

# UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LÍMITE

*Silvia Aquere, Adriana Engler, Silvia Vrancken, Daniela Müller, Marcela Hecklein, María Inés Gregorini y Natalia Henzenn*

Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral

Prov. de Santa Fe (Argentina)

[tarisflia@arnet.com.ar](mailto:tarisflia@arnet.com.ar); [aengler@fca.unl.edu.ar](mailto:aengler@fca.unl.edu.ar); [svrancke@fca.unl.edu.ar](mailto:svrancke@fca.unl.edu.ar);  
[dmuller@fca.unl.edu.ar](mailto:dmuller@fca.unl.edu.ar); [mhecklei@fca.unl.edu.ar](mailto:mhecklei@fca.unl.edu.ar); [migrego@fca.unl.edu.ar](mailto:migrego@fca.unl.edu.ar);  
[nhenzenn@fca.unl.edu.ar](mailto:nhenzenn@fca.unl.edu.ar)

## RESUMEN

El trabajo en el aula y sus resultados, nos lleva a reflexionar sobre lo complejo que resulta, por una parte, enseñar y, por otra, comprender y apropiarse del concepto de límite a alumnos de carreras universitarias no matemáticas, en nuestro caso, Ciencias Agrarias. Queremos, que nuestros alumnos, lleguen a la construcción del concepto de límite. Para ello llevamos a cabo nuestra experiencia, teniendo en cuenta que si pretendemos enseñar, debemos crear las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte del alumno. Realizamos en primer lugar una reflexión acerca de las dificultades con las que se pueden encontrar los alumnos, asumiendo que si hay construcción, hay proceso y en este camino surge la posibilidad de enfrentarnos a errores. En este contexto nuestro interés se enfocó en efectuar una serie de actividades, trabajadas en forma grupal, para salvar esas dificultades de aprendizaje y procesos de construcción o reconstrucción del concepto de límite. Finalmente, a través del análisis de sus producciones y de encuestas realizadas a los estudiantes, nos permitió constatar algunas de las causas que explican por qué no tienen un rendimiento aceptable en el aprendizaje de los conceptos fundamentales del cálculo, las mismas las encontramos tanto en el terreno epistemológico como en el didáctico y en el cognitivo.

## INTRODUCCIÓN

El trabajo en el aula y sus resultados, nos lleva a reflexionar sobre lo complejo que resulta, por una parte, enseñar y, por otra, comprender y apropiarse del concepto de límite a alumnos de carreras universitarias no matemáticas, en nuestro caso, Ingeniería Agronómica.

Por lo general, la enseñanza del cálculo a nivel universitario se lleva a cabo con métodos tradicionales, donde lo que se exige del alumno es sólo el “dominio” algorítmico repetitivo y algebraico. En particular en el caso del límite, se desarrolla a partir de las habituales y rigurosas

definiciones del mismo, con guías de ejercicios similares, que van complejizando su dificultad, pero que responden al mismo esquema de pensamiento, tarea que termina siendo rutinaria.

Fijamos como objetivo abordar el tema límite no desde una óptica convencional sino tratando de construir su concepto desde la intuición para luego llegar a una formalización del mismo, a través de actividades constructivistas y participativas.

El aprendizaje de la matemática implica aprender y utilizar el “lenguaje matemático”. Es esencial para esta actividad que los alumnos puedan movilizarse entre varios registros en el curso de una misma acción, o bien elegir un registro en vez de otro. Existe pues la necesidad de cambiar de sistema de representación ya que como afirma Duval (1998) la formación de conceptos implica una coordinación de sistemas de representaciones, esta se logra articulando entre diferentes registros. Entendemos por representaciones, diferentes notaciones, ya sean gráficas, simbólicas, así como expresiones verbales. Estas representaciones se agrupan en registros. Por ejemplo, el registro gráfico o el registro numérico. Entonces un reto importante en el aprendizaje de la matemática no puede ser, solamente, la automatización de ciertas técnicas operatorias sino que debe ser también, la coordinación de los diferentes sistemas de representación.

En el concepto de límite, el registro numérico se ve mediante tablas de valores, la posibilidad de acercarse a un determinado valor utilizando aproximaciones mayores por un lado y menores por el otro. El registro gráfico mediante utilización de los ejes cartesianos. El registro simbólico cuando es posible definir el límite de una función utilizando la simbología adecuada. Y el registro verbal cuando es posible definir el concepto utilizando palabras de nuestro vocabulario.

Además, entendiendo la construcción de los conocimientos, como una actividad reflexiva individual, cargada de subjetividad, tenemos que prever que los errores son una posibilidad y una realidad en el trabajo con nuestros alumnos, por lo que es necesario hacer un estudio especial de ellos, no como obstáculo para la apropiación del conocimiento sino como parte de la construcción del mismo.

Los errores siempre han ayudado al avance de las distintas ciencias. Muchas veces una teoría se considera cierta hasta que alguien demuestra que no es válida. El desarrollo científico a lo largo de los años ha estado plagado de errores. Por lo que no debemos desechar los errores que cometen nuestros alumnos, porque en ellos puede haber “algo de cierto”, que ayude a que busquen nuevas herramientas para resolver una situación, o indagar otros conceptos o teorías que expliquen en qué están equivocados o cómo pueden solucionarlo. Esto nos dice que debemos tomarlos como fuentes de información, como parte componente de la adquisición de conocimiento, ya que pueden ser el motor que provoque un cambio en el aprendizaje del alumno, transformándose así, en un elemento constructivo e innovador dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Analicemos lo que significa “error”, esto nos ayudará a llevar a cabo un trabajo de diagnóstico, de detección, corrección y superación de los mismos.

Godino, Batanero y Font (2003) citados por Abrate et al, (2006, p14), expresan “hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar”. Además señalan que “si bien el error puede tener procedencias diferentes, generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos”.

Para Rico (1995) el error se produce cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática, esta respuesta es errónea, la solución proporcionada es un error en relación a la cuestión planteada.

Podemos aseverar que los errores de nuestros estudiantes no son casuales, ya que, en algunos casos están basados en experiencias, conocimientos previos y también en preconcepciones. En otros casos presentan patrones, o regularidades en sus equivocaciones, atribuibles a concepciones erróneas o simplemente distracciones. Muchas veces los alumnos no son siquiera capaces de brindar una respuesta.

La causa y orígenes de los errores son diversos, decidimos analizar aquellos basados en dificultades de tipo: epistemológicas, didácticas, cognitivas y actitudinales.

Las dificultades epistemológicas son las relacionadas esencialmente con el propio concepto. Los alumnos mantienen concepciones y creencias propias sobre la naturaleza de la ciencia y del conocimiento científico y, además, sobre sus propios procesos y productos del aprendizaje, lo que ocasiona limitaciones o impedimentos que afectan sus capacidades para construir el conocimiento real o empírico.

Con respecto a las dificultades didácticas, es decir las originadas por el sistema de enseñanza, podemos destacar dos aspectos de los que nos ocupamos en nuestra propuesta de trabajo. No realizamos un mero recuento de soluciones incorrectas, ni tampoco brindamos todos los medios necesarios para salvar el error. De ser así, según dice Pochulu et al. sobre lo escrito por Cury (1994), estaríamos apuntando sólo a la “eficiencia”, a solucionar el error, pero atentando contra la “comprensión”.

Con respecto a las dificultades cognitivas, muchas veces asociamos el error a falta de conocimiento, pero como expresa Brousseau (1983, c.p. Batanero et al., 1994, p.2), el mismo manifiesta que “es un conocimiento, no una falta de conocimiento”.

El alumno utiliza lo que conoce para dar respuestas a situaciones dadas en un cierto contexto, cuando lo utiliza fuera de ese contexto produce respuestas incorrectas.

Si analizamos cómo se manifiesta en los alumnos, podemos observar que al trabajar un concepto y explicarlo, elaboran construcciones personales con base a lo que adquirieron anteriormente y/o en su interacción con sus compañeros y forman así construcciones que no son correctas desde el punto de vista científico, pero que debemos revisar y reacomodar para volver a usar en una nueva construcción.

La actitud del alumno, predisposición o forma en la que enfrenta la tarea, es otro factor importante a la hora de analizar las dificultades en el aprendizaje. Al encontrarse con temas totalmente desconocidos para él, puede generar que sólo tengan actitud de escuchas, y no se predispongan como protagonistas de la clase.

