. (2007). Multiple representations for systems of linear equations via the Computer Algebra System Maple. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. Vol.2 No.1, 17-31.

Rao C.R., Mitra S.K. (1971) *Generalized inverse of matrices and its applications*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney.

Searle S.R. (1982). *Matrix algebra useful for statistics*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester.