DIFICULTADES EN LAS DEMOSTRACIONES EN GEOMETRÍA

María Susana Dal Maso
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe.
Prov. de Santa Fe (Argentina)
mdalmaso@fhuc.unl.edu.ar

RESUMEN

La geometría enseñada trata de objetos teóricos pero pone también en juego representaciones gráficas, cuyo papel en el aprendizaje de la geometría es destacable.

El dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico, es decir, podemos pensar en un emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos. Al escoger un dibujo determinado, de todos los dibujos posibles del referente, se establece una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones. Las relaciones entre un dibujo y su referente construidas por un sujeto constituyen el significado, para este sujeto, de la figura geométrica asociada. Es allí donde radica la importancia de una representación geométrica correcta, centrando la atención sobre elementos pertinentes al objeto geométrico en cuestión.

Es interesante analizar cómo las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos producen muchas veces dificultades durante la resolución de problemas y en la demostración en Geometría. Pero no se puede ignorar que el proceso de trabajar con una representación clarifica, aporta detalles, provee un material sobre el cual es posible elaborar ideas y hacer correcciones y se convierte en un marco de referencia importante para la percepción. Así el software Cabri-Géometre; que permite una vez hecho el dibujo, moverlo, agrandarlo, cambiar los puntos de lugar... contribuyendo de manera notoria al desarrollo de la percepción, intuición y sentido estético; es un soporte para las actividades que requieran el planteo de conjeturas.

INTRODUCCIÓN

El trabajo tiende a analizar las dificultades de los alumnos en la elaboración de demostraciones geométricas realizadas con lápiz y papel y con un software de geometría dinámica. Es la introducción a una tesis de la Maestría en Didácticas Específicas y estamos en la instancia de la formulación del marco teórico por lo tanto en esta ponencia sólo se expondrán los referentes teóricos y no el trabajo de campo.

26

REFERENTES TEÓRICOS EN LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

Los conceptos matemáticos se encuentran entre los más abstractos y requieren para su formación un cierto número de experiencias que tengan algo en común.

Según Skemp (1980) los conceptos contributorios deben estar disponibles para cada nueva etapa de abstracción pues si un nivel dado se comprende imperfectamente cualquier cosa derivada se encuentra en peligro. Plantea que un concepto es una forma de procesar datos que capacita al usuario para utilizar la experiencia pasada de manera provechosa al mejorar la situación presente. La escasa experiencia incide en la interpretación de un dibujo geométrico, no permitiendo muchas veces adecuar el objeto percibido a alguna forma organizada dado que los dibujos no representan un objeto particular, sino una clase de objetos.

Colette Laborde (1996) expresa que la geometría enseñada trata de objetos teóricos pero pone también en juego representaciones gráficas cuyo papel en el aprendizaje de la geometría es indiscutible.

En cuanto entidad material sobre un soporte, el dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico. Se puede pensar en un conjunto de pares formados por dos elementos: el primero, el referente; el segundo, uno de los dibujos que lo representa. Ese dibujo se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente.

Las relaciones entre dibujo y objeto geométrico construidas por un sujeto, que constituyen el significado para el sujeto, es lo que Fishbein (1993) llama concepto figural. Si bien el concepto figural es una entidad única, permanece bajo la doble y muchas veces contradictoria influencia de los sistemas que está relacionando (el conceptual y el figural). El sistema conceptual debería controlar los significados, las relaciones y las propiedades de la figura. Muchos errores en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales. Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones. Pero el desarrollo de los conceptos figurales no es, generalmente, un proceso natural. Debería tenderse desde la propuesta de enseñanza a que los conceptos figurales se desarrollen naturalmente hacia su forma ideal. Una de las principales tareas de la Educación Matemática (en el dominio de la geometría) es crear secuencias didácticas que apunten a una cooperación estricta entre los dos aspectos, hasta la fusión en objetos unitarios.

Un dibujo remite a los objetos teóricos de la geometría en la medida en que el que lo lee decide hacerlo. La interpretación evidentemente depende de la teoría con la que el lector elige leer el dibujo, así como de los conocimientos de dicho lector.

