LA VISUALIZACIÓN, COMO ESTRATEGIA DE ESTUDIO EN EL CONCEPTO DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Carlos Oropeza Legorreta
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada CICATA -IPN
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán - UNAM
(México)
carlosoropezamx@gmail.com

RESUMEN
En este trabajo nos apoyamos de experiencias en clase con estudiantes del curso de Álgebra Lineal, en las que se les proponen actividades que los conducen a elaborar representaciones de carácter geométrico de los conceptos de dependencia e independencia lineal. Estas experiencias se centran en representaciones geométricas, que nos brindarán elementos para problematizar la adquisición del concepto de dependencia e independencia lineal, reconociendo en dichos conceptos una especial complejidad debido a su carácter abstracto. Es en los escenarios geométricos, que podremos, a partir de la actividad matemática desarrollada por ellos encontrar los indicios de comprensión o no de dichos conceptos, estructurar preguntas más precisas sobre la factibilidad de adquisición de conceptos en Álgebra Lineal vía representaciones visuales.

INTRODUCCIÓN

En el estudio del Álgebra no es usual partir de conocimientos físicos o geométricos para llegar a la construcción de un concepto. La mayor parte de los conceptos algebraicos son presentados a partir de definiciones formales, dicha definición en la mayoría de los casos, no parte de conocimientos previos, ni de argumentos provenientes de la física o la geometría, sino que se construyen formalmente. Esto hace que muchos estudiantes perciban al álgebra como demasiado abstracta y declaran que sus objetos carecen de aplicación en la realidad. Con el fin de construir y comprender los conceptos matemáticos de dependencia e independencia lineal en el espacio vectorial de las funciones polinómicas que se abordan en la asignatura de álgebra lineal, se pretende hacer uso de las representaciones visuales para que los alumnos puedan incorporarlas en la búsqueda de significados en los conceptos antes referidos. En este sentido la visualización juega un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos.

Existen diversas definiciones y caracterizaciones de la visualización. “La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento". Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende". En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura. Podremos decir que hoy la sociedad esta cambiando en cuanto a la influencia de la tecnología y dejando atrás el texto, se comunica principalmente por medio de imágenes.

El uso de las representaciones geométricas durante mucho tiempo en el desarrollo de la matemática han ocupado un lugar privilegiado entre un sin número de matemáticas que establecieron los fundamentos de grandes adelantos. Producto de una revisión bibliográfica, se observó que en ninguno de los textos consultados se plantea una solución de tipo geométrico, siendo esta razón en parte un motivo de estudio, porque si en otras áreas el asunto geométrico ha podido establecer canales de comunicación entre un concepto y su comprensión, en álgebra lineal también existe esta posibilidad que da origen a una generalidad.

ANTECEDENTES

A partir de la experiencia como profesor y atendiendo a los obstáculos que se presentan, cuando a lo largo de un curso, se pretende que un concepto o procedimiento matemático en particular sea aprendido por los estudiantes, se ha observado que éstas dificultades poco a poco, en algunas ocasiones se van transformando hasta convertirse en un obstáculo para el aprendizaje.

Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y . . . en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido.

Aquí, los objetos geométricos se interpretan como conocimiento situado, en la medida que permiten visualizar contenidos algebraicos y reconocer el valor de la interpretación de fenómenos reales, teniendo presente las siguientes categorías de objetivos de visualización del objeto matemático. Zimmermann (1990, p. 136)