Todo lo manifestado anteriormente tiene su incidencia en el aprendizaje y lo tuvimos en cuenta en la elaboración de nuestra propuesta para la enseñanza del límite.

## **DESARROLLO DE LA PROPUESTA**

Nuestra propuesta de trabajo constó, en primer lugar, de dos guías de trabajos previos al desarrollo de los contenidos teóricos. Los alumnos las resolvieron en forma grupal sin la intervención del docente. Se corrigieron, marcando donde había error. Se hizo la devolución de las mismas para que ellos logran argumentarlos y corregirlos, de esta forma se generó el debate. Al finalizar cada uno de los trabajos prácticos se desarrollaron las clases teóricas y prácticas sobre los temas trabajados en las guías. Luego se dio un cierre con el trabajo final, realizado también en forma grupal. Por último realizamos entrevistas a los alumnos.

Los alumnos eran cursantes de Matemática II de la carrera durante en el año 2006. Los trabajos fueron en total, ciento sesenta, los cuales se dividieron en setenta y seis grupos.

Los objetivos principales de la propuesta fueron:

- El trabajo cooperativo de los alumnos, en pequeños grupos.
- Aprender a confrontar ideas que en muchos casos son muy disímiles entre compañeros, y consensuar cual será la postura tomada, para la resolución a entregar.
- Poder defender su postura.
- Analizar enunciados, observar, comparar, discriminar, interpretar datos o información ofrecida por representaciones algebraicas, numéricas, tabulares y gráficas. En la resolución de las guías estaban obligados, por el tipo de actividades planteadas, a realizar procesos de conversión entre los distintos tipos de representación antes mencionados.

- Llegar a escribir y hacer transferencia en distintos registros de representaciones de límite.
- Lograr justificar, corregir y consensuar entre los integrantes del grupo, sobre los errores cometidos, a través de la autorreflexión de su trabajo, para luego confrontar con la totalidad de clase.

Para las actividades tuvimos en cuenta los diferentes sistemas de representación, utilizados en matemática: las figuras, las gráficas, la escritura simbólica y el lenguaje natural.

Comentamos los aspectos que abarcan cada guía y realizamos un análisis del trabajo final.

### **Primer Guía de Trabajo: Límite Finito**

En este trabajo se incluyeron siete ejercicios que, en forma gradual, incorporaban estrategias para lograr familiarizar a los alumnos con nuevas nociones que serán necesarias para la adquisición del concepto de límite. En ellos se trabajan distintas representaciones (tabla, gráfica, fórmula). Aquí se introduce la idea intuitiva de aproximación del límite por derecha y por izquierda. Luego las palabras “tiende a...”. En ejercicios posteriores se acerca al alumno a una mirada más formal hacia la definición de límite, también aparecen a través de distintas gráficas e intervalos la idea del Épsilon y Delta.

Se propone una actividad cuya intención es ver lo que sucede cuando los límites laterales son distintos. Para luego presentar una definición de límite efectuada con los datos que los alumnos manejan hasta éste momento, a decir:

- aproximarse  $x$  a  $a$  por izquierda y por derecha,
- podemos hacer que  $f(x)$  esté tan próximo al límite  $L$  como queramos eligiendo  $x$  lo suficientemente cerca de  $a$ , pero  $x \neq a$ .
- la notación de límites por izquierda y por derecha,
- las aclaraciones de que para que haya límite de una función deben existir estos límites laterales y ser iguales y que la función puede tener límite en un punto y no estar definida en ese punto.

Por último deben hacer una interpretación de la definición de límite realizando gráficas que deben cumplir una serie de consignas pautadas.

### **Segunda Guía de Trabajo: Límite Infinito y en el Infinito**

La guía consta de tres actividades, subdivididas en ítems donde debían interpretar, que a medida que la variable independiente crece, la función crece indefinidamente. En ellas surge la idea de crecimiento indefinido de la función hacia lo positivo y lo negativo dependiendo si la función se acerca a un punto por izquierda o por derecha. Y de crecimiento indefinido de la función hacia lo positivo cuando se acerca al punto tanto por derecha o por izquierda. La tercera actividad es una aplicación.

El Trabajo Final: Límite de Funciones.