Según Colette Laborde (1996), *"la percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva"*. Así se ha podido poner de manifiesto que los aspectos perceptivos del dibujo pueden entorpecer o por el contrario favorecer la lectura geométrica al atraer la atención sobre elementos del dibujo no pertinentes para esa lectura. La geometría puede ser considerada como el resultado de una modelización del dibujo, sirviendo así de instrumento de producción y de control del dibujo, e incluso de predicción. Pero también, inversamente, el dibujo en geometría puede ser considerado como modelo del objeto geométrico, ofreciendo así un campo de experimentación gráfica. *"Puesto que la enseñanza ignora las relaciones entre dibujo y objeto geométrico, este carácter de experimentación no es percibido, por decirlo así, por los alumnos y aún menos utilizado"* (Laborde, 1996). Es por eso que añadir a un dibujo elementos no mencionados en el enunciado o por el profesor, no depende de decisiones tomadas espontáneamente por los alumnos sino que necesita de un aprendizaje. El dibujo se presta a experimentos que dan cuenta de preguntas planteadas en la teoría, esas preguntas se traducen al dibujo, cuyas respuestas en el dibujo no da una respuesta en la teoría sino que proporciona supuestos, pistas para el trabajo teórico.

EN LA INTERPRETACIÓN DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS A PARTIR DE SU VISUALIZACIÓN

.Según Raymond Duval, las actividades que habitualmente se les proponen a los alumnos, pueden ser reagrupadas en cuatro **clases** según las maneras clásicas de hacer entre los alumnos en los procesos de geometría. Podemos comparar las diferentes maneras de ver que movilizan y desarrollan en cada una según dos puntos de vista indispensables para comprender los procesos de adquisición de conocimientos geométricos.: el cognitivo, examinando las posibilidades de transferencia de un tipo de actividades a otro; el matemático, relativo a la pertenencia o a la no pertenencia de cada una de las maneras de ver que se usan en los procesos de adquisición de conocimientos geométricos. Dichas clases son:

Botanista

Se trata de aprender a reconocer perceptivamente las formas elementales que son utilizadas en geometría plana: tipos de triángulos y de cuadriláteros, configuraciones obtenidas por las diferentes posiciones de dos rectas la una en relación a la otra, eventualmente formas circulares, formas ovoides, etc. Se trata evidentemente de localizar las diferencias entre dos formas que presentan ciertas similitudes (un cuadrado y un rectángulo) y de hacer notar cuales son las similitudes entre dos formas diferentes (entre un cuadrado y un paralelogramo). Aquí las propiedades geométricas son características visuales. Este reconocimiento perceptivo puede dar lugar a tareas de superposición (utilización de patrones), de reproducción de un modelo (dibujo) o de clasificación elemental (lo que implica una denominación de los objetos o de algunas de sus propiedades).

Cada una de estas tareas tiende a privilegiar una modalidad operatoria: manipulación material de las piezas de un puzzle de formas, re-producción gráfica de una representación o designación verbal de un objeto o de una de sus propiedades. Esta clase no tiene nada de actividad geométrica, no se parece a la geometría más que en la medida en que tiene que ver con las formas euclídeas.

Agrimensor geómetra

Se trata de aprender a medir las longitudes sobre un terreno en el suelo, o la distancia entre dos puntos marcados, y de trasportarlas sobre un dibujo que adquiere el estatuto de plano. Las propiedades geométricas se movilizan con fines de medida (pasar de una escala de magnitud a otra), y sirven para escoger el tipo de constataciones a hacer en el espacio real que nos rodea, tanto si es para construir un objeto como para calcular una longitud o una distancia. La correspondencia, que reposa en primer lugar sobre la toma en cuenta de la orientación para los desplazamientos y la posición respectiva de los objetos localizados los unos en relación a los otros, y no sobre las actividades de medida entre la representación de una plano o de un dibujo y lo que se ve sobre el terreno, da lugar a otras tareas complejas como leer, o producir un plano, reconocer sólidos a través de sus diferentes representaciones planas posibles, comprendida su descomposición en patrones.

El constructor

La particularidad de las figuras geométricas que corresponden a las formas euclídeas elementales y a las configuraciones de formas elementales, debe poder ser construida con la ayuda de instrumentos. Un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica, y esta forma visual constituye la primitiva del instrumento. Así, el trazo recto o un redondel regular se corresponden con los instrumentos clásicos que son la regla (no graduada) y el compás. Según Duval, la utilización de un instrumento da la posibilidad de experimentar, de alguna manera, las propiedades geométricas como limitaciones de construcción: para cada forma visual que no está producida directamente por un instrumento, se necesitan varias operaciones de trazado y generalmente hay un orden para efectuar estas operaciones. No tenerlo en cuenta hace que la construcción sea imposible. Sin embargo, todo cambio de instrumento entraña un cambio en las propiedades geométricas que deben ser movilizadas de manera explícita. Es a través de la utilización de un instrumento como los alumnos pueden verdaderamente tomar conciencia de que las propiedades geométricas no son solamente características perceptivas. Toda actividad de construcción puede ser explicitada a través de una actividad de descripción, cada operación de construcción puede ser formulada en una instrucción. Esta formulación implica la denominación de los objetos y las propiedades geométricas movilizadas permitiendo describir un procedimiento de construcción, necesario para que otro alumno pueda reproducir la figura.

