EL LÍMITE INFINITO: UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Adriana Engler, María Inés Gregorini, Silvia Vrancken, Daniela Müller, Marcela Hecklein y Natalia Henzenn
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza. Prov. de Santa Fe (Argentina)
aengler@fca.unl.edu.ar; migrego@fca.unl.edu.ar; svrancke@fca.unl.edu.ar; dmuller@fca.unl.edu.ar; mhecklei@fca.unl.edu.ar; nhenzenn@fca.unl.edu.ar

RESUMEN
La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo es un proceso complejo. Las creencias de cómo se aprende el cálculo influyen sobre todos los aspectos de la enseñanza, gobiernan lo que se incluye en el currículum y cuándo deben enseñarse los contenidos, determinan la importancia que un educador da al empleo de técnicas o en aprovechar la curiosidad, el interés y la motivación del alumno e influyen en la forma en la que los docentes desarrollan estrategias, conceptos, evalúan logros y corrigen errores y dificultades. A lo largo de nuestra experiencia docente y de investigación pudimos corroborar que son numerosas las variables que inciden en el rendimiento de nuestros alumnos: naturaleza de la matemática, tipos de aprendizajes matemáticos, el ambiente escolar, el profesor, el alumno, las variables cognitivas del alumno, las variables del currículum escolar, la metodología de trabajo y finalmente la evaluación. El problema de la enseñanza del cálculo en los últimos años es abordado desde diferentes perspectivas buscando estrategias para su mejor comprensión.
Presentamos este trabajo en el marco del Proyecto de Investigación “Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas” en relación a las dificultades de aprendizaje asociadas al concepto de limite infinito. El mismo tiene por objetivo la presentación y el análisis de una situación de aula diseñada especialmente, adaptada a las nuevas tendencias y teniendo en cuenta las dificultades observadas en análisis preliminares realizados en el marco del proyecto.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo es un proceso complejo. Las creencias de cómo se aprende el cálculo influyen sobre todos los aspectos de la enseñanza, gobiernan lo que se incluye en el currículum y cuándo deben enseñarse los contenidos, determinan la importancia que un educador da al empleo de técnicas o en aprovechar la curiosidad, el interés y la motivación del alumno e influyen en la forma en la que los docentes desarrollan estrategias, conceptos, evalúan logros y corrigen errores y dificultades. A lo largo de nuestra experiencia docente y de investigación pudimos corroborar que son numerosas las variables que inciden en el rendimiento de nuestros alumnos: naturaleza de la matemática (disciplina con un simbolismo especial como lenguaje de abstracciones), tipos de aprendizajes matemáticos (axiomas, conceptos, definiciones, algoritmos, principios, teoremas, resolución de problemas), el ambiente escolar, el profesor (sus conocimientos, experiencia, afectividad, creatividad), el alumno (sus actitudes, motivación, valoración de sí mismo, responsabilidad, creatividad, nivel de ansiedad, dedicación), las variables cognitivas del alumno (capacidad de atención, de retención, nivel de desarrollo del pensamiento, transferencia), las variables del currículum escolar (contenidos y plan de estudio), la metodología de trabajo y finalmente la evaluación. El problema de la enseñanza del cálculo en los últimos años es abordado desde diferentes perspectivas buscando estrategias para una mejor comprensión.

Hace casi veinte años Brousseau, Davis y Werner (1986) expresaban: “los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperademente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera.”

La ampliación del campo de los problemas investigados en Didáctica de la Matemática centrado hasta hace algunos años en los conceptos matemáticos básicos a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático avanzado ha representado un avance importante en el estudio de los errores, dificultades y obstáculos de los alumnos y sobre todo el conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades. Actualmente existe un cierto acuerdo acerca de cuáles deben ser las metas de la educación matemática, qué se debe buscar en el aprendizaje de la matemática, qué tipo de enseñanza está acorde con estos propósitos, qué papel juega la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático de alto nivel y de qué manera influyen las creencias y actitudes de docentes e investigadores en la búsqueda de estos objetivos.

