INTRODUCCION DE LOS NUMEROS IRRACIONALES POR DESCOMPOSICION EN FRACCIONES CONTINUAS[1]

Vera W. de Spinadel
Centro de Matemática y Diseño. Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires (Argentina)
vspinade@fibertel.com.ar
http://www.maydi.org.ar

INTRODUCCION

Fue Pitágoras de Samos quién descubrió la inconmensurabilidad de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, introduciendo así el primer número "*irracional*", esto es, que no se puede escribir como una razón de dos números enteros. Matemáticamente, el conjunto de los racionales junto con el de los irracionales forma el conjunto de números reales, que posee la propiedad de ser denso (esto es, no posee ningún agujero). Y los números irracionales se definen mediante las cortaduras de Dedekind manifestando que un número sobre el eje real lo divide en dos conjuntos disjuntos: el de los números reales mayores que él y el de los números reales menores que él. Por lo tanto, si el número elegido no es un entero o un racional, entonces queda definido el irracional. Pero esta definición no permite cuantificar el grado de irracionalidad o sea el grado de aproximación de las aproximantes racionales al número irracional. Este grado de irracionalidad resulta ser de importancia en las experiencias que se diseñan buscando las fronteras entre un sistema físico que se comporta periódicamente y su transformación en un sistema caótico, donde es imposible predecir el comportamiento ya que condiciones iniciales muy semejantes originan resultados totalmente dispares. Para detectar este grado de irracionalidad, usaremos la descomposición en fracciones continuas.

SUCESIONES DE FIBONACCI

Una sucesión secundaria de Fibonacci es una sucesión de números enteros tal que cada número es la suma de los dos precedentes. Comenzando con $F(0) = 1$; $F(1) = 1$, tenemos:

(2.1) $$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$
donde $F(n + 1) = F(n) + F(n - 1)$.

[1] Texto de una conferencia organizada por SOAREM, dirigida a profesores de secundaria. La autora se pone a disposición de los lectores.

Estas sucesiones pueden generalizarse, originando las llamadas "*sucesiones secundarias generalizadas de Fibonacci*" SSGF:

$$a, b, pb + qa, p(pb + qa) + qb, \ldots$$

donde cada término es una combinación lineal de los dos precedentes. Las SSGF satisfacen relaciones del tipo

(2.2) $$G(n + 1) = p\,G(n) + q\,G(n - 1),$$

donde p y q son números naturales. A partir de (2.2) obtenemos

$$\frac{G(n+1)}{G(n)} = p + q\frac{G(n-1)}{G(n)} = p + \frac{q}{\dfrac{G(n)}{G(n-1)}}$$

Tomando límites en ambos miembros y suponiendo que el $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)}$ existe y es igual a un número real x, resultado que ha sido probado por Spinadel en (Spinadel, 1998), tendremos $x = p + \frac{q}{x}$ o bien $x^2 - px - q = 0$, cuya solución positiva es $x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$. Esto implica que

(2.3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS

Consideremos un conjunto de números irracionales positivos, obtenido tomando $G(0) = G(1) = 1$ en la ecuación (2.3) y considerando diferentes valores de los parámetros p y q.

Definición:
La familia de Números Metálicos (FNM) es el conjunto de autovalores positivos de la ecuación matricial

(3.1) $$\begin{pmatrix} G(n+1) \\ G(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(n) \\ G(n-1) \end{pmatrix}$$

para diferentes valores de *p* y *q* (números naturales).

Dicho de modo más simple, los miembros de esta familia son números irracionales cuadráticos positivos que son las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo:

(3.2) $$x^2 - px - q = 0 .$$

Comencemos con $x^2 - px - 1 = 0$. En este caso es muy fácil hallar los miembros de la FNM que satisfacen esta ecuación, desarrollándolos en fracciones continuas. En efecto, si $p = q = 1$, resulta $x^2 = x + 1$, que puede escribirse $x = 1 + \frac{1}{x}$. Reemplazando iterativamente el valor de *x* (no nulo) del segundo término, obtenemos $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$,

esto es, $x = [1,1,1,\cdots] = [\overline{1}]$, una fracción continua periódica pura que define el Número de Oro

$$\mathrm{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\overline{1}] = \phi = 1{,}618.... \cdot$$

Análogamente si *p* = 2 y *q* = 1 obtenemos el Número de Plata

$$\sigma_{Ag} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = [\overline{2}] = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414\ldots,$$

que es otra fracción continua periódica pura.