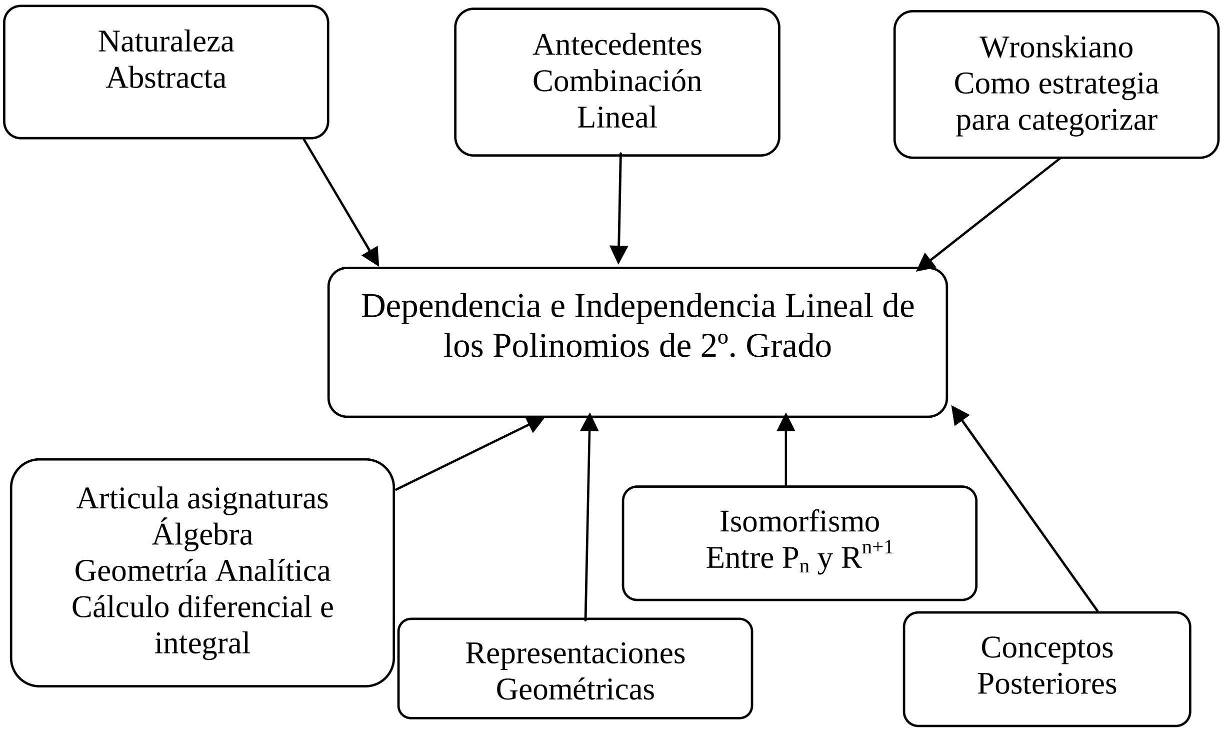
UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA INTRODUCIR LA DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Se presenta a continuación una secuencia de actividades diseñada con la finalidad de trabajar los conceptos de dependencia e independencia lineal de funciones y polinomios de primer y segundo grado, haciendo uso de recursos y representaciones gráficas. Su diseño toma como fuente principal la visualización o representación geométrica para la comprensión de objetos matemáticos en la asignatura de Álgebra Lineal, y de que los recursos geométricos deben aumentar su papel en el aula, no siendo relegados únicamente a la ejemplificación. La exploración gráfica debe complementar o estar en correspondencia esperando el estudio teórico de un tema, mejorar la construcción de los conceptos matemáticos en los estudiantes. Los recursos tecnológicos contribuyen en gran medida a la exploración gráfica, permitiendo aprovechar sus ventajas tanto en aspectos gráficos como en la velocidad de cálculo.

"*La aparición de más y más herramientas complejas en las clases de matemáticas no es una respuesta a una necesidad institucional de la escuela. Es más bien, la expresión dentro de esta institución, de un inmenso fenómeno social (el incremento en el número de pantallas y máquinas) que surge de la utilización de herramientas computarizadas por ciertas ramas de las matemáticas y la ciencia*" la tecnología brinda amplias facilidades para la visualización. Sin embargo, es fundamental tener en cuenta que lo importante en el aula es el diseño de las propuestas didácticas y no los recursos que se utilizan para su puesta en práctica. En las actividades que propusimos en este trabajo, los estudiantes pudieron hacer uso de los recursos tecnológicos disponibles, lo que les facilitó la experimentación y visualización, sobre todo en cuanto a las facilidades de graficación y tiempo de realización de cálculos.

