TEORÍA DE GRAFOS
PROPUESTA PARA ESCUELAS SECUNDARIAS

Fabián Nouche
Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González
Ciudad de Buenos Aires (Argentina)
fnouche@yahoo.com.ar

RESUMEN

En este trabajo, se presenta una propuesta para implementarse en escuelas secundarias y, con ciertos ajustes, también en los últimos años de la escuela primaria. Trata de la aplicación de varios temas de la teoría de grafos a un problema de la realidad, que permite el estudio de sus principales conceptos y de algunos algoritmos, para su resolución. Este problema se compone de tres partes, con el fin de poder adaptarlo a distintos cursos. En la parte A, se introducen los conceptos principales de la propuesta y un algoritmo aplicable en este contexto, que permitirá arribar a las respuestas buscadas, al mismo tiempo que pondrá en evidencia las ventajas de su uso, no sólo para este problema, sino para otros similares, pero de mayor complejidad. En la parte B, se modifica el problema original y se incorporan algunos conceptos más y dos algoritmos que resolverán la situación. Por último, en la parte C, se realiza un análisis de los temas presentados en las partes precedentes, a modo de integración.

OBJETIVOS DE LA PROPUESTA

Los objetivos de esta propuesta son que los alumnos conozcan un panorama breve, pero a la vez abarcador, sobre varios temas de la teoría de grafos; que comprueben cómo una herramienta matemática modeliza problemas de la realidad con mayor evidencia para ellos en la práctica; que puedan notar cómo los grafos establecen un puente que vincula lo abstracto (el grafo teórico) y lo concreto (ejemplificación a través de situaciones problemáticas) a lo largo todo el curso de este tema, dado que una gran mayoría de los estudiantes no encuentran en los contenidos de Matemática su aplicación a la realidad; que aprendan el uso de algunos algoritmos y experimenten las ventajas que éstos brindan, para una eficiente resolución de problemas y que también se diviertan aprendiendo, motivados por el espíritu competitivo que pueden despertar las actividades propuestas en el problema de este trabajo.

Resolviendo Problemas con Grafos

La siguiente actividad está dirigida a alumnos de cualquier año de la escuela secundaria y también de los últimos años de la escuela primaria (en este caso, se sugiere presentar sólo la parte A del problema y los conceptos mínimos intervinientes en ella). Esta propuesta puede llevarse a cabo en cualquier momento del año, dado que sus contenidos resultan in-dependientes de los incluidos en los planes de estudio, ya que no se requieren conocimientos previos específicos; pero podría desarrollarse durante el tercer trimestre, a fin de estimular a los alumnos con un tema diferente, cuyas actividades pueden ser presentadas como juegos.

El problema que se propone a continuación será el que permita aplicar e integrar todos los conceptos y algoritmos que la propuesta tiene como contenidos de la teoría de grafos y su enunciado dice lo siguiente:

Un comerciante español, que reside en Sant Celoni, compró un auto que funciona a energía solar, para ahorrar combustible en sus frecuentes viajes laborales a dos ciudades: I'Escala y Ripoll. Estas tres ciudades están conectadas por rutas como muestra el siguiente mapa:

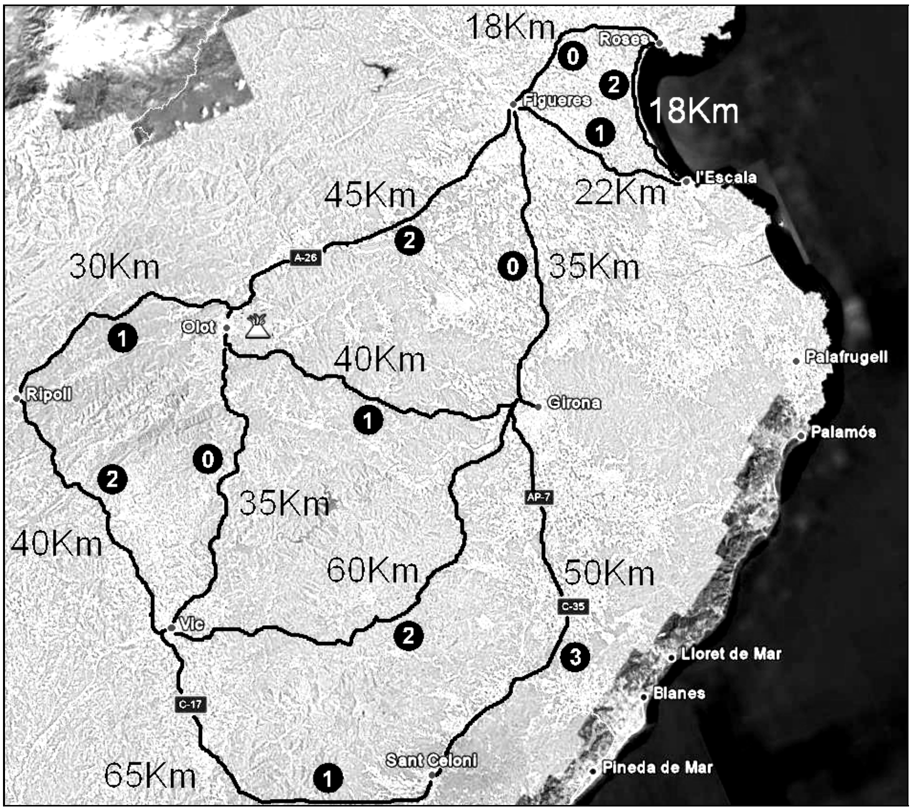


Figura 1

Los kilómetros que muestra el mapa son distancias aproximadas entre ciudades y los círculos numerados indican la cantidad de peajes que hay en cada tramo de ruta que las une.

Parte A:

Como al comerciante no le preocupan las distancias, porque no gasta combustible y tampoco le preocupa demasiado el tiempo, pues siempre emprende sus viajes con uno o dos días de anticipación, por lo tanto, lo único que le interesa es gastar la menor cantidad de dinero posible en peajes. Si sale de su ciudad Sant Celoni, ¿qué camino le resultará más económico, para llegar a la ciudad de I'Escala? ¿Cuántos peajes tendrá que pagar, si sigue ese camino? Y, una vez que haya llegado a esa ciudad, ¿Cuál será el camino que más le convendrá, si tiene que viajar a Ripoll?

Parte B:

La zona volcánica de Olot entró en actividad e inesperadamente se produjo una erupción de lava que interrumpió el camino que une esta ciudad con Figueres y la nube tóxica de cenizas comenzó a expandirse. Varias ciudades cercanas se vieron afectadas, por lo que debió idearse un plan de evacuación inmediato, que permita llevar a los evacuados hacia el Este. Si tú tuvieses que idearlo, ¿Cómo podrías conectar las ocho ciudades, de modo que pueda accederse a todas ellas en el menor tiempo posible, es decir, recorriendo la menor distancia?

Parte C:

I. Analiza los grafos de la parte A y B del problema.
   - ❖ Encuentra, istmos y puentes, si existen.
   - ❖ ¿Puedes encontrar un camino de Euler? Y si es así, ¿desde qué ciudad es necesario comenzarlo?
   - ❖ ¿Puedes encontrar un camino de Hamilton?

II. Considerando ahora sólo el grafo de la parte B, ¿puedes formar un árbol cobertor con tramos de ruta agregados, sin utilizar los tramos que ya existen? Ten presente que puedes utilizar el camino obstruido por la lava, ya que no existe en la parte B.

<u>Nota</u>: Las partes A y B se realizarán en las clases y la parte C quedará como tarea, para obtener conclusiones mediante una puesta en común, en la última clase de este tema.