Para comprender los aportes de las investigaciones en cuanto al estudio de las dificultades es necesario hacer referencia a la noción de obstáculo. El concepto de obstáculo fue introducido por el filósofo francés Bachelard en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico. Socas (1999) en su trabajo sobre dificultades expresa: “El traslado del concepto de obstáculo epistemológico al campo de la Didáctica de la Matemática es objeto de debate, ya que plantea dificultades que han sido descritas por autores como Brousseau (1983), Sierpinska (1985) y Artigue (1989)”. La evolución histórica de los conceptos matemáticos es un proceso caracterizado por la presencia de obstáculos epistemológicos. Éstos se manifiestan en el aprendizaje de los conceptos en forma de dificultades. El mismo Socas considera dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de la matemática, a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática, a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y a actitudes afectivas y emocionales hacia la misma.

Michéle Artigue (1995,1996) manifiesta: "Las dificultades de acceso al cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan en redes complejas. Por lo tanto es posible reagruparlas en grandes categorías". Las organiza en tres grupos diferentes asociadas con:

- la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo,
- la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y a su tratamiento en la enseñanza, y
- la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

El concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos que más dificultades de aprendizaje trae inherentes al propio concepto. Las últimas investigaciones en relación a la didáctica del cálculo propone una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza. Para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que se olvida fácilmente si no se le da el valor que corresponde y, uno de los más difíciles de enseñar y aprender.

Azcárate et al. (1996) manifiestan, que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática. Los estudios de Cornu demostraron que los alumnos tienen "concepciones espontáneas personales" que provienen de su experiencia cotidiana. Las concepciones espontáneas personales son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

Las investigaciones de Orton (1980) concluyen que los alumnos muestran dificultades significativas en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada y en la utilización apropiada de las representaciones gráficas.

Cuando nos encontramos frente a nuestros alumnos en una clase esperamos enseñar un determinado conocimiento y que ellos aprendan. Sabemos que desde la enseñanza no podremos ayudarlos si no conocemos la forma en que piensan desde la matemática y los conocimientos previos que poseen.

Por nuestra experiencia de más de veinte años, una de las formas más importantes para detectar dificultades y errores en el aprendizaje es nuestro trabajo concreto en el aula, el intercambio con nuestros alumnos, la realización de actividades y discusión de soluciones. Este contacto directo con los alumnos y sus producciones tanto verbales como escritas nos permite percibir cuanti y cualitativamente problemas y dificultades que surgen en la búsqueda de la apropiación de nuevos conceptos.

Coincidimos con Cantoral, R, et al. (2003) en que los conocimientos que como “por decreto” el profesor propone o trata de transmitir y el alumnos acepta de manera totalmente pasiva se olvidan con mucha facilidad y no se alcanzan a integrar a sus estructuras lógicas buscando favorecer y fortalecer su pensamiento matemático. Los autores manifiestan: “Actualmente, se propone como una forma de aprender significativamente, que el alumno reconstruya los conceptos. Que el aprendizaje se base en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas. De esta manera, la función del profesor es la de guiar el aprendizaje, de proponer actividades que los enfrente a las dificultades inherentes al nuevo concepto y de proporcionarles las herramientas para superarlas, es decir incentivar el proceso de pensamiento en el alumno de tal manera que le permita enfrentarse a situaciones nuevas y proponer soluciones. Esto es, darle al alumnos un papel más activo en su propio proceso de apropiación de un concepto, confiriéndole una mayor responsabilidad”.

La teoría de situaciones que tuvo sus orígenes con Guy Brousseau en Francia, permite diseñar y explorar una serie de secuencias de clases generadas por el docente para disponer de un medio que le permita llevar adelante un determinado proyecto de aprendizaje. Esta teoría supone el estudio de los condiciones en las que surgen los conocimientos matemáticos y el control de esas condiciones permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición del conocimiento. Es importante destacar que una situación didáctica se construye con el propósito de que alguien aprenda algo. Forma parte de lo que Cantoral definió como Matemática Educativa: “disciplina que estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar”. Surge de la necesidad de disponer de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el que se encuentren representadas todas las relaciones y operaciones que intervienen en este proceso. En ella quedan comprendidos los contenidos matemáticos, las problemáticas del profesor y del alumno y todo lo relacionado con el estudio de la matemática.