El trabajo posee características de tipo cualitativo, radicando nuestro interés en la exploración de las acciones realizadas por los estudiantes y cómo de ahí se puede identificar en ellos la construcción o no del concepto. La actividad es del tipo cualitativo ya que las categorías e interpretaciones se construirán a partir de la información que se obtenga. El foco de investigación tendrá, como acabamos de afirmar, un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. En esta sección se analizan algunas de las respuestas emitidas por un grupo de estudiantes de segundo semestre de ingeniería en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (UNAM), México. En el trabajo se ha puesto una especial atención de los significados que los estudiantes de ingeniería asignan al concepto de dependencia e independencia lineal, con relación a los vectores libres (flecha) y funciones de primero y segundo grado haciendo uso del Wronskiano, para el análisis de la dependencia e independencia lineal.

Las experiencias convencionales nos muestran que frecuentemente los profesores de la asignatura de Álgebra Lineal dan la definición, inician con ejercicios simples, aumentan el grado de dificultad y solicitan al estudiante, continúe con la solución de los ejercicios. Haciendo uso de esta consideración, la propuesta que se plantea en las actividades diseñadas tiene como propósito construir una serie de hipótesis que reflejen cómo se enfrentan al problema los estudiantes, qué respuestas dan, la actividad matemática que se provoca, las argumentaciones que se generan y los conceptos matemáticos que logran poner en juego. Proponemos de manera implícita reflexionar sobre las posibles ventajas que dichas actividades pueden producir con miras al aprendizaje del concepto, en contraste con la forma convencional con que se revisan dichos conceptos.



CONSIDERACIONES TEÓRICAS

La visualización espacial ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz & Van Dormolen, 1996; Gutierres, 1996). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren “ver” o “imaginar” mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

La mayor parte de las investigaciones se orientan a describir estilos y estrategias cognitivas, así como la evolución de las capacidades mentales de los sujetos ante tareas que requieren visualización espacial; se trata, por tanto, de trabajos con una orientación básicamente cognitiva, usando nociones como imagen visual, imagen conceptual, representaciones internas y externas, etc.

La noción de *imagen* juega un papel central en el estudio de la habilidad espacial. Clements y Battista (1992, p. 446) define las imágenes como "representaciones holísticas internas de objetos o escenas, que son isomorfas a sus referentes y pueden ser inspeccionadas y trasformadas". Bishop surgiere considerar dos habilidades diferentes relacionadas con la visualización: 'la habilidad de interpretar información figural', y 'la habilidad de procesamiento visual', las cuales considera como "*un asunto muy individual*" (Bishop, 1989, p.8).

Presmeg (1986) define la noción de "imagen visual" como un esquema mental que representa (depicting) información visual o espacial (p. 42). Sostiene la posición e que tales imágenes visuales se pueden tener tanto en presencia del objeto perceptible o en su ausencia. Su definición también permite la posibilidad de que los símbolos matemáticos, verbales o numéricos se puedan disponer espacialmente (por ejemplo, los patrones numéricos).

La distinción entre las imágenes mentales de objetos perceptibles y las entidades geométricas, y el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre las mismas es abordada con nitidez por Fischbein (1993) con la noción de *concepto figural*. La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figúrales. "*Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figúrales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen* cualidades conceptuales como idealidad, abstracción, generalidad, perfección" (p. 143). Como afirma Fischbein, en las teorías cognitivas actuales, los conceptos y las imágenes se consideran básicamente como dos categorías distintas de entidades mentales.

Dentro de la línea de investigación en educación matemática conocida como "pensamiento matemático avanzado", Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructores "imagen conceptual" (concept image) y "definición conceptual" (concept definition), para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual con relación a un concepto matemático. Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Con la expresión "*imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados*" (Tall, Vinner, 1981, p. 152).

Vemos que los autores citados se apoyan básicamente en la dualidad representación interna y externa para describir los conocimientos y habilidades matemáticas de los sujetos enfrentados a tareas matemáticas. Consideramos que estas nociones son insuficientes para el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de tareas que requieren visualización y razonamiento espacial, y de modo más general las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar, al centrar la atención básicamente en la faceta o dimensión cognitiva. Incluso el estudio de dicha faceta queda frecuentemente restringida a la dialéctica entre los ostensivos visuales y sus correspondientes representaciones interna o mentales.