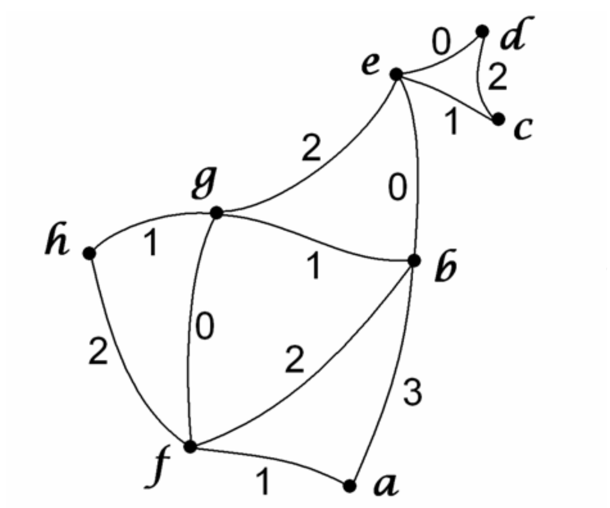
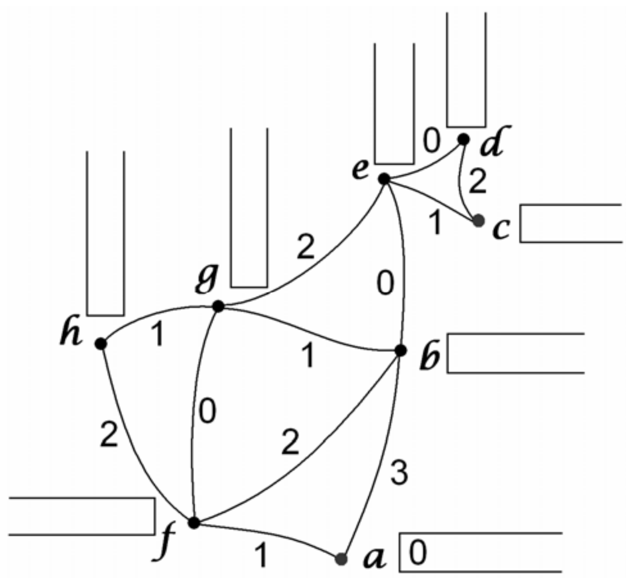
CONCEPTOS DE TEORÍA DE GRAFOS UTILIZADOS EN ESTA PROPUESTA:

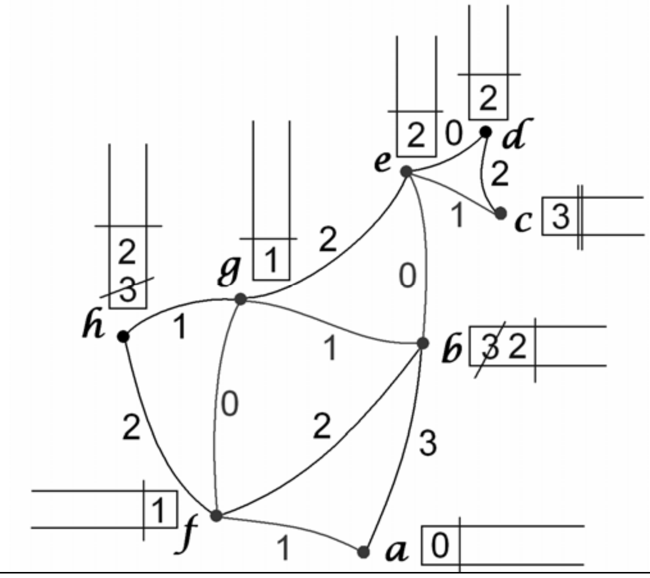
- Grafo
- Cadena o camino y ciclo
- Caminos y ciclos de Euler y de Hamilton
- Conexión de un grafo
- Istmos y Puentes
- Grafo complementario
- Grafo ponderado
- Caminos mínimos: Algoritmo de Dijkstra
- Árbol
- Árbol cobertor
- Árbol cobertor minimal: Algoritmos de Kruskal y de Prim

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Se plantea el problema utilizando un grafo que describa las ciudades y los tramos de rutas que las unen, para cada una de las dos situaciones.

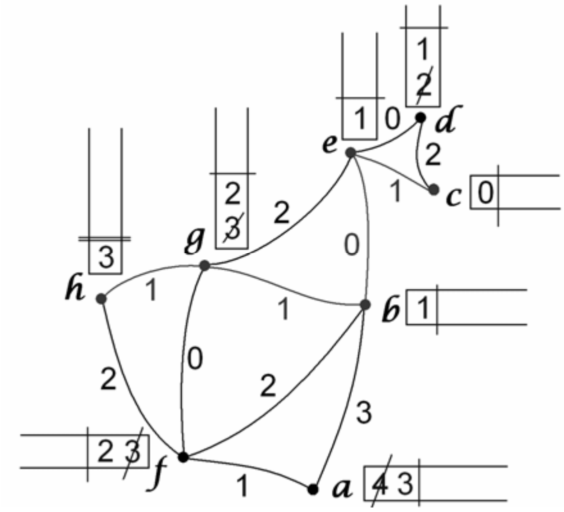
Parte A:

Paso 1)	Paso 2)
	

Los pesos de las aristas representan el número de peajes en cada tramo de ruta. En el siguiente paso se comienza a aplicar el algoritmo de Dijkstra.	Se colocan pilas en los vértices. La del vértice de partida (***a***) se inicia en 0 (cero) y las demás quedan vacías (es una leve modificación del algoritmo, a fin de no introducir infinitos). Se debe llegar a la vértice ***c***.
Paso 3) Al evaluar mejoras en los vértices adyacentes al clausurado, habrá tres situaciones: a) Si la pila del vértice adyacente esta vacía, se la inicia con el valor que se obtiene sumando el peso de la arista que incide en él y el último valor de la pila del vértice recientemente clausurado. b) Si el último valor de la pila del vértice clausurado sumado al peso de la arista que incide en el vértice adyacente es inferior al último valor de la pila de este vértice, este nuevo resultado ocupará el tope de esta última pila. c) Si no se dan ninguno de los dos casos anteriores, no se efectúan modificaciones.	