Si *p* = 3 y *q* = 1 obtenemos el Número de Bronce

$$\sigma_{Br} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = [\overline{3}] = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3{,}302...$$

Para *p* = 4; *q* = 1, el Número Metálico que indicaremos $\sigma_4{}^1 = 2 + \sqrt{5} = [\overline{4}] = \phi^3$, un sorprendente resultado relacionado con el desarrollo en fracciones continuas de las potencias impares del Número de Oro. Tanto las potencias impares como las potencias pares del Número de Oro, al desarrollarlas en fracciones continuas. muestran propiedades sumamente interesantes en términos de los llamados números de Lucas, que fueran introducidos en 1877 por el matemático francés Edouard Lucas (1842-1891).

Es sencillo verificar que los siguientes Números Metálicos tienen los valores:

$$\sigma_5^{\ 1} = \frac{5+\sqrt{29}}{2} = \left[\overline{5}\right];\ \sigma_6^{\ 1} = 3+\sqrt{10} = \left[\overline{6}\right];\ \sigma_7^{\ 1} = \frac{7+\sqrt{53}}{2} = \left[\overline{7}\right];$$

$$\sigma_8^{\ 1} = 4+\sqrt{17} = \left[\overline{8}\right];\ \sigma_9^{\ 1} = \frac{9+\sqrt{85}}{2} = \left[\overline{9}\right];\ \sigma_{10}^{\ 1} = 5+\sqrt{26} = \left[\overline{10}\right]$$

Obviamente, todos ellos son de la forma $\left[\overline{n}\right]$, esto es, su desarrollo en fracciones continuas es periódico puro. El más lentamente convergente de todos ellos es el Número de Oro ya que todos los denominadores en las fracciones son los más pequeños posibles (unos). Un enunciado elegante para este resultado es el siguiente:

El Número de Oro ϕ es el más irracional de todos los números irracionales.

Si, en cambio, consideramos la ecuación cuadrática $x^2 - x - q = 0,$ tendremos para *q* = 1, nuevamente el Número de Oro. Si *p* = 1 y *q* = 2, obtenemos el Número de Cobre $\sigma_{Cu} = 2 = \left[2, \overline{0}\right],$ que es una fracción continua periódica. Si *p* = 1 y *q* = 3, obtenemos el Número de Níquel $\sigma_{Ni} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} = \left[2, \overline{3}\right]$. Análogamente:

$$\sigma_1^{\ 4} = \left[2, \overline{1,1,3}\right];\ \sigma_1^{\ 5} = \left[2, \overline{1,3}\right];\ \sigma_1^{\ 6} = 3 = \left[3, \overline{0}\right];\ \sigma_1^{\ 7} = \left[3, \overline{5}\right];\ \sigma_1^{\ 8} = \left[3, \overline{2,1,2,5}\right];$$

$$\sigma_1^{\ 9} = \left[3, \overline{1,1,5}\right];\ \sigma_1^{\ 10} = \left[3, \overline{1,2,2,1,5}\right];\ \sigma_1^{\ 11} = \left[3, \overline{1,5}\right];\ \sigma_1^{\ 12} = 4 = \left[4, \overline{0}\right]$$

y todos estos miembros de la FNM son de la forma $\left[m, \overline{n_1, n_2, \cdots}\right]$. Por otra parte, es muy fácil verificar que en este subconjunto, los Números Metálicos enteros tales como 2, 3, 4,... aparecen de manera sumamente regular.