Clements y Battista (1992) describen la geometría escolar como el "estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales" (p. 420).

En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar. Por una parte están los objetos espaciales, que se deben entender como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

ALGUNAS EXPERIENCIAS EN EL AULA

Actividad 1. CONSTRUCCIÓN EN EL PLANO Y DEL PLANO

En esta actividad se pretende que los alumnos incorporen conocimiento, que les ayuden a la adquisición del concepto de combinación lineal como antecedente del concepto de dependencia e independencia lineal. Además logren una interpretación adecuada de los vectores libres que se asocian a cada uno de los puntos marcados en los diferentes cuadrantes, recuperen el significado del producto de un escalar por un vector, platican con sentido la suma de vectores preferentemente a partir del método del paralelogramo y hagan uso de elementos geométricos como una alternativa para verificar y construir sus respuestas. Como se puede apreciar en el resultado de la actividad que se reporta, presenta en forma general que los estudiantes logran responder los cuestionamientos asociados a la misma.

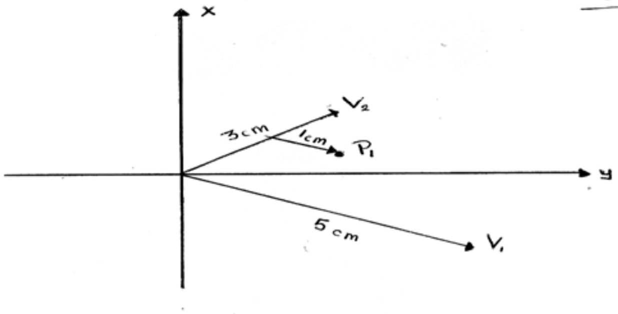
En la discusión final se observó que la totalidad de los integrantes en los equipos coinciden en una respuesta común, siendo para ellos este hecho un agente motivador que les permite aceptar naturalmente la solución de las actividades restantes. Es importante observar los métodos y las herramientas utilizadas por los alumnos en la resolución de las actividades, esto deja de cierta manera clara la idea que tiene del concepto estudiado. En estas actividades, se está poniendo en juego el concepto de base de un espacio vectorial, aparte de la de combinación lineal y generación de un espacio vectorial.

ACTIVIDAD:

1. Con los vectores V_1 y V_2 construya los vectores P_1, P_2, P_3 y P_4 de las siguientes figuras.

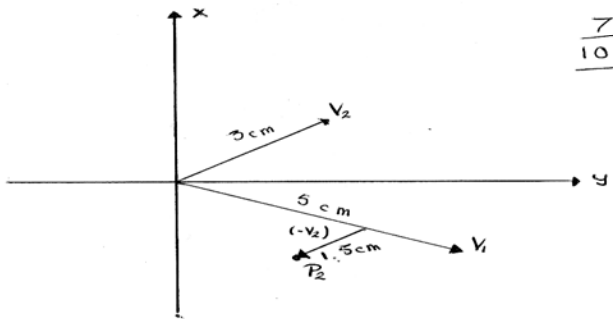
$\frac{2}{3}V_2 + \frac{1}{5}V_1 = P_1$

A)



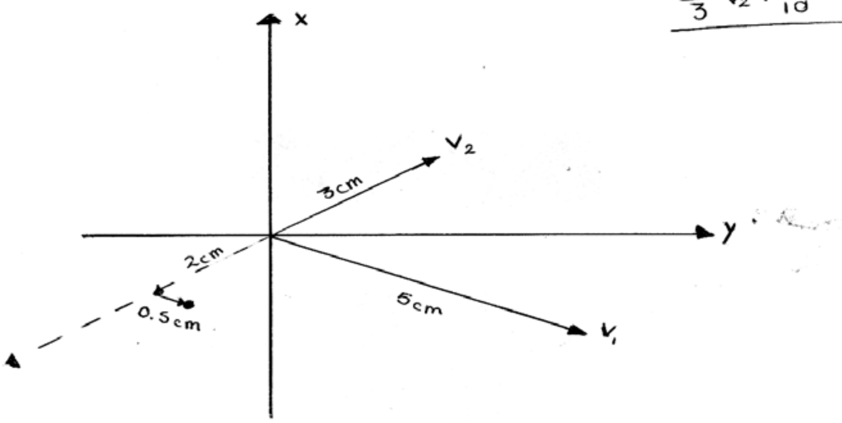
B)