En Cantoral, R., et al. (1995) afirman “que el pensamiento matemático se desarrolla entre los estudiantes en la medida en que ellos estén en condiciones de tomar el control de sus propias actividades matemáticas organizadas por su profesor”.

Si bien el conocimiento es o debe ser uno de los principales elementos que determinan la relación primaria entre un profesor y sus alumnos, la clase es el lugar donde intervienen las costumbres y creencias de cada uno de los participantes de la misma. Establecer un contacto fluido a través de un lenguaje común nos permite alcanzar un ambiente propicio para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En este sentido es importante fomentar un ambiente de trabajo, promover la independencia y la responsabilidad que cada uno debe tener en el propio aprendizaje favoreciendo tanto el trabajo grupal como individual, la resolución de las actividades propuestas, la discusión matemática y la auto evaluación del trabajo propio y el de los compañeros en las distintas instancias propuestas. Todas las actividades además de tener como objetivos el aprendizaje de un contenido matemático incluido en el currículo pretenden aportar a toda la red de actividades contempladas en un curso.

Cada clase debe ser una propuesta original, pensada y analizada con anticipación que a su vez tenga en cuenta lo que surja en el momento. Se deberá tener en cuenta la teoría, es decir lo que construyo la ciencia sobre lo que queremos enseñar, sin dejar de lado los sujetos a quienes va dirigida y el contexto en el que los mismos están insertos.

Presentamos este trabajo en el marco del Proyecto de Investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas" en relación a las dificultades de aprendizaje asociadas al concepto de limite infinito. El mismo tiene por objetivo la presentación y el análisis de una situación de aula diseñada especialmente, adaptada a las nuevas tendencias y teniendo en cuenta las dificultades observadas en análisis preliminares realizados en el marco del proyecto.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Diseñamos una situación didáctica orientada a que los alumnos estén suficientemente preparados para abordar el aprendizaje de límite infinito teniendo en cuenta el trabajo con funciones considerando especialmente las distintas formas de representación y algunas cuestiones relacionadas con las aproximaciones retomando la noción de infinito en sentido positivo y negativo. Se favoreció el trabajo en forma verbal, tabular, numérica, analítica y grafica. Las actividades se diseñaron para favorecer el desarrollo de habilidades para poder pasar sin inconvenientes de un sistema de representación a otro con sus diferentes formas de representación y propician que el estudiante entre en acción.

En términos metodológicos el trabajo se desarrolló en tres momentos generales: el diseño y discusión de las actividades según dificultades y errores observados en trabajos recogidos de años anteriores, la ejecución de las actividades diseñadas durante momentos determinados de clases en el aula y finalmente la valoración de los resultados obtenidos en función del objetivo general del proyecto que es analizar los errores y dificultades en el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo de alumnos de carreras universitarias no matemáticas. Se llevó al aula con alumnos cursantes de Matemática II en la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral agrupados de a dos. Al momento de poner en marcha esta propuesta, los alumnos ya trabajaron con la noción de "limite finito de variable finito." Los alumnos se mostraron muy dispuestos al trabajo y, en especial, valoraron la posibilidad de discusión en la devolución donde los errores no estaban corregidos por el docente sino solamente observados. Posteriormente se analizaron y valoraron los resultados obtenidos que se tuvieron en cuenta y favorecieron la toma de decisiones en acciones futuras.

PRESENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Se obtuvieron un total de cincuenta y nueve trabajos. Se enuncian a continuación las actividades propuestas y se presenta el análisis de las producciones realizadas por los alumnos.

Actividad 1

Una planta química derramó sustancias en el agua de cierta ciudad y sus pozos se contaminaron con un agente cancerígeno. El costo de la eliminación del x% del contaminante tóxico, en millones de dólares, está dado por $c(x)=\frac{0{,}3x}{100-x}$ siendo $0 < x < 100$.