El primero aparece para $q = 2\ (1+\langle 1\rangle = 2)$, el segundo para $q = 6\ (3+\langle 3\rangle = 6)$, el tercero para $q = 12\ (7+\langle 5\rangle = 12)$ y así siguiendo, donde $\langle\ \rangle$ indica el número de ecuaciones que separa dos soluciones enteras consecutivas. El primer dígito del Número Metálico que no es un número entero es *m* = 2 para los primeros tres; *m* = 3 para los segundos cinco; *m* = 4 para los terceros siete; etc. Los desarrollos en fracciones continuas de los Números Metálicos no enteros son además "palindrómicos", esto es, sus períodos son simétricos con respecto a sus centros, con excepción del último dígito del período que es igual a $2m - 1$.

No existe ninguna regla simple que prediga la longitud de los períodos, ya que algunos son muy cortos como por ejemplo, el primero después de una solución entera tiene período igual a 1 y los últimos antes de una solución entera tienen períodos de longitud 2. Otros períodos son extremadamente largos y con excepción de los casos *q* = 3, 7, 13, 21, 31,..., los restantes desarrollos en fracciones continuas presentan "ciclos estables" de diferentes longitudes (Spinadel, 1998).

NUMEROS DE PISOT Y DE SALEM

Consideremos el conjunto *U* de números algebraicos (un número es *algebraico* si satisface una ecuación algebraica con coeficientes enteros) mayores que 1 cuyos conjugados tienen un módulo a lo sumo igual a 1. Por ejemplo, el Número de Oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número algebraico, siendo su conjugado $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Este conjunto se divide en dos conjuntos disjuntos *S* y *T*.

El conjunto *S* está integrado por los llamados "números de Pisot", que fueran simultáneamente definidos por Charles Pisot (1910-1984) en su famosa tesis publicada en 1938 (Pisot, 1838) y por T.Vijayaraghavan (Vijayaraghavan, 1941, 1942). Por ello. dichos números son llamados "números de Pisot- Vijayaraghavan" o más brevemente, "números PV". Así, el conjunto de números PV es el conjunto de los números algebraicos reales $\theta > 1$ cuyos conjugados tienen módulo estrictamente menor que 1. El conjunto *T* es el de los "números de Salem", descubiertos por Raphael Salem (1898-1963) y se define como el conjunto de los números algebraicos reales $r > 1$ cuyos conjugados tienen módulo mayor que 1, existiendo uno con módulo igual a 1 (Salem, 1945, 1963).

Los conjuntos *S* y *T* definen una partición de *U.* Todos los números racionales mayores que 1 pertenecen a *S*. Los números cuadráticos en *S* son las soluciones de ecuaciones cuadráticas y resulta fácil probar que *S* es un conjunto cerrado sobre la recta real. El conjunto de puntos, límite de *S* es llamado “conjunto derivado de *S*” y se indica mediante S'. Además, si θ es un número de PV; entonces las potencias $\theta^n \in S'$ para todo entero $n \geq 2$. Esto implica que todos los números de PV de grado 2 $\in S'$, siendo el menor de ellos el Número de Oro, que al mismo tiempo es el menor elemento de S'.

Es evidente que los números de PV son un subconjunto de la FNM, ya que los Números Metálicos cuyo desarrollo en fracciones continuas es periódico puro son números de PV cuadráticos, al ser las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 - px - 1 = 0$, donde *p* es un número natural. Por otra parte, las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - px + 1 = 0$, donde $p \geq 3$ son también números de PV que admiten un desarrollo en fracciones continuas periódico puro, siempre que se omita la condición que los términos de la fracción continua tengan que ser positivos (Spinadel, 2001). Por ejemplo:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \ddots}} = \left[\overline{3-}\right].$$

Por el contrario, no existen ejemplos de números de Salem tan simples como los mencionados para los números de PV, ya que se puede demostrar que no existen números de Salem de grado inferior a 4. Ello no obstante, ambos conjuntos de números de PV y de Salem poseen numerosas aplicaciones importantes no solamente en el contexto cuasi-cristalino sino también en el estudio formal de series de potencias y análisis armónico.