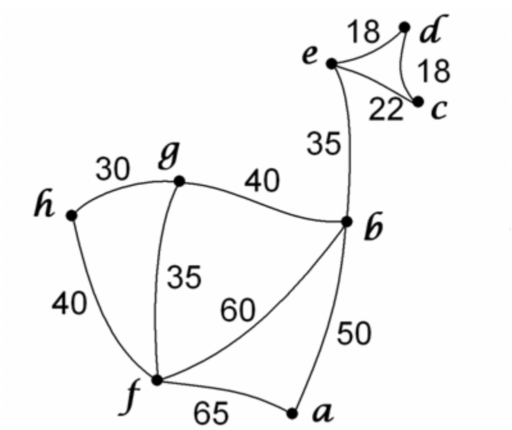
Así, resulta que la distancia del vértice ***a*** al vértice ***c*** es 3, que corresponde a la cantidad mínima de peajes por los que deberá pasar el comerciante y el camino que le permitirá lograr ese mínimo de peajes es el que recorre los vértices en el siguiente orden: ***afgbec***.

En el siguiente viaje, de acuerdo con este grafo, deberá partir de ***c*** y llegar a ***h***. El siguiente gráfico muestra el algoritmo terminado con el camino mínimo buscado:

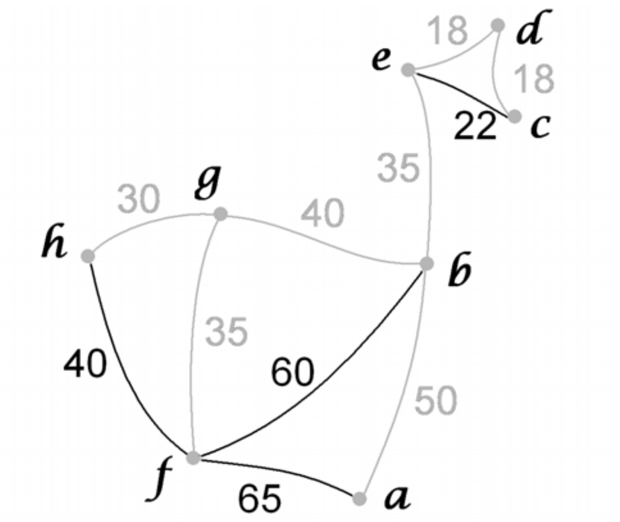


En consecuencia, el camino con menos peajes que le convendrá tomar para este viaje será el conformado por los vértices ***cebgh***, en ese orden. La cantidad mínima de peajes que tendrá que pagar es 3 y coincide con la del viaje anterior.

Parte B
Para esta parte del problema, se considerará el siguiente grafo:



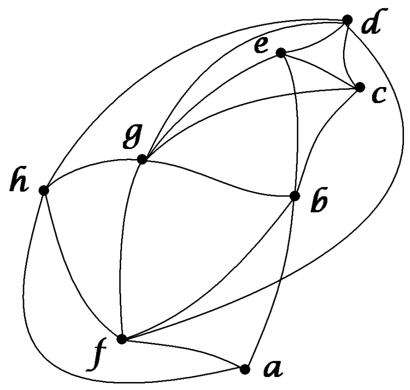
Lo que pide el problema es hallar un árbol cobertor minimal. Luego, mediante el algoritmo de Kruskal, el cual nos permitirá hallarlo, partimos de ***h*** y elegimos la arista adyacente de menor peso que no cierre ciclos, en este caso, la de peso 30. Ella incide en ***g***, desde conde continuaremos el algoritmo hasta obtener un árbol cobertor minimal como muestra la figura a la derecha:



Parte C:

I. Analizando los grafos de la parte A y B del problema:
   - El grafo de la parte A presenta un ***istmo*** en el vértice ***e*** (ciudad de Figueres en el mapa) y el grafo de la parte B presenta un ***puente*** en la arista cuyos extremos son los vértices ***b*** y ***e*** (el tramo de ruta que une a las ciudades de Girona y Figueres).
   - En el grafo de la parte A es posible encontrar un ciclo de Euler partiendo de cualquiera de las 8 ciudades, pues los grados de todos los vértices del grafo asociado tienen grado par. En el grafo de la parte B es posible encontrar un ciclo de Euler, siempre que se parta de los vértices de grado impar, es decir, de ***e*** o de ***g*** (Figueres u Olot).
   - Es posible encontrar un camino de Hamilton en ambos grafos. El siguiente resulta uno común a ambos grafos: ***cdebafgh***.

II. Un posible árbol cobertor, producto de un subgrafo del grafo complementario al planteado en la Parte B, lo muestra el siguiente dibujo:



PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA EN EL AULA:

Esta propuesta va dirigida, como ya se aclaró previamente, a alumnos de la escuela secundaria, preferentemente de 3º a 5º año, no por la complejidad del problema, sino por la cantidad de conceptos que deberán incorporar y administrar en un tiempo no mayor a dos semanas (entre teoría y práctica).

Se introducirá la teoría con el clásico problema de los puentes de Königsberg y el del sobre abierto de un lado y de ambos. Luego, se presentarán, de un modo básico, los conceptos de Grafo, cadena o camino y ciclos, caminos y ciclos de Euler, y de Hamilton. Posteriormente, se introducirá el concepto de grafo conexo; más tarde, la presentación de Istmos y Puentes; y, por último, grafos complementarios.

Cabe aclarar que todos los conceptos serán presentados con ejemplificación por parte del docente y grafos propuestos también por los alumnos.

En la siguiente clase, los alumnos deberán, en primera instancia, tratar de resolver la parte A del problema, sin conocer los algoritmos. Una vez que lo resuelvan intuitivamente (es de fácil resolución), se les presentará otro mapa, como muestra la figura 2, que no deberán utilizar en esta actividad, pero sí se les mostrará, para que se ponga de manifiesto la necesidad de un algoritmo que optimice el tiempo de resolución de este tipo de problemas, ya que si en el nuestro se hubiesen considerado más ciudades, como en el caso del mapa de la figura 2, su resolución habría demandado mucho más tiempo, de no utilizarse un algoritmo.

Luego, se estudiarán los grafos ponderados y el algoritmo de Dijkstra para hallar caminos mínimos en ellos. La clase continuará con la resolución de la parte A del problema, mediante la utilización del algoritmo visto.

En la tercera clase, se presentará el último tema: Árboles. Se introducirán los conceptos de árbol cobertor y árbol cobertor minimal. Para este último, se explicarán los algoritmos de Kruskal y de Prim. La clase continuará con la resolución de la parte B y quedará la parte C, para que la realicen de tarea.

En la última clase, se llevará a cabo una puesta en común, en la que se expresarán conclusiones y, finalmente, se hará una revisión oral de los conceptos estudiados hasta aquí.