Complete la tabla e interprete los resultados.

x	99,9	99,99	99,999	99,9999	99,99999
c(x)					

La mayoría de los trabajos no presentan inconvenientes en completar la tabla. Sin embargo en el 24% de los trabajos se observa que no logran interpretar los resultados.

Actividad 2

En cada caso, determine el dominio más amplio de la función, complete la tabla para algunos valores e interprete los resultados. Bosqueje la gráfica.

a) $f(x)=\frac{1}{x-1}$

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)						

b) $f(x)=\frac{-(x+2)}{x^2-4}$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)						

c) $f(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$

x	$-3{,}1$	$-3{,}01$	$-3{,}001$	$-2{,}999$	$-2{,}99$	$-2{,}9$
f(x)						

a)	b)	c)

Con relación a esta actividad en el 33,9% de los trabajos presentan gráficos incorrectos (mal las escalas, el gráfico no coincide con la tabla de valores, no hay correspondencia con el dominio, no respetan el conjunto numérico donde están trabajando, representan puntos aislados según la tabla de valores. (en el Anexo se pueden observar algunas producciones de los alumnos). En el inciso b) en el 56% no considera el dominio de la funcion para graficar (a pesar de estar bien determinado), lo que genera una imagen para x = –2.

En el 59,3% no se logra que interpreten los resultados.

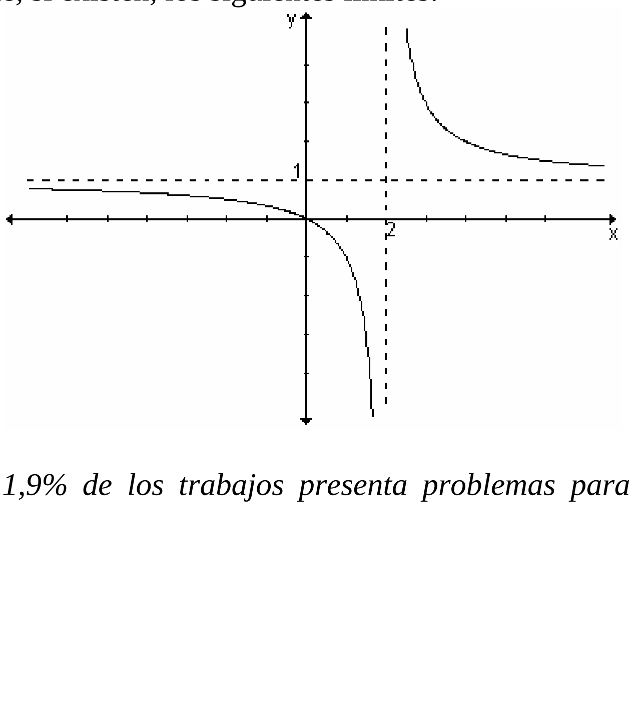
Actividad 3

Dada la función definida gráficamente, determine, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = ...$ d) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = ...$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = ...$ e) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = ...$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = ...$ f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ...$



¿ Los límites son finitos o infinitos?

El 16,9% responde mal a la pregunta y el 11,9% de los trabajos presenta problemas para responder a cada uno de los ítems planteados.

Actividad 4

Represente gráficamente una función cuyo dominio sean todos los números reales excepto x = 4, que verifique $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$.

Actividad 5

Represente gráficamente una función cuyo dominio sean todos los números reales, que verifique $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$.

Es notable que, en la resolución de la actividad 4 no se presentan mayores problemas mientras que el 6,8% grafica mal en la actividad 5.

Actividad 6

Represente gráficamente una función cuyo dominio sean todos los números reales, que verifique $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $f(1) = 3$.

En el 20% de los trabajos se observa una doble imagen para x = 1. No se respeta el concepto de función. El 10,1% grafica mal y en el 6,8% de los trabajos falta el gráfico.