$\frac{7}{10}V_1 - \frac{1}{2}V_2 = P_2$

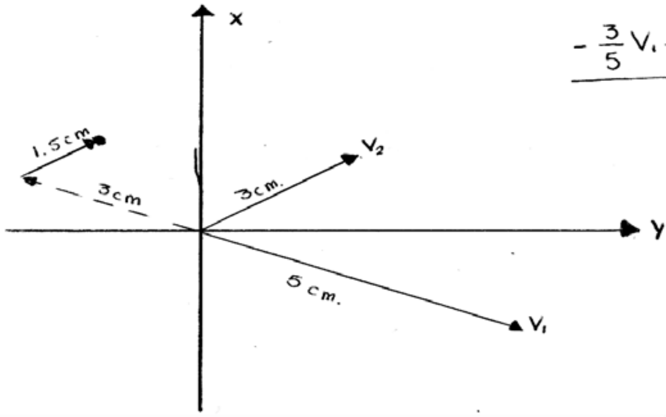


$\frac{2}{3}V_2 + \frac{1}{10}V_1 = \vec{P_3}$

C)

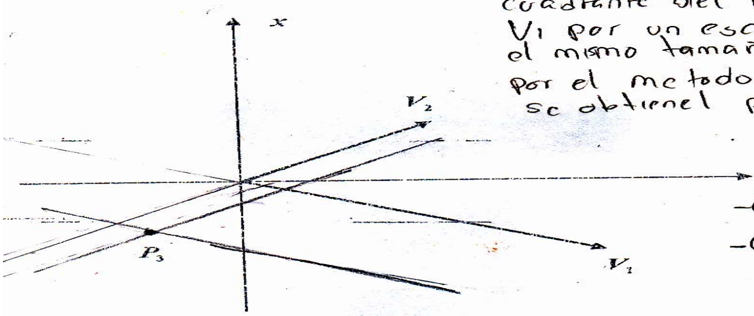


D)



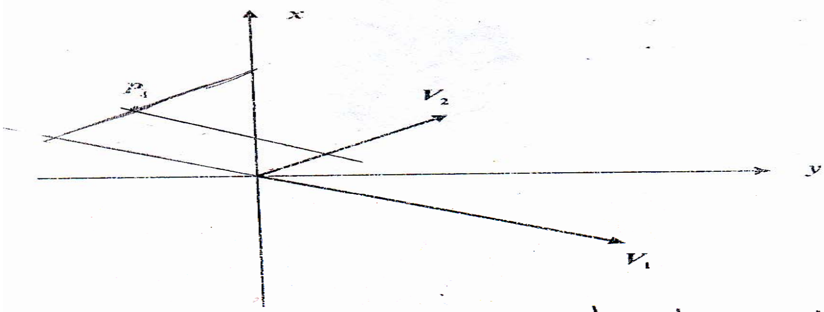
$$-\frac{3}{5}V_1 + \frac{1}{2}V_2 = \vec{P_4}$$

Multplicar V_2 por un escalar negativo para que pase al cuadrante del punto P_3, multiplicar V_1 por un escalar decimal para obtener el mismo tamaño que V_2 y despues por el metodo del paralelogramo se obtienel punto P_3



$$-C(V_2) = Cd(V_1)$$

$$-C(V_2) + Cd(V_1) = P_3$$



multiplicar V_1 por un escalar negativo para que pase al segundo cuadrante del punto P_4 y multiplicar V_2 por un escalar decimal para llegar al tamaño de V_1, despues por el metodo del paralelogramo tenemos el punto P_4.