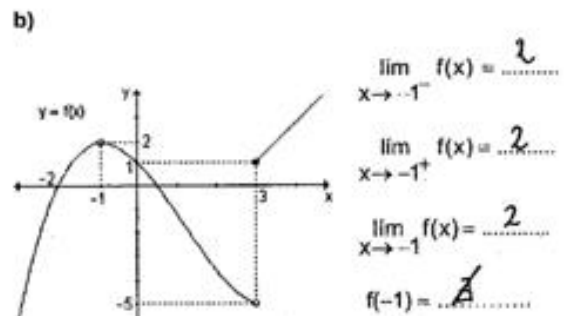
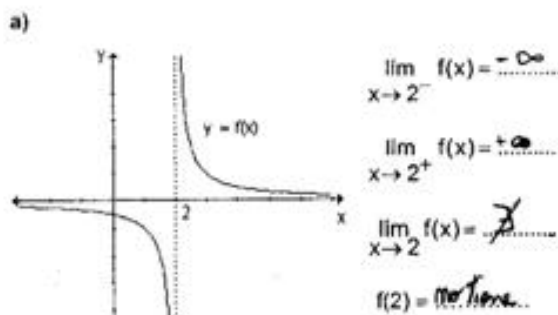
El trabajo constó de nueve actividades, cuya resolución exigía el uso de las diferentes representaciones (gráficas, simbólicas, analíticas, coloquial) y realizar procesos de conversión entre ellas.

- En las primeras tres actividades, se trató de propiciar el análisis de gráficos y simbología en forma conjunta, ya que a través de ellos, debían completar los límites que se les pedían, los mismos eran finitos en algunos casos, infinitos y en el infinito, en otros. Se pretendía con esto analizar si los alumnos comprenden el concepto de límite a partir de una función definida gráficamente.

Veamos como ejemplo algunas producciones de los alumnos.

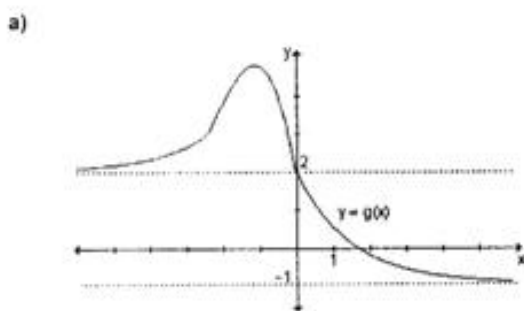
**Actividad 1**

Dada las diferentes funciones definidas gráficamente, halle:



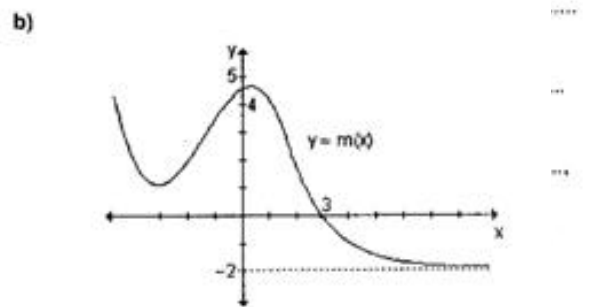
**Actividad 2**

Determine los siguientes límites a partir de las gráficas:



$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$

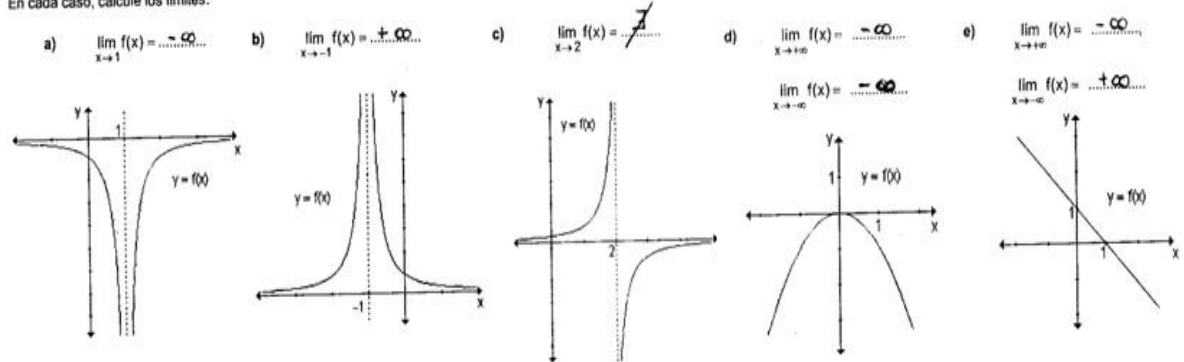
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$