Inventor-manitas

Evocamos algunos problemas clásicos que nos permitirán presentar esta clase: ¿Cómo partir, con un solo corte de tijeras, un triángulo de manera que se puedan ensamblar los dos pedazos dando lugar a un paralelogramo? ¿Cómo partir, con un solo corte de tijeras, un paralelogramo de manera que se pueda formar un rectángulo? ¿Cómo construir a partir de una cuadrado dado otro cuadrado cuya área sea el doble? Estos problemas tienen como característica común exigir una reconstrucción visual de las formas elementales para así poder obtener la reconfiguración o la figura demandada. Estos problemas pueden ser también presentados tanto en el marco de manipulaciones materiales como en el de representaciones gráficas. Pero lo más interesante es que los problemas tocan una capacidad fundamental que es la condición necesaria para la utilización heurística de las figuras: *añadir trazos suplementarios a una figura de partida* (es decir, la que acompaña al enunciado de un problema, o que puede construirse a partir del enunciado de un problema), *a efectos de "ver"* (es decir, *descubrir sobre la figura*) *un procedimiento de resolución.* Son esos trazos suplementarios los que van a permitir una reorganización visual de la figura de partida develando de alguna manera la solución de un problema. Si bien la introducción de trazados suplementarios no es propia de esta clase pues la encontramos también en la construcción de figuras con la ayuda de un instrumento, en ambas los trazados suplementarios no pertenecen a la figura o a la definición de los objetos representados. Por tanto es aquí donde *comienza la visualización geométrica*.

Existen dos tipos de visualización en los cuales los procesos de reconocimiento de los objetos representados difieren radicalmente: uno **icónico** y otro **no icónico**.

En la *visualización icónica* el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto (real) que representa, o en su defecto, por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo).

La *visualización no icónica* reconoce las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que han sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas, o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura.

Podemos constatar que se produce una gran ruptura entre estas dos diferentes entradas. Y esta ruptura es muy importante, ya que sólo la visualización no icónica es pertinente para los procesos geométricos.

La utilización heurística de una figura, que es independiente de toda utilización de instrumentos, trata de transformar una figura de partida (dada o no con un enunciado del problema), reconstruyendo visualmente las formas que se reconocen en el primer golpe de vista. La aportación de trazos suplementarios presupone esta reconstrucción que es puramente visual. Cabría preguntarse si toda actividad que moviliza la visualización icónica o que solamente se apoya sobre ella, lejos de ayudar a los alumnos a tomar conciencia de lo que son las propiedades geométricas no les desvía, por el contrario de la comprensión de los procesos geométricos. Si por el contrario se considera la visualización no icónica, se ve que la toma de conciencia de las propiedades está ligada a las operaciones que se efectúan, bien para construir una figura o bien para transformarla. Pero la entrada del constructor aparece mas favorable por la toma de conciencia de las propiedades, pues la construcción obliga a tener en cuenta la relación de los trazos que se deben producir sucesivamente y una variable didáctica esencial aparece, la elección del instrumento de construcción.

Concluyendo, "la articulación entre visualización y razonamiento está en la base de toda actividad geométrica...Demasiado a menudo las progresiones se organizan alrededor de un esquema general del tipo siguiente: hacer trabajar sobre el reconocimiento perceptivo de las formas, después hacerlas reproducir utilizando los instrumentos clásicos, para finalmente hacer adquirir el vocabulario de las propiedades. Y esto se acompaña de objetivos de conocimiento según los cuales los puntos, las rectas y sus propiedades vienen antes que los polígonos remarcables y sus propiedades...En realidad todo esto tiende a escotomizar la complejidad de la visualización en geometría e introducir confusiones de grandes consecuencias, tanto sobre los objetos de la geometría como sobre sus procesos"(Duval,2000)

SOBRE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

Existen numerosas publicaciones que hacen referencia a la adquisición de la capacidad de razonamiento formal y el aprendizaje de los métodos de demostración formal, pero según Ángel Gutiérrez (2001), unas pocas incluyen aportaciones realmente útiles para entender a los estudiantes de Secundaria y Universidad.