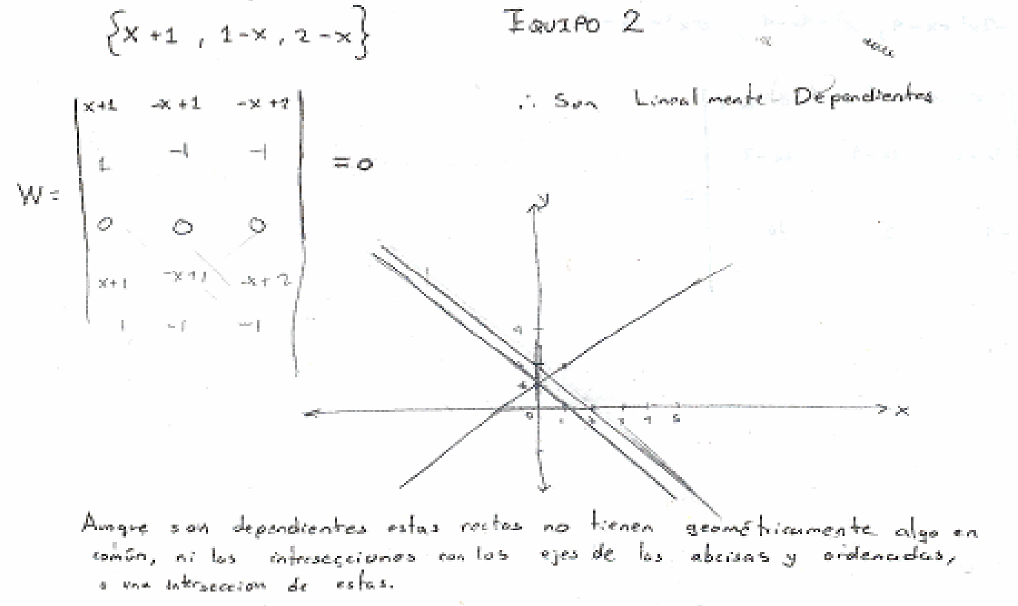
USO DEL WRONSKIANO Y LA DETERMINACIÓN DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

En las siguientes actividades se espera que los estudiantes lleguen a deducir que el escenario de las representaciones no proporciona información suficiente para poder obtener directamente una categorización sobre el concepto de dependencia e independencia lineal. Estas actividades fueron realizadas en clases posteriores a la actividad 1 anteriormente reportada. Para este momento, los alumnos ya habían visto las definiciones de dependencia e independencia lineal y había trabajado con el docente un ejemplo en el que aplicaban el método del Wronskiano.

En la Actividad 2, se ponen en juego los conocimientos que el estudiante tiene de una recta, su pendiente, su ordenada al origen, el uso de derivadas sucesivas, y la solución de un determinante. La actividad 3, propone que los estudiantes hagan uso de los elementos de una parábola, la gráfica de una función constante, el uso de derivadas sucesivas y la solución de un determinante. Finalmente en la actividad 4 se estudian polinomios de segundo orden con la intención de tener un puente con otra serie de actividades que se han diseñado para tal fin. El surgimiento de dicho obstáculo, puede conducir hacia un nuevo desplazamiento del uso de la demostración analítica denominada isomorfismo lineal, el cual asocia un significado equivalente entre los polinomios de orden “n” y el espacio R $^{n+1}$.

ACTIVIDAD 2 Dadas las siguientes funciones **{x+1,1-x,2-x}:**

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el método de Wronskiano.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?