$\lim_{x \rightarrow 3^-} m(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} m(x) = -\infty$

**Actividad 3**  
En cada caso, calcule los límites.



Un alto porcentaje de alumnos ha resuelto satisfactoriamente estas actividades, y un 21 % cometió errores, la mayoría de ellos se han presentado cuando no hay existencia de límites.

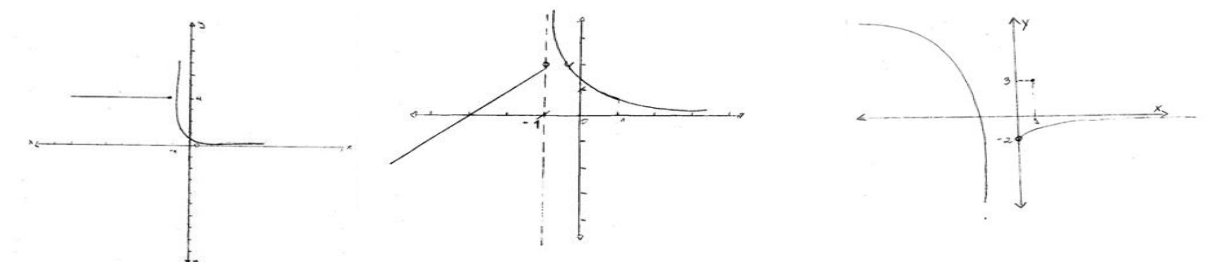
- A partir de la cuarta hasta la séptima actividad, debían graficar una función a partir de una serie de condiciones, a cumplirse en forma simultánea. Se pretendía evaluar la capacidad de ilustrar su idea de límite.

Se muestran algunas actividades planteadas y los errores cometidos por los alumnos.

**Actividad 4:**

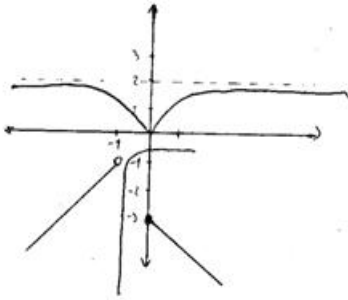
Represente gráficamente una función cuyo dominio sean todos los números reales, que verifique las siguientes condiciones:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ,  $f(1) = 3$

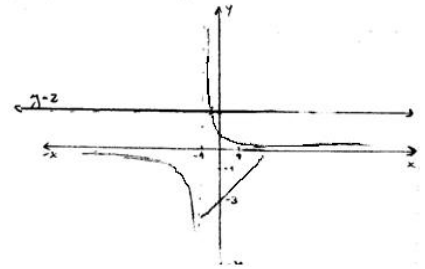


**Actividad 5:** Grafique una función, lo más sencilla posible, que cumpla simultáneamente las siguientes características:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -3, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$$

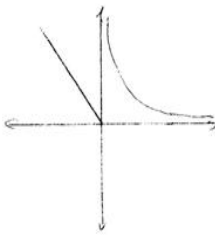


Indique el dominio:  $\mathbb{R}$

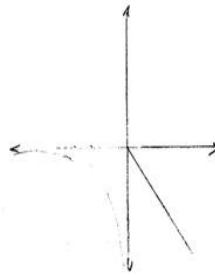


**Actividad 6:** Representa gráficamente dos funciones distintas par las cuales el límite cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  sea distinto del límite cuando  $x$  tiende a  $-\infty$

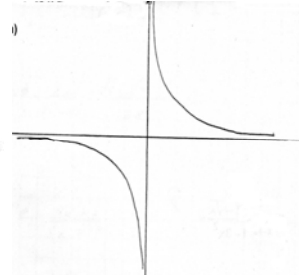
a)