Ángel Gutiérrez en su trabajo presentado en el 5° Simposio de la SEIEM (2001), hace referencia a algunos trabajos que van más allá de la consideración estricta de las demostraciones formales como único modo admisible de demostración:

- Alan Bell (1976) plantea que la demostración (formal o no) puede tener diversos objetivos en matemática; "verificación", cuando intenta asegurar la veracidad de una afirmación. "Iluminación", cuando además de asegurar su veracidad, permite entender por qué es cierta una afirmación. "Sistematización", cuando permite organizar el enunciado demostrado en un sistema de axiomas, definiciones y otros teoremas.

- Michael de Villiers (1993) desarrolla posteriormente esta línea de investigación describiendo nuevos objetivos para la realización de una demostración: “Descubrimiento”, cuando la demostración conduce al descubrimiento o invención de nuevos conceptos o teoremas. “Comunicación” cuando la demostración tiene como objetivo transmitir conocimientos matemáticos a otras personas.

- Nicolas Balacheff (1988) introduce una clasificación en la cual el énfasis no está sólo en la relación entre los ejemplos usados y el enunciado que se quiere demostrar, sino en el motivo por el que los estudiantes usan los ejemplos. Balacheff identifica dos tipos de demostraciones, las “pragmáticas”, basadas en manipulaciones o ejemplos concretos y las “conceptuales”, basadas en la formulación abstracta de propiedades matemáticas y de relaciones deductivas entre ellas. En la categoría de demostraciones pragmáticas considera el “empirismo naif”, basado en la verificación del enunciado que hay que demostrar en unos pocos ejemplos, normalmente elegidos de manera aleatoria, “experimento crucial”, basado en la selección cuidadosa de un ejemplo con el convencimiento de que si la conjetura es cierta en este ejemplo, lo será siempre, y “ejemplo genérico”, basado en la selección y manipulación de un ejemplo que actúa como representante de su clase, por lo que la demostración, aunque sea particular, pretende ser abstracta y tener validez para toda la clase representada. Entre las demostraciones conceptuales distingue el “experimento mental”, cuando los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en argumentos abstractos deductivos, y el “cálculo simbólico”, cuando la demostración se basa en la transformación de expresiones simbólicas formales.

- Harel y Sowder (1998), han propuesto varios esquemas de demostración que se identifican en tres categorías: los de “convicción externa”, aquellos en los que se alude a una autoridad externa al propio problema; los “empíricos”, cuando la justificación está formada por ejemplos, y los “analíticos”, cuando la justificación se basa en argumentos abstractos y deducciones lógicas. En los esquemas de convicción externa, estos autores distinguen entre los “autoritarios”, basados en la autoridad de un profesor, libro de texto, etc., los “rituales, basados en la forma como está presentada la demostración, y los “simbólicos”, basados en la manipulación algorítmica de símbolos y expresiones. En los esquemas empíricos distinguen los “perceptivos” basados en la observación de ejemplos concretos de tipo gráfico, y los “inductivos”, cuando la demostración consiste en comprobar la validez del enunciado en uno o varios ejemplos concretos. En los esquemas analíticos distinguen los “transformativos”, basados en operaciones sobre objetos y anticipación de su resultado, que luego son convertidos en argumentos deductivos, y los “axiomáticos”, formados por cadenas deductivas basadas en elementos de un sistema axiomático.

La tendencia actual de la didáctica de las matemáticas a prestar atención destacada a los aspectos psicológicos y cognitivos del aprendizaje indica que los modelos de Balacheff y Harel y Sowder son los que resultan más útiles como marco para el aprendizaje de los procesos de demostración". (Ángel Gutiérrez, 2001). Según Gutiérrez, analizando la actuación de estudiantes de ESO al resolver problemas de demostrar en un entorno Cabri, bajo el marco de un proyecto de investigación desarrollado en la Universidad de Valencia del cual formaba parte, se descubrió que ninguno de los modelos anteriores resultaba útil. Por lo tanto decidieron definir una nueva clasificación de demostraciones que contuviera a las anteriores pero que las desarrollara teniendo en cuenta las lagunas que habían detectado en ellas.