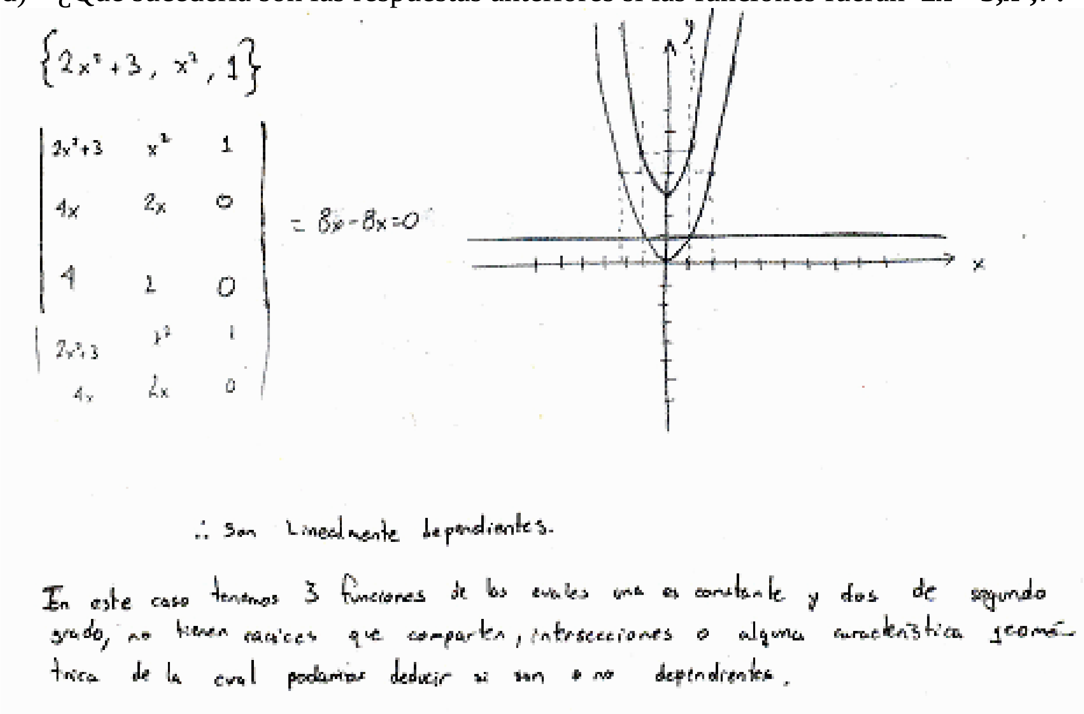


La actividad que hace uso del Wronskiano, está fundamentada en la definición la cuál involucra las n-1 derivadas sucesivas del conjunto de funciones, donde n representa el orden del polinomio. Haciendo uso de esta distribución se propone en la primera parte de esta actividad un conjunto de polinomios de primer orden en donde las respuesta que emiten los estudiantes se puede apreciar con claridad, que aunque llegan a la solución analítica, no encuentran una interpretación geométrica, convirtiéndose la exploración que efectúan en algo sumamente interesante.

ACTIVIDAD 3

Dados los siguientes polinomios $\mathbf{2x^2+3, x^2, 1.}$

a) Determine si son linealmente dependiente o independientes utilizando el Wronskiano.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?
d) ¿Qué sucedería son las respuestas anteriores si las funciones fueran $\mathbf{2x^2+3, x^2, 7?}$



Se puede apreciar en las conclusiones que los alumnos redactan en la parte superior, manifiestan la creencia de que al no compartir raíces o intersecciones es el motivo por el cual no pueden categorizar al conjunto de vectores como linealmente dependiente o independiente (es decir que están asociando raíces con el concepto de dependencia e independencia lineal). En esta actividad nuevamente logran encontrar el resultado analítico sin llegar a una interpretación geométrica.

ACTIVIDAD 4

Dados los siguientes polinomios **$-2x^2+x-4, x^2-4x-4, 8x^2-7x-4$.**

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes.

b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.

c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?

$$\{-2x^2+x-4,\ x^2-4x-4,\ 8x^2-7x-4\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x^2+x-4 & x^2-4x-4 & 8x^2-7x-4 \\ -4x+1 & 2x-4 & 16x-7 \\ -4 & 2 & 16 \end{vmatrix} = (-2x^2+x-4)(2x-4)(16)+(8x^2-7x-4)(-4x+1)(2)+(x^2-4x-4)(16x-7)(-4)$$

$$-(8x^2-7x-4)(2x-4)(-4)-(-2x^2+x-4)(16x-7)(2)-(x^2-4x-4)(-4x+1)(16)$$

$$=[-4x^3+2x^2-8x-8x^2+4x+16]16+[-32x^3+28x^2+16x+8x^2-7x-4]2+[16x^3-64x^2-64x-7x^2+28x+28]4$$

$$-[16x^3-14x^2-8x-32x^2+28x+16](-4)-[-32x^3-16x^2-64x+14x^2-7x+28]2-[4x^3+16x^2+16x+x^2-4x-4]16=$$

$$=[-4x^3-6x^2-4x+16]16+[-32x^3+36x^2+9x-4]2+[16x^3-71x^2-36x+28]4+[16x^3-46x^2+20x+16]4$$