REFLEXIONES

Como docentes es importante vivenciar el diseño y la puesta en marcha de diferentes actividades de aula y comprobar y reconocer la importancia de las mismas tanto como recursos valiosos para la enseñanza como para su propia formación. Si pretendemos enseñar un concepto para que nuestros alumnos lo aprendan debemos favorecer diferentes interpretaciones que puedan hacerse de los conocimientos y sus relaciones con preconceptos y conocimientos previos. De esta manera iremos construyendo con ellos un “andamiaje” o estructura conceptual cada vez más sólida.

Un desafío constante es poder desarrollar estrategias de enseñanza basadas en la cooperación, propiciando el trabajo en grupos a fin de reforzar conocimientos y compartir o disentir con las diferentes miradas sobre las actividades matemáticas.

Es importante:

- brindar a los alumnos un espacio que les permita argumentar sobre los conceptos que se tratan en la clase exponiendo sus propias ideas
- darles oportunidad para no estar de acuerdo ni con sus pares ni con el profesor
- propiciar que puedan libremente y sin presiones en relación a la evaluación y a la regularidad para avanzar en las distintas asignaturas de debatir en matemática

Como los resultados y técnicas desarrolladas en esta etapa son fundamentales para una futura implementación y readecuación de la situación es particularmente importante la discusión en grupo de los trabajos. Es conveniente que esta actividad de institucionalización se resuelvan las dudas. Es importante por parte del profesor provocar y fomentar la discusión entre los estudiantes a fin de aclarar y ampliar aspectos matemáticos trabajados en esta actividad así como tomar nota de los aspectos nuevos que emerjan de la discusión de los propios estudiantes.

Resultó muy importante al trabajar distintos profesores con diferentes grupos de alumnos hacer el ejercicio de reunirnos y debatir y discutir entre nosotros buscando identificar las dificultades que consideramos tendrían nuestros alumnos al trabajar las diferentes actividades propuestas. Esta instancia es tan importante como la puesta en común que se haga entre todos los docentes involucrados después de llevar al aula la situación diseñada.

Plantearnos qué enseñar y cómo hacerlo de la mejor manera, nos impone una reflexión continua sobre nuestro accionar que nos permita encontrar el significado de las distintas situaciones escolares, detectar problemas y encontrar soluciones. Estamos convencidas de que si las experiencias son variadas en relación a la enseñanza de un mismo concepto, aumentará la posibilidad de que el alumno actúe, realice los procesos de observación, establezca relaciones, generalice y llegue a la abstracción. Esto, para el aprendizaje del cálculo, es fundamental. Los alumnos deben aprender a utilizar de manera continua y frecuente mecanismos que les proporcionen la posibilidad de reconocer errores, detectar las causas de los mismos y proponer alternativas para solucionarlos.

Realizar una mirada reflexiva y crítica sobre nuestras acciones nos permite decidir, diseñar, implementar y experimentar estrategias de acción para lograr el aprendizaje de nuestros alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Una Empresa Docente. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1996). Teaching And learning elementary análisis. Selección de *Conferencias del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática* (ICME8). Sevilla.

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. Y Casellas, E. (1996). *Cálculo Diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis.

Brousseau, G.; "Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática" En http:/fractus.mat,uson.mx/Papers/Brousseau/ObtaculoBrousseau.htm. Consultado 2l 02/06/04.

Brousseau, G., Davis, R. Y Werner, T. (1986). "Observing Students at Work". En Christiansen, B., Howson, G. y Otte, M. (Eds.). *Perspetives on Mathematics Education.* Reidel Publishing Company. Dordrecht.

Cantoral Uriza, R. y Farfán Márquez, R. M. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. México: Thomson.

Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal.* ICME – 8. Sevilla. España. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (coordinador). (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Editorial Trillas. México.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Tesis doctoral sin publicar. Universitè de Grenoble.

Cornu, B.; 1991. Limits. En Tall, D. (Ed). Advanced Mathematical Thinking, 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Farfán Márquez, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Orton, A. (1980). A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in dolescentes and young adults. Tesis Doctoral sin publicar. University of Leed.

Socas, M. 1999. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. y otros. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Buenos Aires: Erre Eme S.A.

ANEXO. PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS. ACTIVIDAD 2