Distingue dos grandes categorías de demostraciones: *Demostraciones empíricas:* demostraciones en las que el elemento de convicción es la verificación de la propiedad en ejemplos. *Demostraciones deductivas:* demostraciones en las que el elemento de convicción son argumentos descontextualizados de ejemplos concretos y basados en propiedades generales, operaciones mentales abstractas y deducciones lógicas.

Distingue tres familias de demostraciones **empíricas**, dependiendo de la forma de selección de los ejemplos, cada una de las cuales incluye varios tipos correspondientes a diferentes formas de uso de los ejemplos seleccionados en la demostración.

- Empirismo naif: los estudiantes seleccionan varios ejemplos sin ningún criterio específico. En unas ocasiones la verificación de la propiedad se hace táctil o visualmente (tipo "perceptivo") y en otras se hace observando propiedades o elementos matemáticos del ejemplo (tipo "inductivo").
- Experimento crucial: los estudiantes son conscientes de la necesidad de generalización y la resuelven mediante la selección cuidadosa de un ejemplo "lo menos particular posible" (Balacheff, 1987), convencidos de que si el enunciado es válido en este ejemplo, lo es siempre si bien éste no deja de tener carácter de ejemplo específico. Los experimentos cruciales pueden ser "ejemplificación" cuando la demostración consiste sólo en mostrar la existencia del ejemplo crucial, "constructivo", cuando la demostración incide en la forma de obtención del ejemplo, "analítico", cuando la demostración se basa en propiedades matemáticas observadas empíricamente e "intelectual", cuando la demostración intenta separarse de las observaciones empíricas y se basa en propiedades matemáticas aceptadas y relaciones deductivas entre elementos del ejemplo.
- Ejemplo genérico: los estudiantes, conscientes de la necesidad de generalización, seleccionan un ejemplo al que dan el carácter de representante de su clase. La demostración está formada por razonamientos abstractos referidos a propiedades y elementos generales de la clase pero obtenidos a partir de operaciones o transformaciones hechas con el ejemplo. En los ejemplos genéricos distinguimos las mismas clases que en los experimentos cruciales, si bien en este caso las demostraciones no se limitan a reflejar

la actividad empírica, sino que la transforman en referencias a propiedades abstractas de la clase del ejemplo y a razonamientos deductivos que las ligan.

Distingue dos familias de demostraciones **deductivas**, dependiendo de la forma de construirlas.

- Experimento mental: la demostración, aún siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de un ejemplo, lo cual se nota a veces en que la demostración tiene un desarrollo temporal. Distinguimos dos tipos de experimentos mentales, los "transformativos", cuando la demostración se basa en una transformación del enunciado o conjetura inicial en otro equivalente, y los "axiomáticos", cuando la demostración es una cadena de implicaciones lógicas basada en definiciones, axiomas o propiedades aceptadas. El ejemplo ayuda, respectivamente, a prever las transformaciones más convenientes y a organizar la cadena de implicaciones.
- Demostración formal: es el tipo de demostración, formada por cadenas de deducciones lógicas formales y sin soporte de ejemplos, usual en los trabajos de los matemáticos profesionales. También ahora es posible encontrar los dos tipos anteriores de demostración con la diferencia de que en las demostraciones formales no se usa ningún ejemplo como ayuda.

En el proyecto al que hiciéramos referencia se arribaron a algunas conclusiones como: el Cabri puede ayudar a entender la necesidad de justificaciones abstractas y demostraciones en matemática; en la utilización de secuencias de problemas organizadas cuidadosamente y dando a los estudiantes el tiempo suficiente para trabajar en ello, es posible el progreso de los mismos en justificaciones más elaboradas; estos estudiantes progresaron en su habilidad para producir justificaciones o demostraciones siempre y cuando, paralelamente aprendieran conceptos matemáticos y propiedades relacionadas al tema de estudio.

EN EL USO DE SOFTWARE PARA LA DEMOSTRACIÓN

Según Barroso Campos (2004), el software Cabri Geometre permite la puesta en evidencia de aspectos tradicionalmente abandonados de la enseñanza de la geometría, así como permite poner en evidencia aspectos invariantes de una figura observando dibujos con las mismas propiedades geométricas.