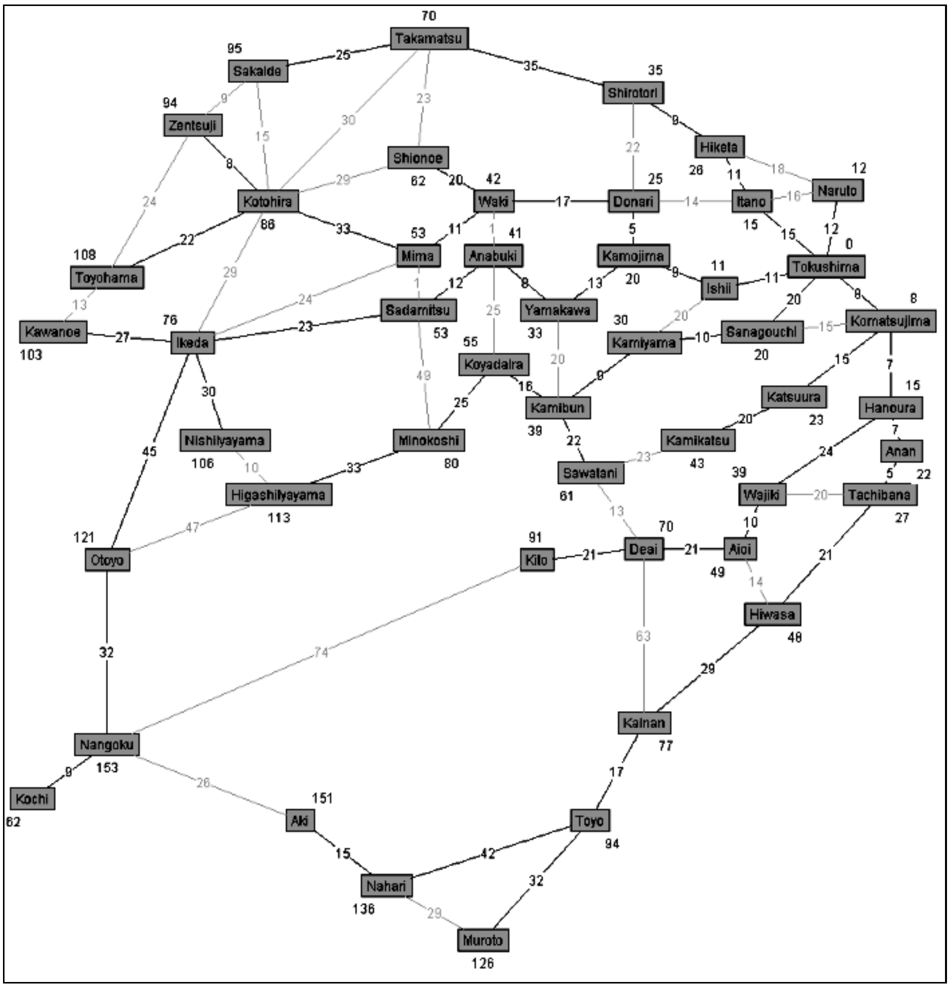


Figura 2

BENEFICIOS Y DIFICULTADES EN LA PRESENTACIÓN DE ESTA PROPUESTA:

Como beneficios, podemos destacar el desarrollo de habilidades que se promueve en cuanto al uso de algoritmos (interpretación gráfica y análisis de problemas a través de dibujos) que estimulan al alumno por el aporte significativo de sus resultados y no por el algoritmo en sí mismo.

Como dificultades, podríamos mencionar el tiempo establecido para su desarrollo. Es probable que la cantidad de contenidos demande algunas clases extra. Por ello, no se sugiere la implementación en la escuela primaria, a no ser que se supriman partes del problema.

CONCLUSIONES

Los contenidos seleccionados en esta propuesta sobre Teoría de Grafos resultan sumamente aplicables a la escuela secundaria e incluso a los últimos años de la escuela primaria, ya que no se requiere de conocimientos matemáticos previos y permite el desarrollo de estrategias que apuntan a favorecer un buen desempeño en la resolución de problemas. También podría introducirse, en la escuela media, la idea de matriz, sin necesidad de presentar sus operaciones, sino entendiéndolas como ordenamientos de datos, a través de las diferentes descripciones matriciales de un grafo, ya que el uso de matrices se hace cada vez más frecuente en lo cotidiano (desde el manejo de una planilla de cálculo hasta un fixture de un campeonato de deportes). También se dan a conocer algoritmos, más allá de los clásicos empleados en las operaciones con números y que cada vez son menos utilizados por los alumnos, por el avance de las tecnologías. Hoy ya no dividen un número mediante el algoritmo de la división, emplean la calculadora. ¿Para qué aprender las tablas de multiplicar?, las olvidadas tablas que sólo están presentes para los estudiantes, al dorso de algunas reglas de plástico. "*La máquina resuelve cálculos por nosotros, entonces ya no sirven*", contestan… Es por eso que conocer nuevos algoritmos que una calculadora no puede ejecutar, para resolver problemas, que los ayude a pensar y a reflexionar, produce beneficios que se reflejan tanto en un mayor interés de su parte por la matemática, por la aplicación a la realidad que necesitan ver, como en su desarrollo intelectual en estas edades de mayor potencial de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Toranzos, F. (1976). *Introducción a la Teoría de Grafos*. Washington D.C. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

Braicovich, T. (2005). *Grafos y Algoritmos en EGB3* (V Carem [Conferencia Argentina de Educación Matemática]). Buenos Aires: Prensa Académica.

Wenciker, B. (2007). *A Conducir con Dijkstra*. Consultada el 30 de julio de 2008, de http://education.ti.com/educationportal/activityexchange/download_file.jsp?cid=US&fileurl=Math%2FAlgebraII%2F8117%2FAct3_Dijkstra_MoneyforNothing_spanish.pdf