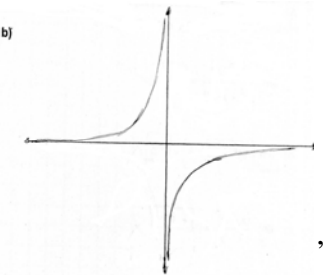
b)



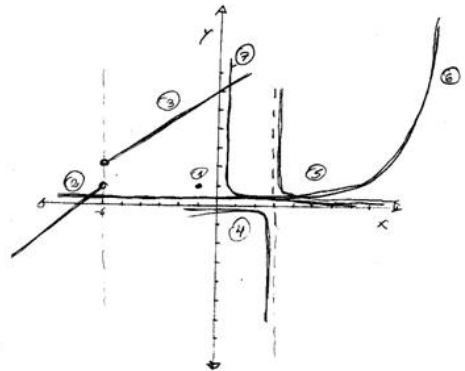
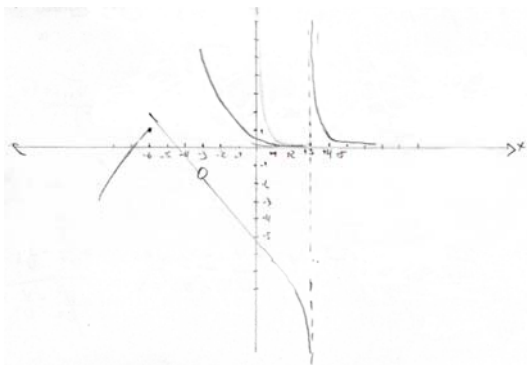
c)



d)



$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = 2, \quad 3 \notin D_f, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$





En las actividades 4, 6 y 7 la mitad de los alumnos graficó correctamente, y en la actividad 5 un 64% cumplió con todos los requisitos pedidos. Sólo cuatro grupos no realizan los ejercicios. En los demás trabajos se evidencia que confunden las variables independiente y dependiente, no marcan el valor de la función en el punto dado, colocan mal el dominio de definición. Cuando  $x$  tiende a un valor toman como asíntota el eje  $x$  o el eje  $y$ .

También grafican mal la función sobre la asíntota, lo que hace que un valor tenga infinitas imágenes, dejando de ser función. En otros casos realizan una gráfica para cada condición dada en el enunciado.

Cabe destacar que las mayores dificultades fueron en la “traducción” de los distintos tipos de representaciones. Les ha costado más graficar que el cálculo. Comparando las actividades 2 y 6 que consistían en límites cuando la variable tiende a infinito, un 47 % del total de alumnos resuelve bien la segunda actividad y mal la sexta. Lo mismo se presenta si comparamos las actividades uno y siete, teniendo un porcentaje de respuesta similar.

- En la actividad 8 la resolución consta de la evaluación de unos límites establecidos y a partir de ellos calcular los propuestos. En estos ejercicios las mayores dificultades se presentan en la factorización de las expresiones, o para salvar las indeterminaciones, cometiendo muchos errores algebraicos y de cálculos. En la última actividad, muchos realizan solamente las sustituciones, y no intentan otra cosa.

En cuanto a las entrevistas, si tenemos en cuenta los objetivos que perseguimos con este trabajo pudimos visualizar:

- Para los alumnos que *no tenían conocimientos previos de límite*, ante la pregunta ¿Qué tipo de *dificultades tuviste para resolver las guías?* la gran mayoría coincidió en sus *respuestas* manifestando que al enfrentarse a las guías todo parecía complicado pero luego al intentar resolver las consignas, las respuestas iban fluyendo.
- Para los alumnos que *tenían conocimientos previos de límite* ya sea por ser recursantes, ya sea por haber visto Límite en el Polimodal, expresaron en su gran mayoría, que algunas cosas se saben y otras no, y que le resultaron simples de realizar.

## REFLEXIONES

De lo expuesto, nos resulta inmediato extraer algunas reflexiones en el plano educativo. Bajo este enfoque, la construcción del conocimiento no es una empresa nada fácil ya que requiere de condiciones de trabajo muy bien determinadas, herramientas que favorezcan los procesos y un seguimiento continuo.