$$\ldots-[-32x^3-2x^2-71x+28]2-[-4x^3+17x^2+12x-4]16=$$

$$=-64x^3-96x^2-64x+256-64x^3+72x^2+18x-8+64x^3-284x^2-144x+112+64x^3-184x^2+80x+64$$

$$+64x^2+4x^2+142x-56+64x^3-272x^2-192x+64=$$

$$=-64x^3-64x^3+64x^3+64x^3+64x^3+64x^3-96x^2+72x^2-284x^2-184x^2+4x^2-276$$

$$-64x+18x-144x+80x+142x-192x+256-8+112+64-56+84$$

$$=\underline{128x^3-760x^2-32x+432} \neq 0$$

Entonces los polinomios son Linealmente Independientes.

En la solución de esta actividad se aprecia una gran mecanización de la herramienta matemática en cuanto al álgebra se refiere, pero incluso el equipo 2 que muestra sus respuestas no logra alcanzar la gráfica de los polinomios. Dicha mecanización se pone de manifiesto en como este ejercicio se encuentra a continuación del que requiere del método del Wronskiano, hicieron uso de este recurso en lugar de recurrir a la definición de combinación lineal, que hubiera facilitado los cálculos.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este apartado se describen algunos de los elementos que consideramos son relevantes de comentar. En la actividad 1, se observaron algunas dificultades por parte de los alumnos cuando trabajan con los cuadrantes II, III y IV ya que les cuesta establecer los rangos del valor que deben tener los escalares para cumplir con las condiciones que les solicitan. Algunos estudiantes discutieron incluso acerca de los signos que debían tener cada uno de los escalares que intervienen en las combinaciones lineales correspondientes.

Algunos de los equipos llegan sin problemas a la generación de la recta a partir de los dos vectores que originalmente se proponen. En términos generales la mayoría de los estudiantes hacen uso de los elementos geométricos asociados a cada inciso del diseño en esta actividad. Los equipos de estudiantes al trabajar con el Wronskiano presentan regularmente cierta resistencia, pues el concepto involucra hacer uso de derivadas sucesivas. También llegan a presentar frecuentemente resultados contradictorios entre los cálculos obtenidos y su respuesta en forma geométrica.

CONCLUSIONES

El diseño de situaciones de aprendizaje orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características de abstracción que son requeridas por el álgebra en el discurso matemático escolar.

Consideramos que la puesta en práctica de las actividades anteriores fue adecuada, pues si bien la totalidad de los estudiantes no pudieron resolver correctamente, se generó en el aula un ambiente en el que los intercambios de opiniones fueron muy importantes y diversos, mismo que permitieron que los estudiantes hicieran reflexiones diversas, distintas a las que producen en una clase convencional. El grupo de estudiantes que intervino en la experiencia declararon que les resultó muy interesante la secuencia y valoraron positivamente la cantidad de elementos que llegan a descubrir.

Este hecho, fue algo novedoso para ellos, puesto que en un curso tradicional, los errores en los que se incurre la mayoría de las ocasiones son motivo de frustración. Con base en el resultado de las actividades, se puede observar que este grupo de estudiantes acepta con naturalidad el uso de la tecnología como una herramienta de comprobación, pensamos que se debe a que en la facultad se instruye a los estudiantes apoyándose en la tecnología, para diversas asignaturas.

Pero nos preguntamos ¿Qué sucedería con estudiantes que no cuentan con esos recursos? Con esta pregunta se abre una nueva ruta, para seguir explorando alrededor de la visualización, quedando de manifiesto la importancia de su utilización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.55-80). Morelos, México.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático.* Prentice.

Clements, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 161-2004). NCTM, Macmillan, P. C.

Fernandez, T., Cajaraville, J.A. y Godino, J. D. (2006). *Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacia*l. Contribución al Grupo de Investigación, "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM. Huesca.

Duval, R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, (Ed.) *Investigaciones en matemática educativa II*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (1, pp. 3-19), Valencia.

Poole, D. (2007). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. México: Thomson Learning.

Presmeg, N. C. (1998). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.