CUASI-CRISTALES: SIMETRIAS PROHIBIDAS

Los cuasi-cristales son sustancias que poseen esquemas de difracción que evidencian una simetría rotatoria de orden n = 5, 8, 10, 12, prohibida en Cristalografía. Fueron descubiertos por D. Shechtman et al. en 1984, enfriando rápidamente una aleación de aluminio-manganeso. Esta simetría se presenta combinada con la auto-semejanza. En este contexto, las cuasi-redes pueden concebirse como conjuntos matemáticos discretos que pueden modelizar los picos de Bragg que aparecen en los esquemas de difracción de los cuasi-cristales. Estas cuasi-redes desempeñan el mismo papel que las redes para los cristales.

Recientemente (Barache et al., 1998; Gazeay, 1997, 2000; Burdik, 1998), se han propuesto conjuntos discretos de números, los “enteros β”, indicados con la notación $\mathbf{Z}_\beta$, como herramientas de numeración para coordinar los nodos cuasi-cristalinos en 1, 2 o 3 dimensiones como asimismo los picos de Bragg en los esquemas de difracción (Elser, 1985; Gazeau & Lipinski, 1997).

En los casos observados se tiene:

$\beta = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$ **Número de Oro** (cuasi-redes penta- o decagonales)

$\beta = \sigma_{Ag} = 1+\sqrt{2} = 1+2\cos\dfrac{\pi}{4}$ **Número de Plata** (cuasi-redes octogonales)

$\beta = \phi^3 = 2+\sqrt{3} = 2+2\cos\dfrac{\pi}{12}$ **Número Sutil** (cuasi-redes dodecagonales)

La denominación de Número Sutil se debe a El Naschie (El Naschie, 1998). Es interesante notar que además de aparecer en redes cuasi-periódicas, este número juega un papel significativo en la teoría del micro-espacio-tiempo de tipo fractal Cantoriano. También aparece en diversas ecuaciones de la teoría de nudos, en geometría no conmutativa y en la teoría de variedades tetra-dimensionales (El Naschie, 1999).

Los desarrollos en fracciones continuas de estos tres números irracionales son periódicos puros. En efecto:

$$\phi = [\bar{1}];\ \sigma_{Ag} = [\bar{2}];\ \phi^3 = [\bar{4}].$$

El factor de escala relevante β es un número de PV cuadrático. Como hemos visto, son números algebraicos reales $\beta > 1$ que son solución de ecuaciones cuadráticas del tipo:

$$x^2 = ax \pm 1 \qquad (a \in \{1,2,4\})$$

tal que todas las respectivas segundas raíces β' (llamadas “conjugadas de Galois de β”) poseen un módulo estrictamente menor que 1.

Consideremos el papel desempeñado en la teoría clásica de redes por el anillo de enteros **Z** y la condición de compatibilidad rotatoria planar:

$$\rho = 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbf{Z}.$$

Las redes son generadas por sucesivas adiciones o sustracciones de un número finito de vectores y son cerradas ante la ley interna: para $\forall x, y \in$ red, $mx + ny \in$ red para todo $m, n \in$ **Z.**

y, obviamente, $\mathbf{Z}_{\beta}$ se reduce a **Z** cuando β es un número natural.

En términos de los miembros de la FNM, los números cuadráticos de Pisot poseen las siguientes equivalencias:

n	ρ	β	β'
5	$2\cos 2\pi/5 = 1/\phi$	$1+\cos 2\pi/5=\phi$	$1-\phi$
8	$2\cos 2\pi/8=\sigma_{Ag}-1$	$1+2\cos 2\pi/8=\sigma_{Ag}$	$1-\sqrt{2}=2-\sigma_{Ag}$
12	$2\cos 2\pi/12=\sqrt{3}$	$1+2\cos 2\pi/12=1+\sqrt{3}=\left[2,\overline{1,2}\right]$	$1-\sqrt{3}=\left[\overline{1,2}\right]$
12	$2\cos 2\pi/12=\sqrt{3}$	$2+2\cos 2\pi/12=2+\sqrt{3}=\left[3,\overline{1,2}\right]$	$2-\sqrt{3}=\left[1,\overline{1,2}\right]$

El descubrimiento de los cuasi-cristales con sus simetrías cristalográficamente prohibidas es uno de los ejemplos más notables en el cual un análisis de simetría matemática pura determina simetrías prohibidas que aparecen en un nuevo estado sólido de la materia.