Primero buscamos impulsar la participación activa de los estudiantes a través de pequeños grupos, para la resolución de las actividades diseñadas. En segundo término, logramos que los miembros del grupo participaran generando debate, para revisar y analizar errores desde los enfoques de los distintos equipos de trabajo. Pudimos aquí apreciar la capacidad real del alumno cuando tiene que enfrentarse a dificultades y a nosotros nos permitió rever nuestras estrategias.

Y en tercer lugar, se pretendió que el estudiante, una vez terminados estos trabajos y dictadas las correspondientes clases teóricas, dedicara tiempo fuera del horario de clase para llevar a cabo las actividades del libro de estudio, previa reflexión de las tareas desarrolladas en el aula.

Por último, resolvieron de manera grupal el trabajo final que fue integrador de las actividades desarrolladas.

En cuanto a nuestro objetivo de trabajo cooperativo creemos que fue una estrategia acertada, ya que nos permitió como educadores darnos cuenta de la importancia de la interacción que se establece entre el alumno con las personas que lo rodean, por lo cual no se puede dejar de lado el análisis de la influencia educativa que ejercemos como docentes, sino que tenemos que tomar en cuenta la que ejercen también los compañeros de clases o estudios. Esta forma ayudó a que los alumnos construyan su propio aprendizaje, estimulando la tarea de confrontar, discutir y defender ideas, además de lograr que cuando den una respuesta a los docentes o al grupo en general, comiencen a familiarizarse en el uso del vocabulario específico del área.

En el desarrollo de la propuesta encontramos por un lado alumnos que tenían buen desempeño en los prácticos y que supieron confrontar y defender sus posturas. Por otro, los que lograron resolver las actividades pero en las que contenían errores se presentaban contradicciones con las que habían resuelto bien. Se observaron grupos que ante la inseguridad y el miedo a equivocarse no resolvían las situaciones y los que no han querido trabajar, que fueron muy pocos.

En las entrevistas, un alto porcentaje manifestó que antes de resolver las actividades conjugaban sentimientos de ansiedad por lo desconocido del tema, por las actitudes que esperan de los profesores, por el estilo de enseñanza, y miedo a no saber cómo resolverlos, al fracaso, a los errores, pero que al final del tema la estrategia de trabajo había sido positiva.

Como el resultado de esta propuesta didáctica fue favorable, continuamos trabajando con esta metodología durante el año 2007.

Quedan en nuestros deseos que los alumnos reconozcan que experimentar, observar, buscar pautas y regularidades en los razonamientos, realizar procesos inductivos, la verificación o refutación de sus propios argumentos y conjeturas además del trabajo cooperativo, resulta una poderosa y esencial parte de las matemáticas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. 1ª ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- Batanero, C; Godino, J. D.; Green, D. R.; P. Holmes, P. y Vallecillos, A. *Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. Internation Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4) 527-547. En <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/erroresestadis.doc> Consultado 27-06-07.
- Blázquez, S. (sf). *Los sistemas de representación en la enseñanza del Límite*. En <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33530204.pdf> . Consultado 27-06-07.
- Blázquez, S.; Ortega, T. (2000). *El concepto del límite en la educación secundaria*. En Cantoral, R. (Ed.) *El futuro del cálculo infinitesimal*. ICME 8. México.
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F.Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* pp.173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A de C.V.
- Farfán Marquez, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A de C.V.
- García Cruz, J. A. (sf). *La didáctica de las Matemáticas: una visión general*. En: <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm>. Consultado 26-09-07
- Maz Machado, A.; Gómez Alfonso, B.; Torralbo Rodríguez, M. (compiladores y editores). (2005). *Investigación en Educación Matemática, Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. Editan Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM, España.
- Paredes Alfaro, S. (sf). *Implementación de actividades de aprendizaje cooperativo a la asignatura de Cálculo de Ingeniería*. En: [http://www.eici.ucm.cl/descargas/sochedi/Paredes%20 Sara%20 2 .pdf](http://www.eici.ucm.cl/descargas/sochedi/Paredes%20Sara%202.pdf) . Consultado 20-11-07
- Pochulu, M. D. *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad*. Revista Iberoamericana de Educación. En <http://www.rieoei.org/deloslectores/> Consultado 07-08-07
- Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de la Matemática*. Kilpatrick, J.; Gómez, P.; Rico, L. *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación. Historia*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.