Según María José González López la investigación sobre incorporación de software al ámbito educativo aún no ha contemplado en profundidad los aspectos relacionados con la formación inicial de profesores como así tampoco se conocen trabajos de investigación que particularicen las características de las componentes del conocimiento profesional al uso explícito de las nuevas tecnologías. Pero es sin duda indiscutible, la importancia del uso de un software en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

La representación de una construcción geométrica en un entorno de geometría dinámica tiene dos facetas distintas: la representación gráfica de objetos geométricos en la pantalla del ordenador y el almacenamiento de las propiedades geométricas que dichos objetos poseen. La primara de ellas, en cuanto a representación gráfica, puede llevarse a cabo en otro contexto: por ejemplo, con lápiz y papel (de forma estática) o grabando a modo de película una secuencia de dibujos (si se quiere añadir movimientos). Sin embargo, la segunda faceta es específica de los ambientes computacionales de geometría dinámica permitiendo enmarcar las representaciones de la geometría dinámica en lo que se denomina representaciones ejecutables, en el sentido de que se pueden ver los objetos matemáticos como manipulables y actuar sobre ellos. Esta cualidad se manifiesta por el *modo de arrastre* que poseen los sistemas de geometría dinámica y que les confieren la cualidad de ser dinámicos. Esta cualidad es la que permite que se aumenten las posibilidades de actuación del usuario sobre los objetos geométricos y, en consecuencia, que se modifiquen las condiciones de las situaciones específicas de enseñanza respecto de otros contextos tradicionales.

Hölzl (1996) analiza la naturaleza del modo arrastre y su posible implicación en las concepciones resultantes en los estudiantes, concluyendo que el arrastre, desde un punto de vista técnico enfatiza la jerarquía de los objetos geométricos, pone de manifiesto las relaciones entre dibujo y figura, altera el "carácter relacional" de los objetos geométricos, distinguiendo objetos que, desde un punto de vista teórico, son indistinguibles.

Y desde un punto de vista educativo, sugiere nuevos estilos de razonamiento; favorece la aparición de estrategias dinámicas de resolución de problemas; potencia la aparición de un nuevo lenguaje entre los estudiantes para comunicar experiencias geométricas basado en el uso de verbos activos relacionados con el movimiento; demanda nuevas habilidades a los estudiantes, relacionadas con las "meta-actividades" de controlar los parámetros que intervienen en un experimento y ser capaces de interpretar los resultados.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que adquirir determinados conocimientos geométricos a partir de un dibujo no es un asunto inmediato ni espontáneo y no ocurre sin intervención específica. En este sentido, el uso de software de geometría dinámica podría sugerir la idea errónea de que mostrar un dibujo y "moverlo" es suficiente para que el estudiante deduzca una determinada propiedad geométrica invariante por el movimiento (Laborde, 1998).

Pero la simple sustitución de la regla y el compás tradicionales por comandos en un sistema computacional, por más que este introduzca algunas variantes, no es razón suficiente para esperar mejoras en el aprendizaje de la geometría. Así, es fundamental diseñar o seleccionar actividades para los estudiantes encaminadas a relacionar   información geométrica teórica

35

para los estudiantes encaminadas a relacionar información geométrica teórica con información observada en un dibujo que se mueve. (Recio, 1999)

Se van a seleccionar problemas para que los alumnos puedan realizar exploraciones, conjeturar y proponer argumentos utilizando el Cabrí para así, a partir de estas actividades, analizar si ellos consideran su producción una demostración o tienen la creencia que para considerarla una demostración matemática debe formalizarse.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barroso Campos, R. (2004). E*lección de cuatro problemas geométricos para una investigación sobre la comprensión de propiedades geométricas, una justificación.*

Duval, R. (1995). *Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y...una quinta*. Universidad del Litoral Costa de Opâle.

González López, M. J. (2001). Formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: actividades basadas en la utilización de software de geometría dinámica, en UNO *Razonamientos y puebas N° 28*. 110-125.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24.* 139-162

Gutiérrez, Á. (2001): *Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles.* Actas del 5° Simposio de la SEIEM. Almería

Hernández Sampieri, R. y otros (1999). *Metodología de la Investigación.* México: McGraw-Hill.

Hölzl, R. (1996). How does dragging affect the learning of geometry. *International. Journal of computers for Mathematical Learninf, N°1*. 169-187

Laborde, C. (1996). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid. 67-85

Laborde, C. (1998). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig, (Ed.): *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática*. Una empresa docente. 33-48

Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2000). *Proofs produced by secondary school students learning Geometry in a dynamic computer environment*. Educational Studies in Mathematics. 44: 87-125

Recio, T. (1999). Compass avoidance. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, N° 53*. 59-66

Skemp, R (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.