Lo más notable es que experimentalmente (Ikezawa & Kohmoto, 1994; Smith el al., 1998; Chih-Kang) se han obtenido films de Plata que poseen una estructura modulada por una sucesión cuasi-periódica basada en el Número de Plata. Estas sustancias constituyen un nuevo tipo de cuasi-cristal que es fundamentalmente diferente de los conocidos cuasi-cristales que hemos mencionado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Vera W. de Spinadel, V. W. de (1998). *From the Golden Mean to Chaos*. Buenos Aires: Nueva Librería.
Pisot, C. (1938). *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, Eérie 127, pp. 205-208.
Vijayaraghavan, T. (1941). *On the fractional part of the powers of a number*. Proc. Camb. Phil. Soc. 37, pp. 349-357.

Vijayaraghavan, T. (1942). On the fractional part of the powers of a number, London Math. Soc. 17, pp.137-138.
Salem, R. (1945). Power series with integral coefficients. Duke Math. Journ. 12, pp. 153-173,
Salem, R. (1963). Algebraic numbers and Fourier Analysis. Heath Math. Monographs, Boston, Mass.
Spinadel, V. W. de (2001). Half-regular continued fraction expansions and Design. *Journal of Math. & Design*, vol. 1, Number 1, pp. 67-71.
Barache, D.; Champagne, B. and Gazeau, J. P. (1938). Pisot-Cyclotomic Quasilattices and their Symmetry Semi-groups, ed. J. Patera, Fields Institute Monograph Series, vol. 10, Amer. Math. Soc.
Gazeau, J. P. (1997). Pisot-cyclotomic integers for Quasicrystals. T*he Mathematics of Aperiodic Long Range Order* (ed. R. V. Moody) NATO-ASI Proceedings, Waterloo 1995, Kluwer Academic Publishers.
Burdik, C.; Frougny, C.; Gazeau, J P. and Krejcar, R. (1998). Beta-Integers as natural counting systems for Quasicrystals. *J. Phys. A: Math*. Gen., 31, pp. 6449-6472.
Gazeau, J. P. (2000). Counting systems with irrational basis for Quasicrystals. F. Axel, F. Dénoyer, J. P. Gazeau. (Ed.) *In From Quasicrystals to more Complex Systems*, No. 13. Les Houches School Proceedings, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin.
Elser, V. (1985). Indexing problems in Quasicrystal Diffraction. *Phys. Rev.* B32**,** pp. 4892-4898.
Gazeau, J. P. and Lipinski, D. (1997). Quasicrystals and their Symmetries, Symmetries and structural properties of condensed matter, Zajaczkowo 1996. T. Lulek (Ed.), World Scientific: Singapore.
El Naschie, M. S. (1998). Remarks to the PV Number $\phi^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 4.236\ldots$ *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 9, No. 8, pp. 1445-1471.
El Naschie, M. S. (1999). The Golden Mean in Quantum Geometry, Knot theory and related topics. *Chaos, Solitons and Fractals,* vol. 10, No. 8, pp. 1303-1307.
Ikezawa, K. and Kohmoto, M. (1994). Energy spectrum and the critical wavefunctions of the quasiperiodic Harper equation – the Silver Mean case. *J. of the Phys. Soc. of Japan*, vol. 63, No. 6, pp. 2261-2268.
Smith, A. R. (1996). Chao Kuo-Jen, Niu Qian, Shih Chih-Kang, Formation of atomically flat Silver films on Ga-As with a Silver Mean quasi-periodicity, Science, vol. 273, pp. 226-228.
Shih Chih-Kang, Growing atomically flat metal films on semiconductor substrates, Internet: http://www.aps.org/BAPSMAR98/abs./S278002.html